

第一页为封面页

参赛队员姓名: 王卓杰、项赞希、高宇成

中学: 天津市耀华中学

省份: 天津市

国家/地区: 中国大陆

指导教师姓名: 陈健、庞海

论文题目: 《流体碰撞加速问题研究》

第二页此处开始为论文的主体部分

流体碰撞加速问题研究

作者：王卓杰、项赞希、高宇成



摘 要

将一个乒乓球放在一杯水中共同自由下落，与地面碰撞后，乒乓球有时会反弹到远高于初始释放时的位置。本文对此现象进行了研究。

在经过大量预实验观察和感性认识后，我们把碰撞过程分为三个阶段：“碰前”、“碰撞”和“碰后”。

碰前阶段是准自由落体运动。首先，我们观察到在微重力条件下乒乓球被“吸入”水中这一现象。我们建立了乒乓球在下落过程的动力学模型，得到了主要影响因素以及对后续过程的意义。其次，我们观察到水的表面形貌在失重下变得复杂。而液面形貌是后续碰撞阶段的初始条件，为此我们给出了这一过程表面形貌的解析描述，并与实验进行了对比，我们还分析了表面形貌对乒乓球稳定性的影响，根据理论给出了控制液体初始状态的最佳方案。最后，我们观察到整个系统在自由下落时会产生摆动，我们建立模型讨论了水杯在空气阻力和重力共同作用下的运动稳定性，并给出了改进方案。

碰撞过程时间极短，期间伴随着复杂的流体运动和流固耦合。我们做了合理的简化，以小球为研究对象，建立了小球加速反弹的动力学模型，揭示了小球之所以能够加速的根本原因，并与实验进行了较好的比对。

反弹过程是存在空气阻力作用下的竖直上抛运动。我们设计了一套方案，利用运动方程的解析解，通过测量局部运动速度，就能反算出最终反弹高度。

在定量实验中，我们根据模型和反复测量的经验不断的改进实验方案。我们做了多组对比实验，如将地面替换为瑜伽垫，水，蹦床，非牛顿淀粉溶液等，探究清楚了碰撞面材质对反弹加速比的影响，同时验证了我们的理论模型。我们改变水量、下落高度以及水的初始转速三个参量进行了定量实验，找到了最佳加速反弹比例成立的条件。

在整个研究中，我们力求对每一个观察到的现象建立一个相应的物理模型，为此我们做了许多合理的简化，提炼出其物理本质。我们认为这些物理模型和研究方法对于其他研究也有较好的借鉴意义。

关键词：浮力，表面张力，液面形貌，微重力，碰撞，附加压强，接触角，空气阻力系数。

目 录

.....	2
摘 要.....	1
一、引言.....	3
二、碰前过程——杯体下落.....	8
2.1 空气阻力、参照系、惯性力.....	9
2.1.1 空气阻力作用下的自由落体.....	9
2.1.2 空气阻力系数.....	11
2.1.3 参照系与惯性力.....	11
2.2 浮力消失、乒乓球被“吸入”水中.....	12
2.3 液面形貌分析与控制.....	20
2.3.1 “贴壁”效应与液面形貌.....	20
2.3.2 旋转的水液面形貌及其对下落过程的影响.....	22
2.4 杯体下落的稳定性问题.....	25
2.5 小结.....	29
三、碰撞过程.....	30
3.1 实验观察.....	30
3.2 弹起过程动力学.....	31
3.2.1 碰撞过程流体内压强分布.....	31
3.2.2 第一阶段——乒乓球浮出水面之前.....	32
3.2.3 第二阶段——浮出水面至与水脱离.....	35
3.3 小结.....	36
四、反弹过程.....	38
五、实验与优化.....	40
5.1 实验装置优化与改进.....	40
5.2 定量实验结果.....	43
5.3 视角误差控制.....	46
5.4 视频追踪误差.....	49
六、结论.....	51
附录 1, 空气阻力系数测定.....	53
附录 2: 碰撞过程计算.....	59
附录 3: 热效应估算.....	61
参考文献.....	62
致谢.....	63

一、引言

将一个乒乓球放入盛有少量水的纸杯中，于一定高度释放，使其自由下落并与地面发生碰撞。在某些情况下，乒乓球会以比落地时更高的速率反弹，最终达到远高于初始释放位置的高度，如图1所示。

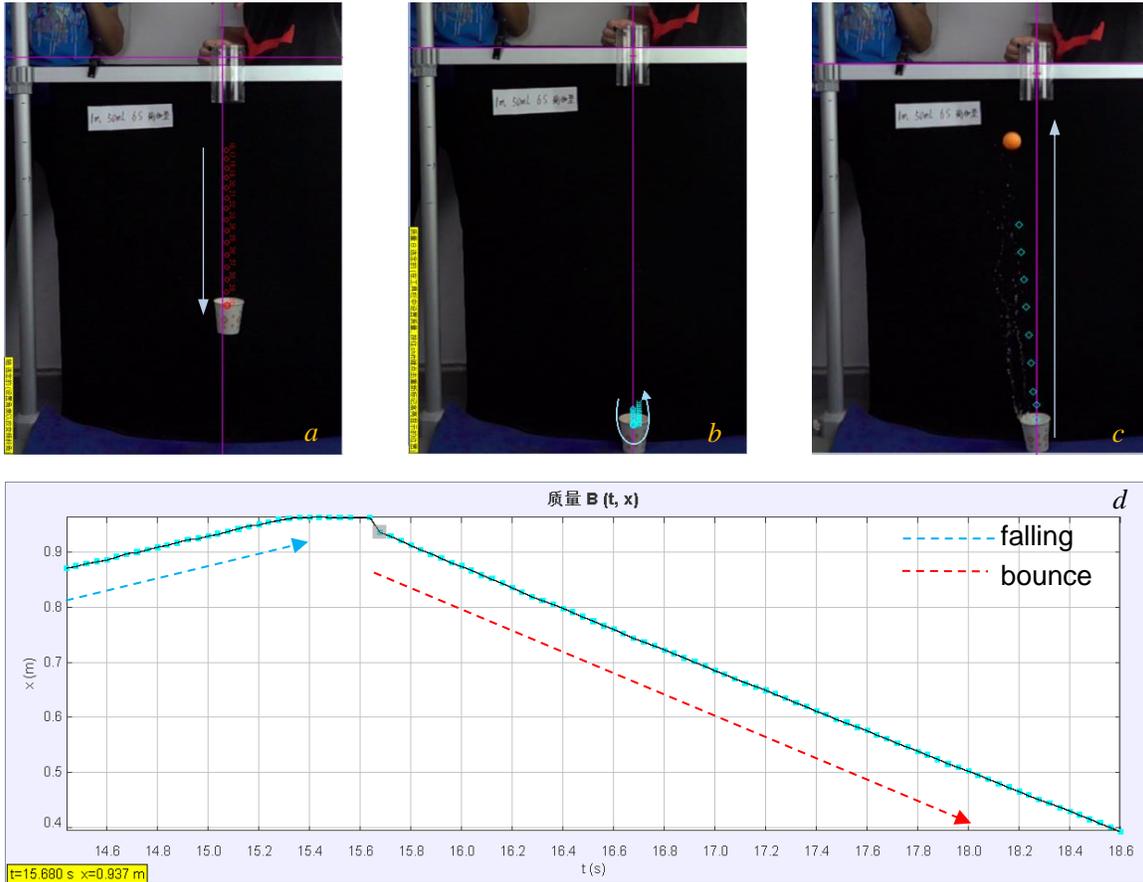


图1：一次典型的成功加速反弹。系统从距地面1米左右的高度释放，落地后，杯体几乎静止，乒乓球反弹时的速度大小超过落地时的2.3倍。可以观察到乒乓球重重地打在约3米高的天花板上。*a.* 下落过程（0.01s / point），*b.* 碰撞过程（0.001s / point），*c.* 反弹过程（0.01s / point），*d.* 位置-时间图像（图像斜率为运动速度）

我们用一个篮球替换水杯重复该实验，经测量，发现其反弹速度最高仅能达到下落速度的2.1倍，如图2所示。

这两个实验的对比令人意外。首先，液体和弹性体的性质完全不同，水是“软”的，而篮球是“硬”的，但在碰撞过程中水却体现出与篮球类似的“弹性”。其次，通过对比多次成功反弹实验，我们发现水杯反弹的速度增量通常比篮球的更大，这说明水的“弹性”要好于篮球。

一、引言

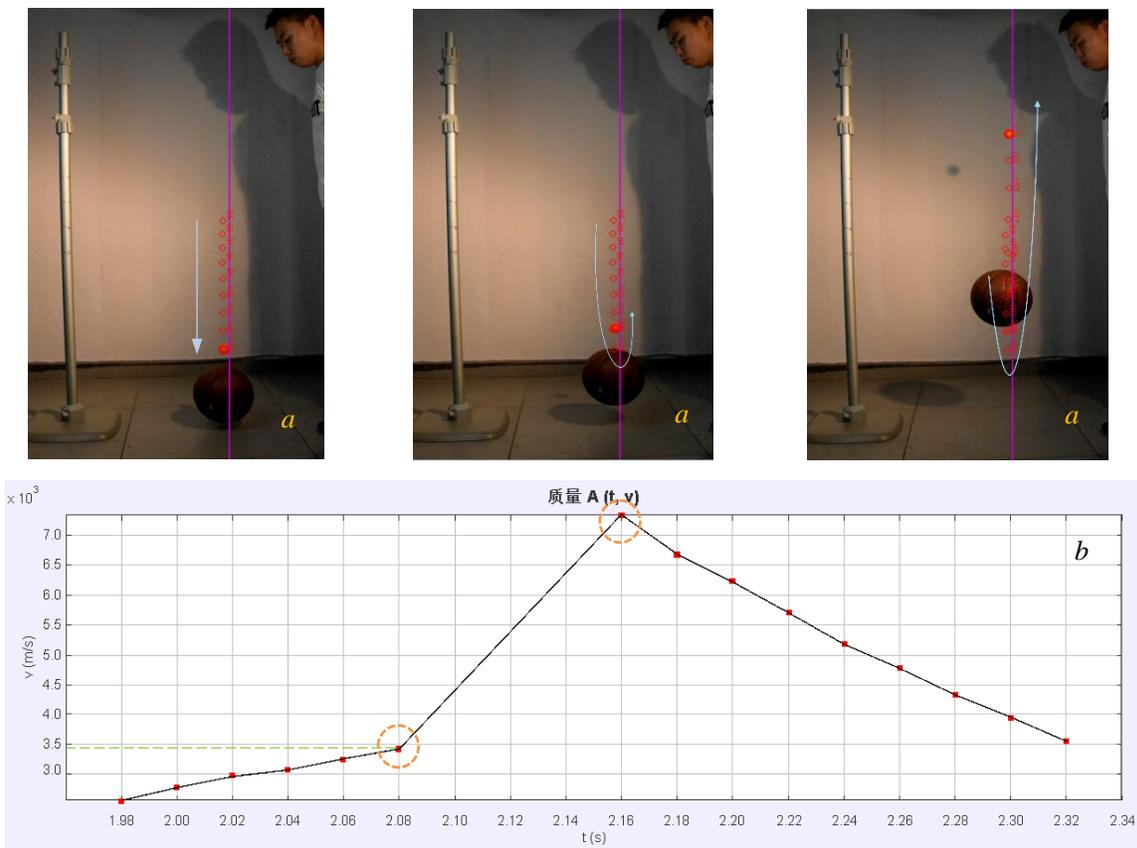


图2: 篮球乒乓球反弹实验。a. 乒乓球与篮球碰撞加速反弹过程; b. 加速比测量数据。仍将系统从距离地面1米左右的高度释放, 落地完成碰撞后, 乒乓球反弹速度约为落地时刻速度的2.1倍。

如果将整个过程视为水、乒乓球和地面三者的完全弹性碰撞问题。利用初等物理的知识可以给出乒乓球最终反弹速率为

$$v'_0 = \frac{3 m_1 / m_0 - 1}{m_1 / m_0 + 1} v_0. \quad (1.1)$$

式中 m_1, m_0 分别为水(杯)质量和乒乓球质量, v_0 为系统的碰前速率, v'_0 为乒乓球的反弹速率。(1.1)式说明反弹速度是质量比 m_1 / m_0 的单调增函数, 在质量比 $m_1 / m_0 \rightarrow \infty$ 时会给出反弹速率的最大值, $v'_{0\max} = \lim_{m_1/m_0 \rightarrow \infty} v'_0 = 3v_1$, 即碰后速度大小的极限是落地前速度的三倍。

为此我们做了多组预实验, 在最成功的一组实验中, 水的质量与乒乓球质量只比约为 $m_1 : m_0 \sim 30$, 从一米左右高度释放, 落地时速率为 4m/s , 反射速率约为 10.7m/s , 反弹加速比约为2.7。而根据(1.1)式, 其反弹速率在理论上应为 $v'_0 \approx 2.8v_0$ 。这说明水(杯)在这一过程中的作用相当接近一个完全弹性体。

一、引言

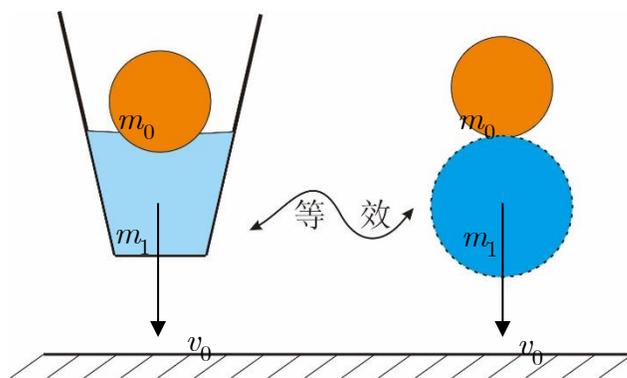


图3: 水(杯)-乒乓球-地面的三体碰撞效果表明, 水在这一过程中的作用与一个良好的弹性体相当。

为了验证这一类比, 我们搭建了一套装置, 进行了数十组实验。图4中列举了我们进行预实验主要的装备和器材。在这些实验中, 我们大范围的改变水量和下落高度并借助高速摄像机对下落过程进行分析, 希望找到能够影响实验成功率的主要因素。



图4: 在预实验中主要采用的实验装置和设备。a. 实际实验场景。图中尺子用于相机像素点定标, 摄影灯用于增加光强, 提高视频清晰度。b. 我们所采用的乒乓球种类和型号。c. 75 盎司(200ml) 一次性纸杯(定量实验)和各种型号塑料透明杯(观察实验)。d. 高速摄影机。每秒能够采集 1000 帧。¹

¹ 市面上能够买到的万元级别的高速摄像设备单次记录时间一般不超过 3 秒, 我们使用的 SonyRX10M3, 在 1000fps 的帧率下最多可以录制两秒, 可使运动过程变慢 40 倍。

一、引言

然而实验结果表明, 即使在几乎相同的实验条件下, 实验的可重复性也很差, 成功的比例不到10%。即便都是成功的加速反弹, 相同条件下末速度与初速度之比也很不稳定(例如图5所示的两组代表性实验), 加速比例一般在1倍至2倍之间不等。

图5列举了两组实验条件几乎相同的下落反弹实验, 发现二者碰后的加速比率相差很大。经过多组重复实验后, 我们发现加速反弹的成功与否, 反弹的加速比例看起来毫无规律。这说明“水和完全弹性体相当”的类比也许仅仅是一个巧合。

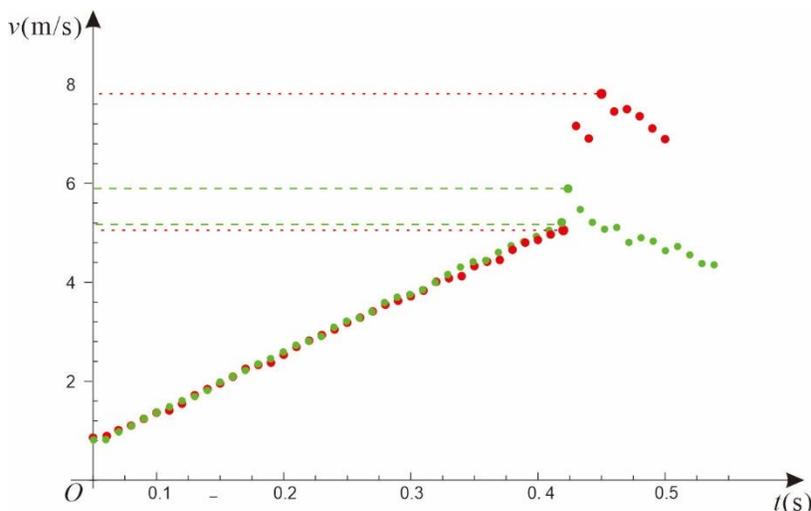


图 5: 初条件接近的两组“成功”加速反弹实验。红色和绿色点分别代表一组独立的实验, 可以明显的看出, 在反弹后, 末速度与原速度只比差异非常大。

为了弄清楚在整个过程中究竟发生了什么, 我们又替换材料和不同设备进行数十组观察实验, 获得了关于这一现象丰富的感性认识, 并观察到一系列未曾想到的物理现象。本文正是基于这些观察, 进行了不断的深入的后续研究。我们对这一过程中发生的每一个现象进行了思考, 并尝试建立模型, 最终揭示了流体加速过程的影响因素。基于对这些子问题的认识, 和整体把握, 我们改进并设计了多组定量实验, 给出了增加加速反弹成功率的实验方案, 以及找到了加速反弹的最佳参数组。

我们将整个过程分为“碰前”“碰撞”和“碰后”三个阶段分别进行探究。

(1) 碰前阶段: 系统从静止释放到碰撞地面之前, 做准自由落体运动。作为后续“碰撞”阶段的初始条件, 这一阶段在本研究中最关键和最复杂的。我们在该阶段观察到浮力的消失、乒乓球被“吸入”水中并再次浮出、静止和旋转液体造

一、引言

成的液面形貌变化、下落过程的不稳定摆动等一系列现象。针对每一个实验现象，我们都尝试建立了相应的理论模型，从本质上揭示它们的成因以及对后续过车工的影响，同时也给出实验的优化方案。

(2) 碰撞阶段。这一阶段发生在极短的时刻，期间涉及到复杂的流体运动以及流固耦合过程。为了能从复杂的现象中提取出我们关注的主要信息，我们将研究对象锁定在乒乓球上，将流体的作用等效为一个外力的背景，据此建立了一个相对简单力学模型，给出了乒乓球在这一阶段运动的全部定性和定量结论。

(3) 碰后阶段。乒乓球从水中飞出，在重力和空气阻力共同作用下做竖直上抛（或斜抛）运动。利用牛顿力学和空气阻力模型，我们给出了通过测量初速度来判定乒乓球反弹的最大高度的方案。

在论文最后的部分，我们给出了对实验的优化和改进方案，列举了定量实验的结果，找到了反弹加速比例最大的参数组合，并用实验结果验证了之前的理论模型。此外我们还分析了本实验中的两个主要误差来源——视角误差和视频追踪误差，并给出了控制和减小误差的方法。

二、碰前过程——杯体下落

下落过程是碰撞过程的初始状态，由于液体的存在，这一过程变得很不平凡。在实验中，我们观察到由于“失重”、“空气阻力”、“表面张力”等因素造成的一系列现象和问题。这些问题的解决，对于更的控制后续过程，增加反弹成功率将起到决定性作用。

在建立具体动力学模型之前，我们先对下落过程中杯体和乒乓球的受力进行数量级分析，以便在后续的建模中能够做合理的简化。对于50ml水、一次性纸杯、乒乓球三者组成的系统，从一米高度下落。系统和乒乓球受力分别估算如下。

表 1.1 米高度下落过程的受力的数量级估计

整个系统	
总重力 $m_{tot}g$	$6 \times 10^{-1} \text{N}$ (乒乓球、杯子和水的总质量60g)
空气阻力 f	$4 \times 10^{-2} \text{N}$ (取1米高度自由落体落地时刻计算)
惯性加速度 a_{inert}	$9 \text{ m} / \text{s}^2$ (以杯体为参照系, 落地前数值, 方向向上)
乒乓球	
重力 ($m_b g$)	$2.7 \times 10^{-2} \text{N}$
浮力 (F_{bouy})	$2.2 \times 10^{-2} \text{N}$ (取系统落地前一时刻估算)
表面张力 (F_{surf})	$8.6 \times 10^{-1} \text{N}$ (取乒乓球大圆半径进行估算)
惯性力 (F_{inert})	$2.5 \times 10^{-2} \text{N}$

对于整个系统，空气阻力在落地前对体系加速度的影响可占到10%，因此是不可忽略的，并且空气阻力的增加将导致水中产生竖直方向的压强分布，从而产生一个逐渐增大的浮力。因此在讨论乒乓球的运动之前，我们先给出空气阻力对整体的影响。

对于乒乓球，重力、浮力和惯性力三者大小相当，而水对乒乓球的表面张力比其他力大一个数量级，因此表面张力将主导乒乓球的运动。

2.1 空气阻力、参照系、惯性力

2.1.1 空气阻力作用下的自由落体

下落过程中空气与杯子的相互作用十分复杂。但幸运的是，我们并不需要准确地知道下落过程中的每一个细节。转而可以将复杂的湍流过程在时间积累后的效应等效为一个唯象的空气阻力。一般来说空气阻力是速度的函数 $f(v)$ ，可以写出杯体的运动方程

$$m_{\text{tot}}\ddot{z} = m_{\text{tot}}g - f(\dot{z}) \quad (2.1)$$

其中 m_{tot} 为下落物体总质量。 $z(t)$ 为系统重心竖直坐标， $f(\dot{z})$ 表示阻力，在速度不太大时可将其在 $\dot{z} = 0$ 附近泰勒展开，

$$f(\dot{z}) = \dot{z}f'(0) + \frac{\dot{z}^2}{2}f''(0) + O(\dot{z}^3) \quad (2.2)$$

这里利用了速度为零时阻力为零， $f(0) = 0$ 。根据流体力学知识，当粘性起主要作用时，(2.2)式的线性项对阻力的贡献占主要，当惯性起主要作用时，二次项贡献占主要。

为了判定本实验下落过程的阻力类型，我们采用雷诺数进行估计。雷诺数定义为运动流体的惯性力与粘性力之比，它的大小一般可作为判定主导流体作用的类型的重要依据。根据定义

$$\text{Re} = \frac{\dot{z}L}{\nu} \approx \frac{gtL}{\nu} \quad (2.3)$$

其中 ν 为空气的运动粘度，大小为 $\nu \sim 1.5 \times 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ [1]， t 为下落时间， L 为杯体迎风截面的线性尺度，大小约为 0.1m。在第二个等式中我们取了自由落体近似，即 $\dot{z} = gt$ 。由于系统从静止开始释放，速度不断增加，因此我们分别考虑低雷诺数和高雷诺数起作用的时间，从而判定空气阻力类型。

低雷诺数过程 ($\text{Re} < 1$)。流体粘性起主要作用，空气阻力与速度呈线性关系，即 $f \propto \dot{z}$ 。利用(2.3)式估算，在释放后的 $t \sim 10^{-5} \text{s}$ 内， $\text{Re} \rightarrow 1$ 。这是一个极短的瞬间，在这段时间内体系几乎没有动（比高速摄影每两帧的间隔 10^{-3}s 低两个数量级）。换句话说，低雷诺数过程起作用的时间相比整个下落时间（约 0.4s）是可以忽略的。

高雷诺数过程 ($\text{Re} > 2000$)。流体的惯性起主要作用，阻力与速度平方成正比 $f \propto \dot{z}^2$ 。带入本实验的典型数值得知，在释放后约 $t \sim 3 \times 10^{-2} \text{s}$ 内，

二、碰前过程——杯体下落

$Re \rightarrow 2000$ 。这段时间内杯子下落了约 $gt^2/2 = 15cm$ 。这一距离仍远小于我们所考虑的典型释放高度（约1米）。而雷诺数会随着下落速度的增大进一步变大，从而惯性的作用越来越明显。

由此我们得到结论：（1）在下落过程中，空气阻力的影响主要是由于空气流动的惯性造成的，空气的粘性可以忽略。（2）空气阻力应正比于速度平方，根据 Rieley 理论，空气阻力可以表示为如下形式[1]

$$f \dot{z} \approx \frac{1}{2} \rho_a CS \dot{z}^2, \quad (2.4)$$

其中 C 为空气阻力系数，该值仅与物体表面光滑程度和几何形状有关，它是一个由实验确定的无量纲数，对于我们考虑的杯体形状， $C \approx 1.1$ [1]； ρ_a 为空气密度，标准状况下可取 $\rho_a \sim 1.3kg/m^3$ ； S 为杯体迎风面的截面。此外阻力正比于面积，说明阻力是一种表面力。

(2.1)式定解所用的初条件为自由落体：

$$z|_0 = 0, \quad \dot{z}|_0 = 0. \quad (2.5)$$

综合(2.1)、(2.4)、(2.5)式，可给出下落过程的解析解，

$$z(t) = \frac{2m_{tot}}{CS\rho_a} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{CS\rho_a g}{2m_{tot}}} t \right) \right) = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{CS\rho_a g^2}{24m_{tot}} t^4 + O[t^6] \quad (2.6)$$

为了与自由落体进行对比，在第二个等式中进行了泰勒展开。将 $z(t)$ 对时间求导数可得速度与加速度

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2m_{tot}g}{CS\rho_a}} \tanh \left(\sqrt{\frac{CS\rho_a g}{2m_{tot}}} t \right) = gt - \left(\frac{CS\rho_a g}{6m_{tot}} \right) t^3 + O[t^5] \quad (2.7)$$

$$\ddot{z} = g \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{CS\rho_a g}{2m_{tot}}} t \right) = g - \left(\frac{CS\rho_a g^2}{2m_{tot}} \right) t^2 + O[t^4] \quad (2.8)$$

从(2.6)-(2.8)式可以看出，对于自由落体运动，在时间不太长（速度不太大）的情况下，空气阻力对运动的影响主要由以下参量控制

$$\frac{CS\rho_a g}{2m_{tot}} = \frac{C}{2} \frac{S}{V} \frac{\rho_a}{\rho_{tot}} g \sim \frac{C}{2} \frac{1}{l} \frac{\rho_a}{\rho_{tot}} g \quad (2.9)$$

其中，用到了质量的定义 $m_{tot} = \rho_{tot} V$ ， $l \equiv V/S$ 为顺风方向线性尺度。由(2.9)式我们可以得到空气阻力对自由落体的影响因素：

二、碰前过程——杯体下落

(1) 顺风方向线性尺度 l 。在速度不很高情况下, 阻力对位移、速度、加速度的影响都反比于该尺度。换句话说, 其他参数相同情况下, 物体越长受到阻力的相对影响越小。

(2) 空气密度与物体密度之比 $\rho_a / \rho_{\text{tot}}$ 。下落物体越致密, 受到空气阻力影响越小。

(3) 空气阻力系数 C 。阻力系数越小, 空气阻力影响越小。

2.1.2 空气阻力系数

注意到对于确定的实验对象, 在式(2.6)-(2.8)中, 唯一未知的参数为空气阻力系数 C , 经查阅文献得知, 在理想情况, 对于长圆柱体, $C \approx 0.82$, 对于短圆柱体, $C \approx 1.15$, 由于我们使用的纸杯的形状介于长短圆柱之间, 因此可以估计阻力系数 C 应为1的数量级。对于球体阻力系数约为 $C \approx 0.47$ 。这些数值虽可用于估算, 但对于获得定量结论是不够的。为此我们自行设计实验对空气阻力系数进行了测定。

我们采用的方法是让待测物和参照物(钢球)从高处一同自由下落, 然后用式(7)-(9)的结果对待测参数进行拟合。

具体测量和拟合过程参见附录1。此处只给出结论:

(1) 乒乓球在空气中运动的阻力系数为 $C_b \approx 0.38$, 比文献查到的数值略小。

(2) 杯子在空气中运动的阻力系数 $C_c \approx 1.1$, 与估计的数值接近。

以下数值演算中均采用我们自行测量的实验数值。

2.1.3 参照系与惯性力

分析下落过程时, 采用随杯子共同下落的非惯性参照系是方便的。在无阻力情况下, 物体受惯性力与重力相等。存在阻力时, 惯性力应小于重力, 方向竖直向上。因此惯性力和重力的合力竖直向下, 大小等于空气阻力。

在随动参照系下, 空气阻力是系统在运动中所受的净力。

2.2 浮力消失、乒乓球被“吸入”水中

释放时刻，整个体系处于完全失重状态，重力与惯性力抵消，因此浮力消失，乒乓球会在表面张力作用下被“吸入”水中，如图6b所示。随着下落加快，系统所受空气阻力越来越大，这将导致惯性力减小，整个系统所受合力向下，大小为空气阻力，这一过程浮力会慢慢的增加，乒乓球又会逐渐浮出水面，如图4c。本节将建立这一过程的乒乓球的动力学模型，并将结果与实验进行对比。

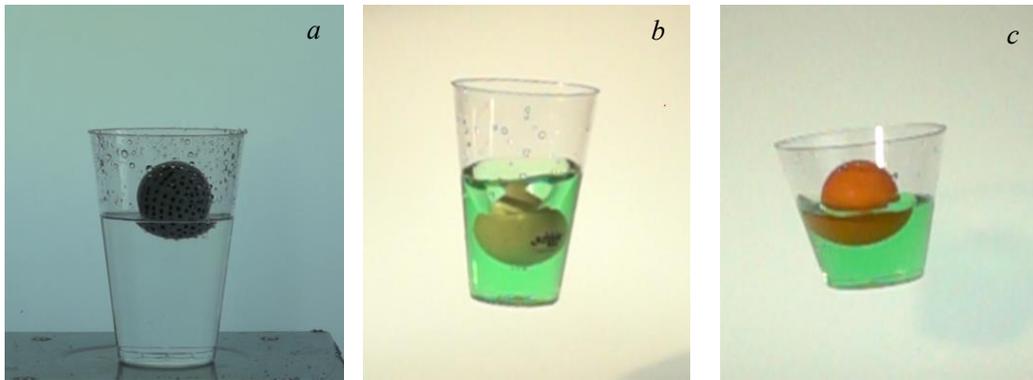


图6：利用高速摄影捕捉到下落过程中乒乓球被“吸入”水中，随后又浮出水面的现象。**a.**未释放状态下，乒乓球仅有小部分浸没在水中；**b.**释放后系统失重，浮力消失，乒乓球在0.1s-0.2s内被迅速“吸入”水中；**c.**在下落一段时间后，随着空气阻力增加，浮力会逐渐增加，乒乓球再次渐渐浮出。

在下落过程中乒乓球受力包含重力，惯性力，浮力和表面张力，如图7所示。通过本节最开始部分的数量级估计，下落过程中表面张力将占据主导，其他三种力大小在同一数量级皆不可忽略。

如图7以乒乓球刚刚接触水面的位置为原点建立坐标系，根据牛顿第二定律，可以写出乒乓球在杯体随动参照系下的动力学方程

$$m_b \ddot{z} = m_b g - F_{\text{inert}} \hat{z} - F_{\text{bouy}} \hat{z} + F_{\text{surf}}^z \hat{z}, \quad (2.10)$$

其中 $F_{\text{surf}}^z \hat{z}$ 表示表面张力的竖直分量， F_{bouy} 表示浮力， F_{inert} 表示惯性力。除重力外，其余三个力都与乒乓球下落的速度（位置）有关。下面分别计算各力的具体形式。

二、碰前过程——杯体下落

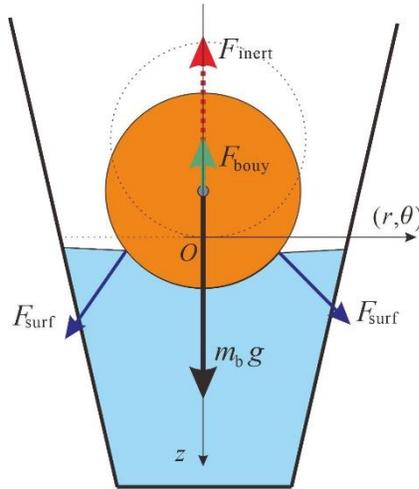


图7：下落过程乒乓球受力情况。

➤ 惯性力 F_{inert}

在2.1.3节中，我们已经讨论了惯性力大小与参照系选取以及空气阻力大小的关系。体系在空气中下落，竖直方向上惯性力和重力的合力大小应等于空气阻力，方向向下。由表1的估算可知，在1米高度下落的实验中，在着地之前，空气阻力大小与重力大小只比约为1:10，因此是不可忽略的，乒乓球受到的惯性力大小为

$$F_{inert} = m_b a_{inert} \quad (2.11)$$

其中惯性加速度 a_{inert} 可由精确解(2.8)式求出。

$$a_{inert} = g \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{CS\rho g}{2m_{tot}}} t \right) \approx g - \left(\frac{CS\rho_a g^2}{2m_{tot}} \right) t^2 \quad (2.12)$$

(2.11),(2.12)式说明，惯性力不随着乒乓球与杯子的相对位置 z 变化，只是下落时间的函数。

➤ 浮力 F_{bouy}

浮力是一种效果力，它本质上是由于静止流体的压强沿重力方向增加而导致的。释放后，体系整体加速度由空气阻力决定。根据帕斯卡定律，液体内压强分布 p_w 与空气阻力引起的加速度成线性关系，

$$p_w(z) = p_0 + \rho_w (g - a_{inert}) z, \quad (2.13)$$

其中 ρ_w 为水的密度， $g - a_{inert}$ 为系统整体加速度， p_0 为水面上方的大气压强， z 为乒乓球的浸没深度。

二、碰前过程——杯体下落

根据阿基米德定律，乒乓球所受浮力大小应为

$$F_{\text{bouy } z} = \rho_w g - a_{\text{inert}} V z, \quad (2.14)$$

其中 $V z$ 是淹没在水面下的球冠体积

$$V = \frac{\pi z^2}{3} (3R - z), \quad (2.15)$$

其中 R 为乒乓球半径。由(2.12)式可知

$$g - a_{\text{inert}} = \frac{f v}{m_{\text{tot}}} \approx \frac{\rho_a C S g^2 t^2}{2m_{\text{tot}}}. \quad (2.16)$$

结合(2.14)-(2.16)式，浮力大小为

$$F_{\text{bouy } z} = \rho_w \rho_a \frac{\pi C S g^2 z^2}{6m_{\text{tot}}} (3R - z) t^2. \quad (2.17)$$

这一结果说明浮力与两个因素有关：1，系统下落的时间；2，乒乓球被“吸入”液体的深度。

➤ 表面张力 F_{surf}

如图8所示，乒乓球所受表面张力沿接触线圆周呈轴对称分布，因此对动力学有贡献的只有其竖直分量。

假设液体与球面的接触角在运动过程中始终保持不变。根据几何关系应有

$$F_{\text{surf } z} = \frac{2\pi\gamma\sqrt{2Rz - z^2}}{R} \left[\sqrt{2Rz - z^2} \cos\theta + R - z \sin\theta \right], \quad (2.18)$$

其中 γ 为水的表面张力系数，在常温下，其数值为 $\gamma = 7.2 \times 10^{-2} \text{N} / \text{m}$ 。 θ 为接触角。 α 为水平方向与接触点和圆心连线的夹角。

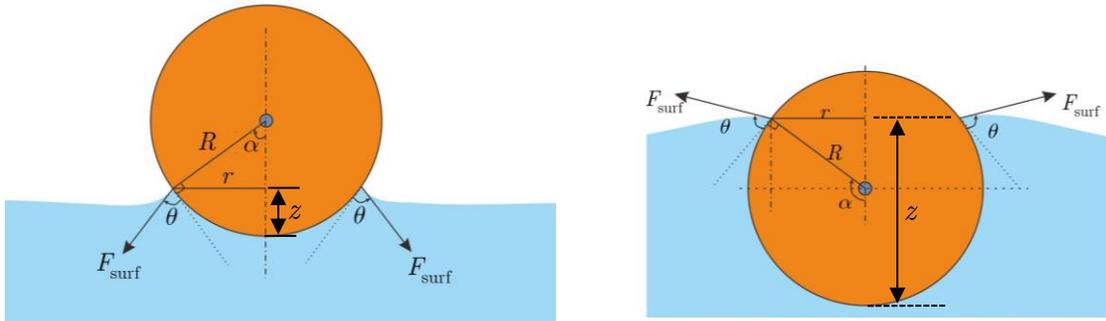


图8：乒乓球所受表面张力示意图。表面张力的方向随浸没深度的增加方向发生了改变。

二、碰前过程——杯体下落

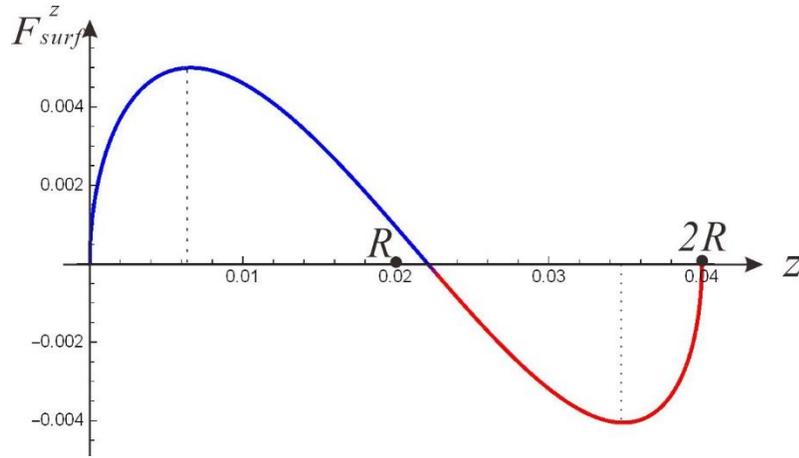


图9: 表面张力竖直分量 F_{surf}^z 随浸没深度的变化。可以看到, 在浸没略超过一半时, 表面张力会产生方向的变化。

综合(2.10)-(2.18)式, 我们最终给出乒乓球的运动方程为

$$m_b \ddot{z} = \frac{1}{2} \frac{m_b}{m_{tot}} \rho_a C S g^2 t^2 - \rho_w \rho_a \frac{\pi C S g^2 z^2}{6 m_{tot}} \frac{3R - z}{t^2} + \frac{2\pi\gamma\sqrt{2Rz - z^2}}{R} \left[\sqrt{2Rz - z^2} \cos\theta + R - z \sin\theta \right], \quad (2.19)$$

这是一个二阶非线性、非自治常微分方程。

(2.19)式的初始条件可由静力学给出。设释放前, 乒乓球静止在水面上, 浸入水中深度为 z_0 , 由受力平衡条件:

$$m_b g - \rho_w g V_{z_0} + F_{surf}^z(z_0) = 0, \quad (2.20)$$

其中 V_{z_0} 是静止时浸没在水中的体积。初速度为零

$$\dot{z}(0) = 0, \quad (2.21)$$

方程(2.19)-(2.21)所表示的初值问题没有解析解, 我们带入实际系统的各个测量参数进行了数值计算。

在方程(2.19)中, 有一个数值对结果影响较大, 即接触角 θ , 为了能够准确的测出该值, 我们采用两种方案对其进行了测定。

方法1: 直接测量, 我们对乒乓球进行了破坏, 取局部浸入水中, 利用显微镜进行接触角测量, 如图10所示。多次测量后得到接触角平均值约为 $\theta \approx 88^\circ$

二、碰前过程——杯体下落

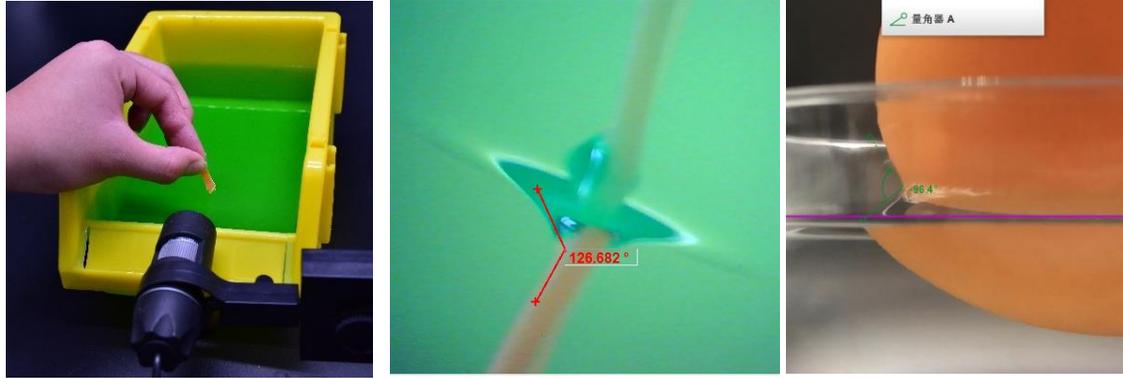


图10: 直接测量接触角(方法1)。取乒乓球局部碎片插入水中, 利用SIYOO500高清电子显微镜对乒乓球与水的接触角进行测量, 多次测量取平均值后, 我们得到接触角平均值大小约为88度。

方法2: 简介测量。将(2.15), (2.18)式代入(2.20)式, 我们可以给出接触角满足的方程

$$m_b g - \rho_w g \frac{\pi z_0^2}{3} \frac{3R - z_0}{R} + \frac{2\pi\gamma\sqrt{2Rz_0 - z_0^2}}{R} \left[\sqrt{2Rz_0 - z_0^2} \cos\theta + R - z_0 \sin\theta \right] = 0, \quad (2.22)$$

除浸没深度 z_0 外, 其余参数均为直接测量或查表得到, 因此只要准确测定 z_0 , 即可由(2.22)式反解出接触角。测量结果如表2所列, $\theta \approx 84^\circ$

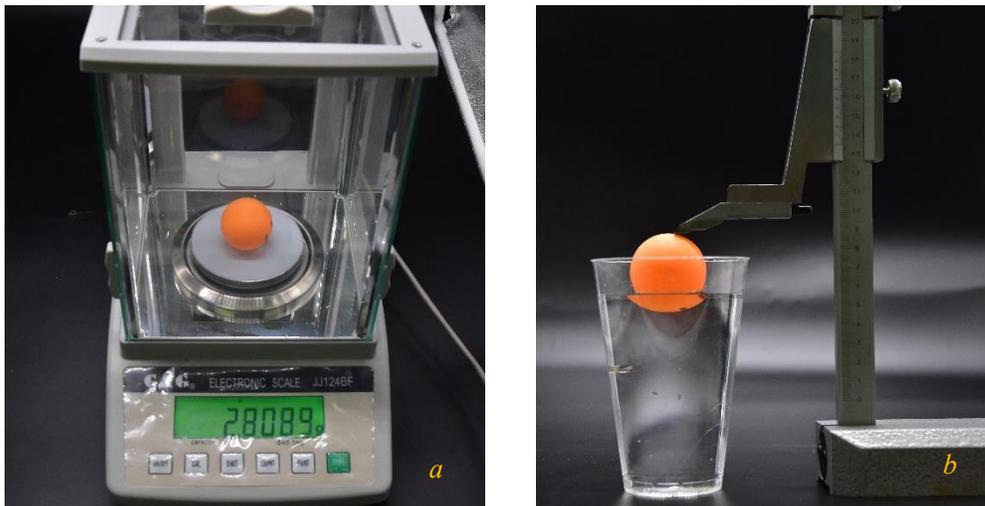


图11: 间接接触角测量(方法2)。a. 用分析天平(精度 10^{-4} g) 测量乒乓球质量。b. 通过高度游标卡尺测量乒乓球的浸没深度。代入(2.22)式反算出接触角。

二、碰前过程——杯体下落

表2: 利用静力学条件(2.22)式测量接触角数据

球顶距地高度	134.22mm	液面高度	102.00mm
乒乓球直径	40.00mm	浸没深度 z_0	7.78mm
乒乓球质量	2.81g	重力加速度g	9.80m/s ²
水密度 ρ_w	10 ³ kg/m ³	表面张力系数	7.2 × 10 ⁻² N / m
计算接触角 θ	84°		

这里需要特别指出，由于接触角在动态情况下是不断变化的[2]，即便静态情况下测量出的接触角也会随着浸没时的初始条件变化而产生较大差异。因此我们将接触角不变作为一个理论假设是难以避免的简化。

为了验证方程(2.19)-(2.21)的正确性，我们将测量数据代入，对其进行了数值求解。求解的结果见图12-1。

下落中乒乓球的浸没应分为四个阶段

t_0-t_1 阶段，浮力、惯性力由零开始缓慢增加，表面张力在此过程占据绝对主导，其效果为以近 $1.5m/s^2$ 加速度将球迅速的吸入水中。

t_1-t_2 阶段，随着浸没深度的增加，表面张力减小直至反向，此过程中浮力，惯性力的作用越来越明显。三者共同作用使乒乓球在液体内部减速，直至停止下潜。

t_2-t_3 阶段，在浮力和表面张力共同主导下，乒乓球又开始快速浮出水面

t_3-t_4 阶段，随着乒乓球浮出水面，表面张力再次反向增加，再次将乒乓球拉回。

整个过程随着空气阻力增大，惯性力随时间单调递增。最终乒乓球的运动将变得平稳。

二、碰前过程——杯体下落

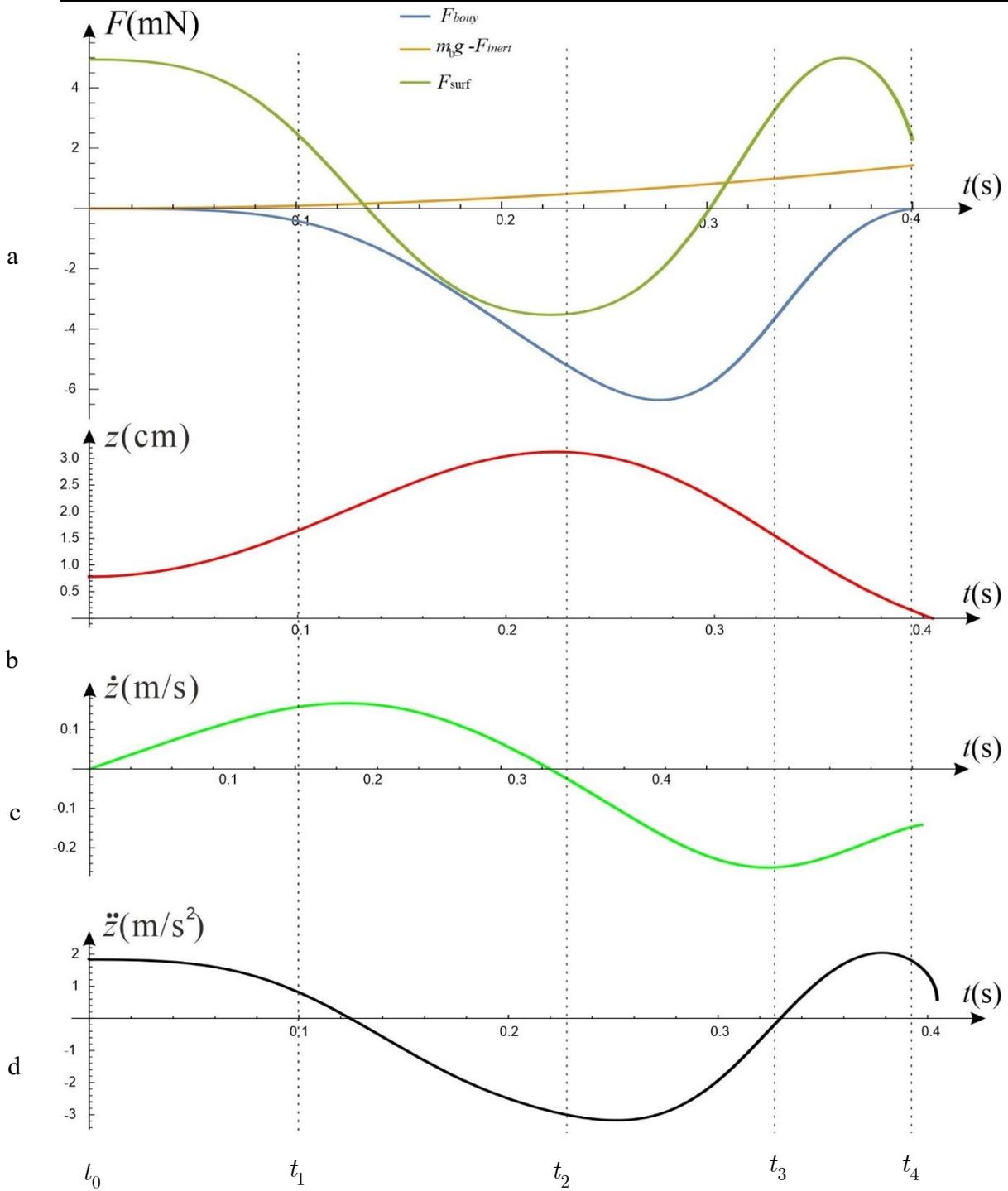


图12-1：下落过程乒乓球动力学变量与时间的关系。a. 下落过程中乒乓球受力随时间变化。b. 乒乓球相对液面位置随时间的变化。c. 乒乓球速度随时间的变化。d. 乒乓球加速度随时间变化。在初始释放的约0.1s内，表面张力主导了乒乓球的运动，将其快速“吸入”液体。随着乒乓球浸没深度增加，浮力逐渐占据主导，而表面张力的方向也会转变，从而使乒乓球减速，直至又一次浮出。重力与惯性力之差随着速度的增加而线性的增大，这会让乒乓球最终在水中趋于稳定。

二、碰前过程——杯体下落

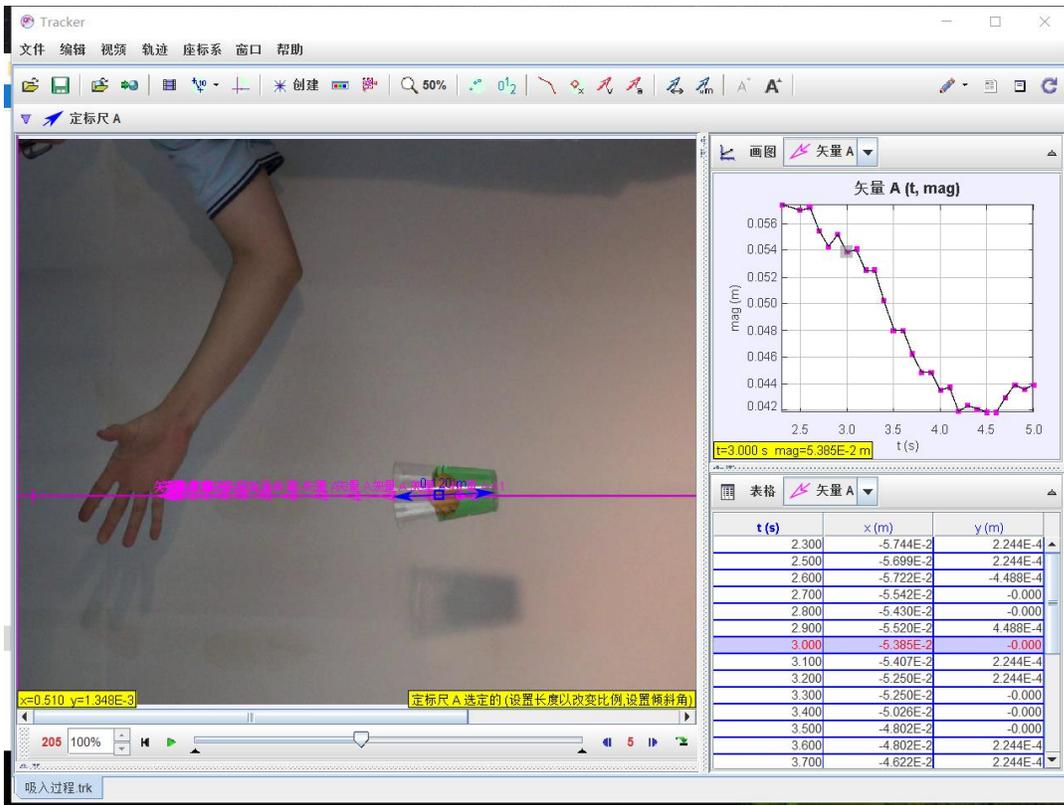


图12-2: 下落过程乒乓球的浸没实验观察。明显观察到乒乓球的浸没与再次浮出的现象。

在实验上, 我们测量了一次下落过程中乒乓球底部距离杯底的距离随时间的变化。验证了图12-1-b中乒乓球的快速下潜然后又重新浮出水面的理论, 这说明本节的理论模型是有效的, 如图12-2所示。由于采用了高速摄影, 因此图中的时间尺度比实际时间变慢了40倍。在重新定标后, 与理论吻合的较好。

在实验中, 我们并没有观察到 $t_3 - t_4$ 以及后续的振荡过程, 这是因为我们的理论模型中并没有考虑水对乒乓球的阻力作用, 该力会使乒乓球的下潜和上浮更快速的达到稳定, 因此在后续的理论中应该将其考虑在内。然而即便是模型较为理想化, 我们仍得到了绝大部分想要的定性乃至定量结论。

最终在碰撞前一刻, 乒乓球始终有少部分在水面以上, 这是我们在实验上观察到的该阶段的典型特征。后面我们会看到, 正是乒乓球的浸没为其加速反弹蓄积了能量, 可以说浸没现象的出现与碰撞前浸没程度大小很大程度上决定了反弹加速的比例。

2.3液面形貌分析与控制

下落过程液面的形貌决定了后续碰撞过程的初条件，从而对能否成功实现加速反弹产生决定性的影响。在实验上我们发现，如果释放时让水绕杯子对称轴有一定的转速会比静止释放的成功率高近一个数量级。我们认为，这是由于水的运动改变了下落过程液面的形貌（水的分布），从而对碰撞过程初条件产生影响。因此本节就这两种情况进行分析和讨论。

2.3.1 “贴壁”效应与液面形貌

在实验时，放入乒乓球并自由下落后，几乎每一次都会出现乒乓球无法稳定漂浮在液体中央的“贴壁”现象。这种现象对后续碰撞过程的成功率影响极大，通常会导致乒乓球射出时碰壁而失败，如图13所示。

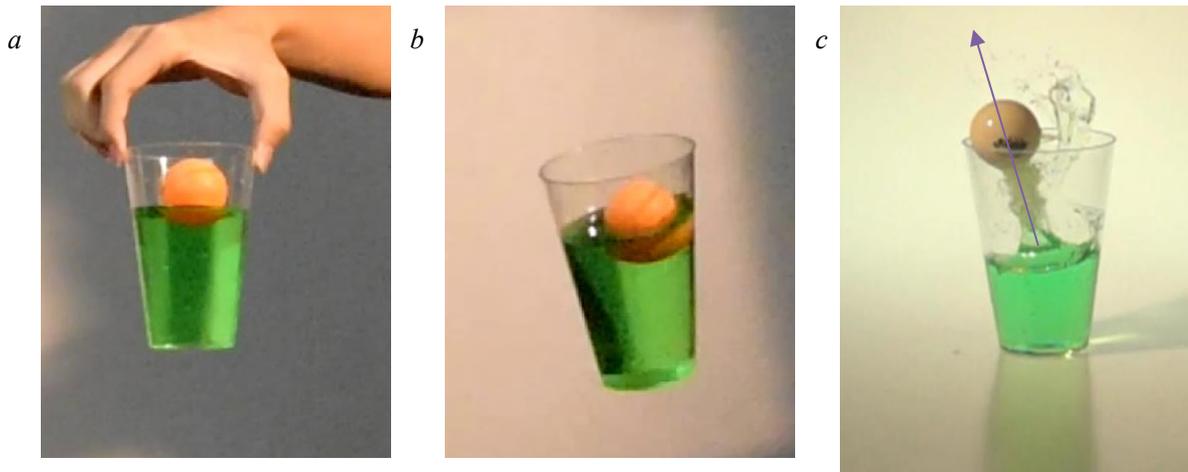


图13：“贴壁”效应。**a**，初始状态，乒乓球稳定在水中央；**b**，下落过程，乒乓球向边缘移动直至贴壁；**c**，贴壁会造成乒乓球反弹时速度方向变化，经常会因撞击杯壁造成加速反弹失败。

事实上，即使是静止放置的一杯水，乒乓球也很难稳定在中轴线上，我们认为这是由于表面形貌导致的。

在随杯体下落的参照系中，水可以视为静止流体。根据流体静力学理论，静止液体表面形貌决定于表面张力和界面内外的压强差，二者的关系由Young-Laplace方程控制[3]

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + a, \quad (2.23)$$

其中 p_1, p_2 分别为界面某点的内压强和外压强， R_1, R_2 为该点的主曲率半径， a 为系统加速度。(2.23)式给出了两种流体界面上的压差与各点曲率半径之间的关系。

二、碰前过程——杯体下落

对于一般含边界的流体来说, 该方程的求解需要较为复杂的微分几何知识。

我们考虑的情况属于微重力情况 (见2.1节对惯性力的分析), 可以进一步的将方程写为

$$\text{const} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{g - a_{\text{inert}} \rho}{\gamma}, \quad (2.24)$$

对于轴对称系统, 静力学表面形貌方程 $z(r)$ 可以表示为[4]

$$\frac{z''(r)}{1 + z'(r)^2} + \frac{z'(r)}{r} = \frac{a_{\text{inert}} \rho z(r)}{\gamma}, \quad (2.25)$$

此方程实际上就是轴对称毛细现象的液面方程, 不同的仅为重力加速度一项。虽然不存在解析解, 但可以通过已有的一些毛细现象的结论进行定性讨论。如图14所示, 与常见的毛细管液面形貌类似, 下落过程的液面形貌与接触角和杯体开口尺寸有关。在重力下, 液面基本上是平的。当释放开始后, 由于失重, 表面张力起主要作用, 液面会比重力下起伏略微增大, 但整体趋势未产生变化。其区别仅仅体现为方程(26)中的加速度 a_{inert} 和重力加速度 g 的不同。

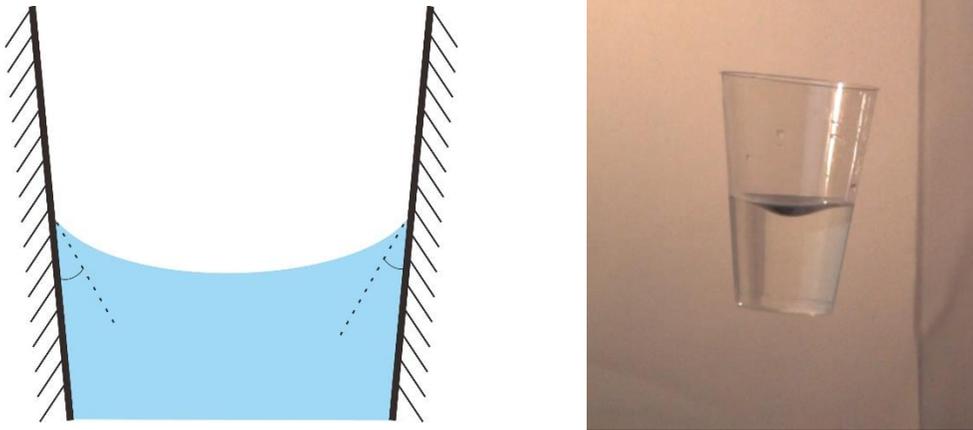


图14: 自由下落液体的表面形貌。中心下凹, 两边上升, 与静止毛细表面在趋势上相同, 起伏略大。

在类毛细表面的液面形貌下, 乒乓球在径向主截面上所受到的表面张力必会产生一个从圆心指向边缘的合力, 从而造成乒乓球向外移动, 如图14所示。

我们可以进一步将向外移动的动力学求解出来。然而由于这对我们后续研究

二、碰前过程——杯体下落

碰撞过程并没有直接关系，因此我们不在此进一步展开讨论。

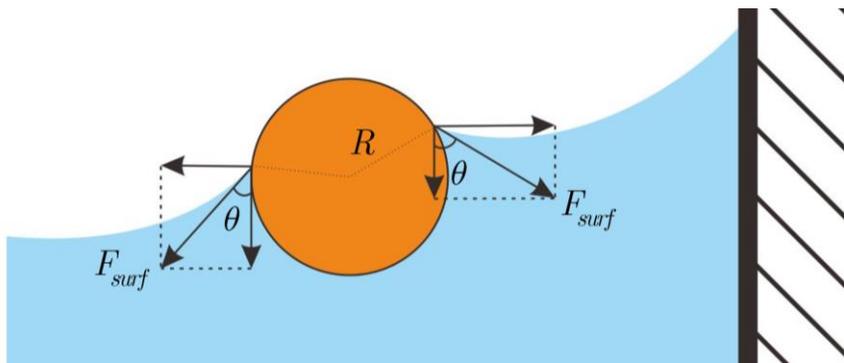


图15：附壁效应产生的原因。由于左右表面张力的不对称，造成向边缘靠拢的净力。

综上所述，静止水体自由下落时表面形貌与初始形貌类似，皆为中间下凹两边隆起。由于表面张力沿径向分布不对称，乒乓球会在水平合力作用下由轴心向杯壁靠拢，从而引起乒乓球在反弹过程中的倾斜和碰壁，导致加速反弹的失败。因此必须寻求其他方法解决此问题。

2.3.2 旋转的水液面形貌及其对下落过程的影响

为解决“贴壁”现象，并增加成功率，我们决定采用以下方案：将水和乒乓球沿杯体对称轴旋转然后再一起下落。这样做一方面可以控制水面在下落过程中下凹的形状及深度，进而在中心形成稳定平衡点。另一方面，在外力矩很小的情况下，水体和乒乓球基本上能够保持角动量守恒，使系统对扰动的响应更小，且为负反馈。

为了验证这种方法的可行性，我们在1米的释放高度下进行了50组对比试验（见表3），发现以下事实

- (1) 反弹的成功率随着水量的增加而递减。
- (2) 在相近条件下，旋转流体反弹成功率高于静止流体情况2-6倍。
- (3) 在50ml组，10次实验全部成功。

为解释这些实验现象，我们下面建立模型探究失重旋转流体的行为，尤其关注其液面形貌。

二、碰前过程——杯体下落

表3: 不同水量静止与旋转加速反弹成功次数对比

	50ml	75ml	100ml	120ml	150ml
静止、10组实验成功次数	4	2	1	1	0
旋转、10组实验成功次数	10	8	6	5	2

失重旋转流体的运动应满足纳维斯托克斯方程(NS方程)。然而, 由于复杂的边界条件和初始条件, 几乎不可能从方程中获得有用的信息。另一方面, 下落过程中液体的旋转速度场随时间和位置的演变对研究本问题是冗余的, 我们只关心碰撞发生前液面的稳定形貌, 并以此作为碰撞过程的初条件。

因此我们对旋转流体液面形貌问题进行了合理的简化。(1), 假设旋转液体只有层流, 在液面稳定后, 体系各点的流速在共动旋转参照系下保持不变。(2), 液面形貌稳定后, 忽略液体粘度。(3) 忽略杯体边界作用, 只考虑中心附近位置的形貌。在此简化下, 可以列出旋转流体满足的NS方程,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\
 \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z - g - a_{\text{inert}},
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 v_r, v_φ, v_z 为柱坐标下速度场的三个分量, r 为距离中心轴的距离, ρ 为水的密度, p 为流体内部压强, ν 为液体的动力粘度。

速度场 \mathbf{v} 应满足不可压缩流体的连续性方程[4]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{2.27}$$

对于最终不随时间变化的稳定状态, 层间不存在摩擦, 因而可以直接写出速度分布

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = r\Omega, \quad v_z = 0, \tag{2.28}$$

可以验证, 它们自然地满足连续性方程(2.27)。将这组速度带入方程(2.26)进行化简

二、碰前过程——杯体下落

$$\rho r \Omega^2 = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - a_{\text{inert}}, \quad (2.29)$$

最终得到压强与位置的关系为

$$p = \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 - \rho (g + a_{\text{inert}}) z, \quad (2.30)$$

当体系处于准平衡状态时，液面上压强等于常数，即 $p = \text{const}$ 。于是最终得到稳定的曲面的方程为

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\rho (g + a_{\text{inert}})} \left(\frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 - p \right) \\ &= \frac{2m_{\text{tot}}}{\rho_w \rho_a C S g^2 t^2} \left(\frac{1}{2} \rho_w r^2 \Omega^2 - p \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

其中第二个等式利用了(2.16)式。(2.31)式给出的是抛物面方程，其具体形貌由转速、大气压强、截面积、总质量共同决定。

在实验中我们观察到，从释放时刻起很短的时间内，液面会大幅度下凹，在中心形成一个准抛物面，这与理论预言吻合的较好。旋转和大幅下凹的液面很好的保证了乒乓球在实验过程中始终稳定在轴心附近，从而增加了反弹加速的成功率。

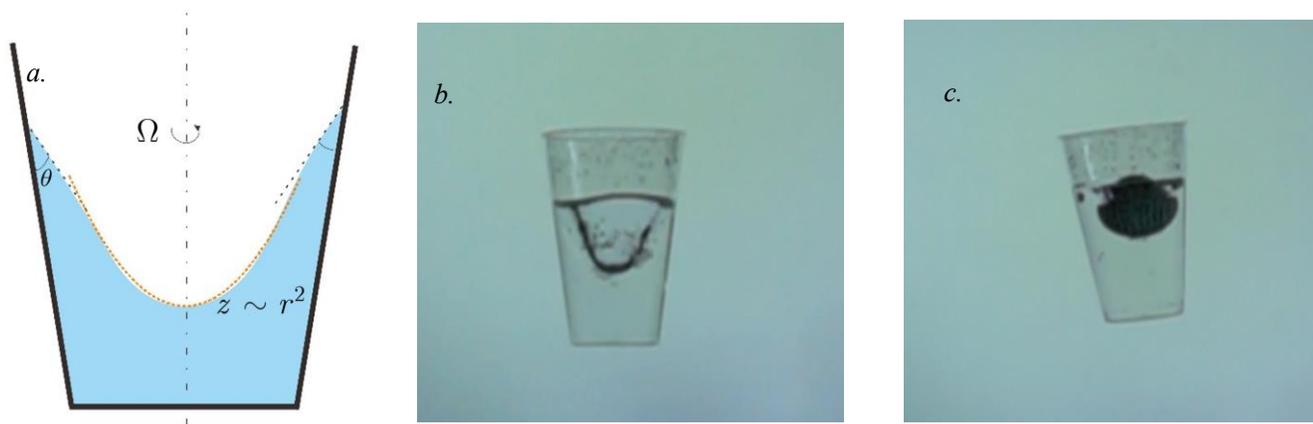


图16: 旋转液面的形貌。a. 液面形貌在中心附近近似为抛物面。b. 自由下落旋转液体，液面大幅度下凹。c. 旋转和下凹的液面有效的避免了“贴壁”效应的产生。

2.4 杯体下落的稳定性问题

在预实验阶段，我们用手释放杯子，发现在下落过程中，杯体总会存在一定程度的倾斜，因而很难保证杯子底部竖直着地，从而影响反弹的成功率，如图16所示。

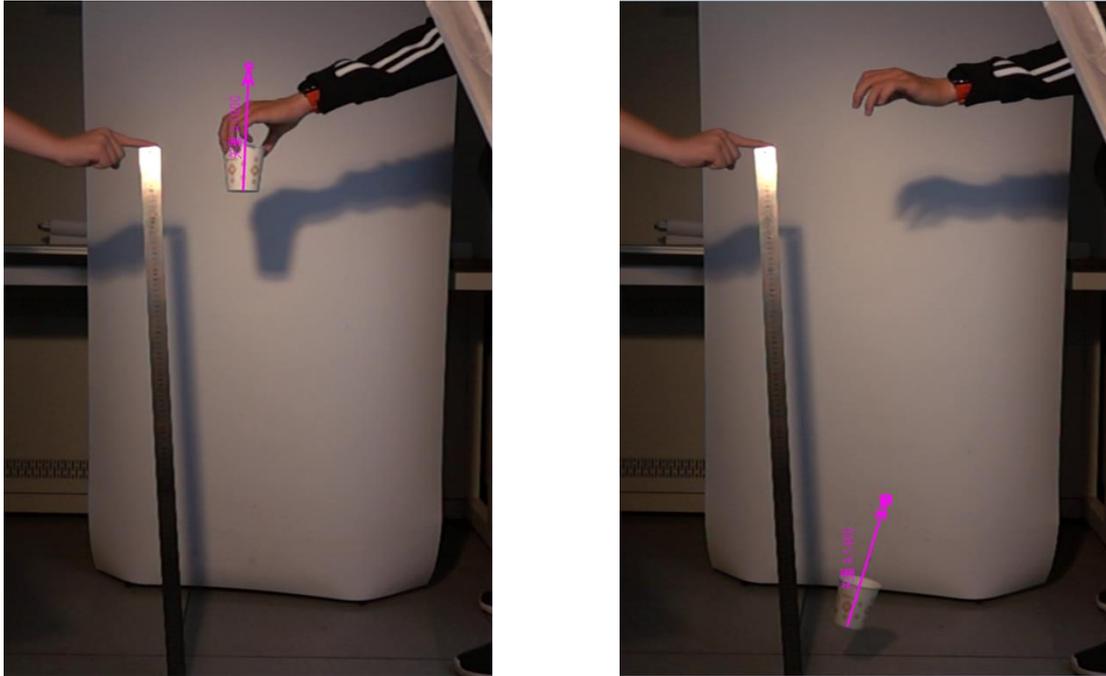


图 17：杯体被释放后，不论初始时刻竖直与否都无法确保下落时的轴线的竖直性，这会对实验成功率产生很大的影响。

起初我们认为倾斜是由于实验操作粗糙造成的。然而通过多次重复实验观察，我们发现，杯体在下落过程中的不稳定性并非人手释放操作失误所致，而是必然出现的效应，因此可能存在更深层次的原因。图18展示了从5米高度下落过程中杯体倾角的变化，我们观察到明显的周期性摆动，且摆动周期随下落速度的增加而加快，但摆角保持不变。

为明确杯体不稳定的原因，我们将其简化为圆柱进行建模，受力情况见图19。以实验室作为参照系，系统下落过程只受重力和空气阻力。设水杯下落过程中，其轴线与竖直方向夹角为 α ，水体表面始终保持水平。当杯体发生倾斜时，若空气阻力和重力不在一条直线上，则必会产生一个力矩。当力矩与倾斜方向同向，其效果将是使杯体更加倾斜，当力矩与倾斜方向相反则会造成平衡位置的振荡。

二、碰前过程——杯体下落

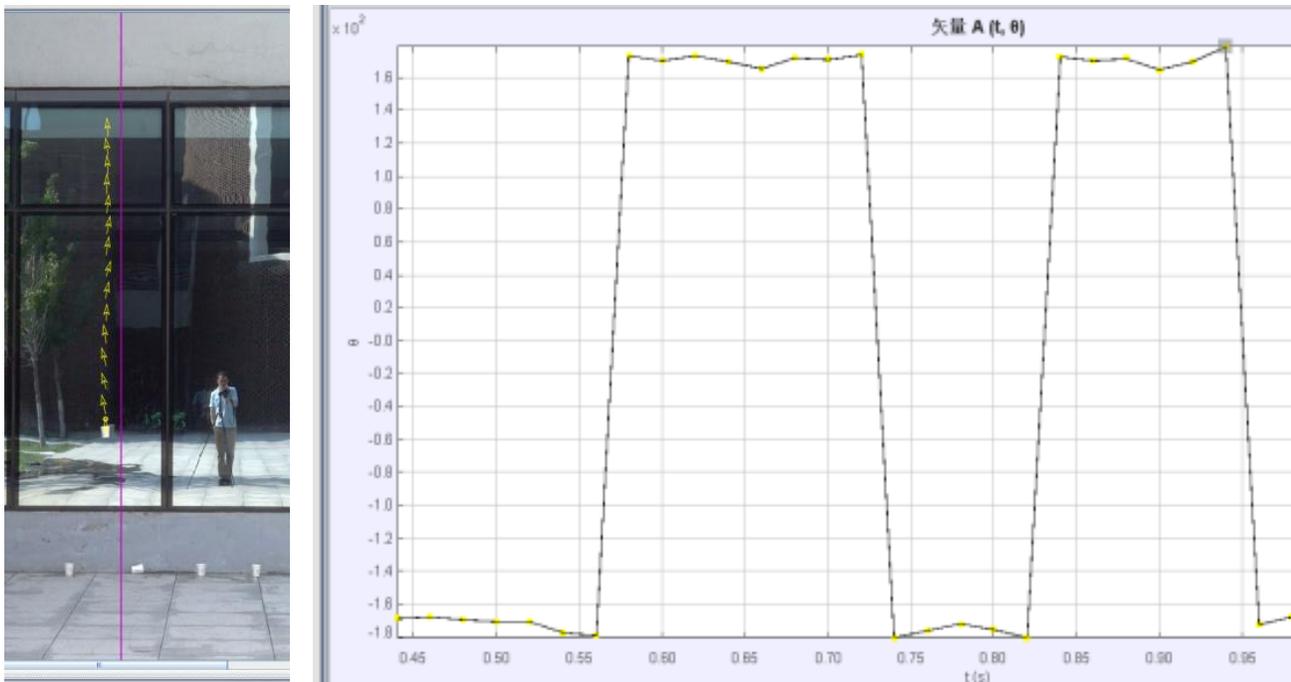


图18: 将盛水杯子于5米左右高度释放下落。可以明显观察到杯子的倾角左右摆动, 说明体系下落过程受到一个周期力矩。

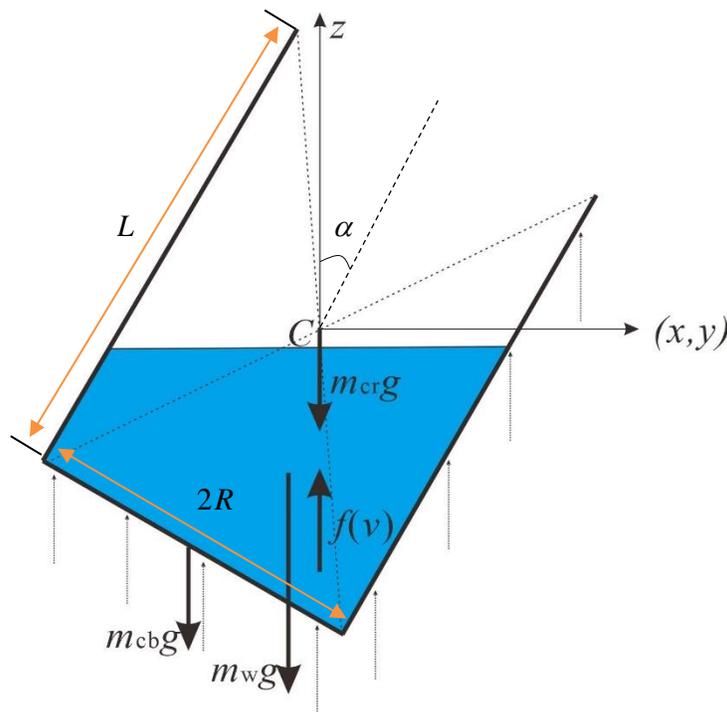


图19: 系统下落过程受力。将水和杯壁分开考虑。杯壁重力 $m_{cr}g$ 和空气阻力 $f(v)$, 都通过杯体几何中心。此时若存在 α 角度的倾斜, 那么体系重心的横坐标将随着水的重心位置变化而的偏移, 最终导致形成力矩。

二、碰前过程——杯体下落

下面我们计算杯体下落过程中所受的重力和空气阻力形成的合力矩。根据几何关系，空气阻力作用点始终为杯子的几何中心 C ，如图18所示，选取该点为坐标原点，建立直角正交坐标系。假设系统下落的任意时刻液面都保持水平，并假设空气阻力均匀的作用在杯体表面，则阻力的作用线也将通过杯体的几何中心 C 。

接下来问题简化为计算杯底和水的重心位置。根据定义，而这合重心位置水平坐标和竖直坐标分别为

$$X = \frac{m_{cb}x_{cb} + m_w x_w}{m_{cb} + m_w}, \quad (2.32)$$

$$Y = \frac{m_{cb}y_{cb} + m_w y_w}{m_{cb} + m_w}, \quad (2.33)$$

其中 m_{cb} 为杯底质量， $(x_{cb}, y_{cb}), (x_w, y_w)$ 分别为杯底和水的重心坐标。

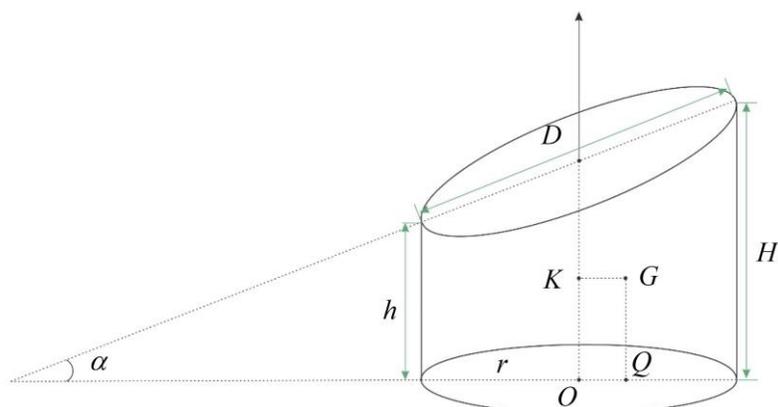


图20: 倾斜水体重心的计算。图中 G 为待求重心。

杯底重心位置可以通过几何关系得到

$$\begin{pmatrix} x_{cb} \\ y_{cb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \alpha \\ -\frac{1}{2} \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

水体可以等效为一个斜截的圆柱,如图20所示。重心的位置可以通过初等办法或微积分计算得到[5]。重心相对轴心和杯底的位置分别为

$$|GQ| = \frac{H+h}{4} + \frac{r^2 \tan^2 \alpha}{4(H+h)}, \quad (2.35)$$

$$|GK| = \frac{r^2 \tan \alpha}{2(H+h)}. \quad (2.36)$$

二、碰前过程——杯体下落

$$V = \frac{\pi}{2} r^2 (H + h), \quad (2.37)$$

水的总质量为

$$m_w = \frac{\pi}{2} r^2 (H + h) \rho_w, \quad (2.38)$$

其中 ρ_w 为水的密度。于是水体重心的水平坐标为

$$x_M = -\frac{L}{2} \sin \alpha + \left(\frac{GQ}{\tan \alpha} - GK \right) \tan \alpha \sin \alpha + \frac{GK}{\cos \alpha}, \quad (2.39)$$

将(2.34)和(2.39)代入(2.32)得到杯底与水的合重心水平坐标,

$$X = \frac{1}{m_w + m_{cb}} \left[\frac{-m_{cb} L \sin \alpha}{2} + \frac{\pi r^2 (H + h) \rho_w}{2} \left(-\frac{L}{2} \sin \alpha + \left(\frac{GQ}{\tan \alpha} - GK \right) \tan \alpha \sin \alpha + \frac{GK}{\cos \alpha} \right) \right], \quad (2.40)$$

当 $X > 0$ 时, 系统将倾斜, 当 $X < 0$ 时, 系统将受到一个回复力矩, 并由于水的惯性而左右摆动。图21展示了(2.40)式在实际实验中的数值结果。我们发现在 $[-\pi/3, \pi/3]$ 的倾斜范围内, 重心位置 X 始终与倾角变化反号, 这说明系统倾斜后将受到一个回复力矩, 若不考虑能量的耗散, 杯子的轴向将始终左右摆动。

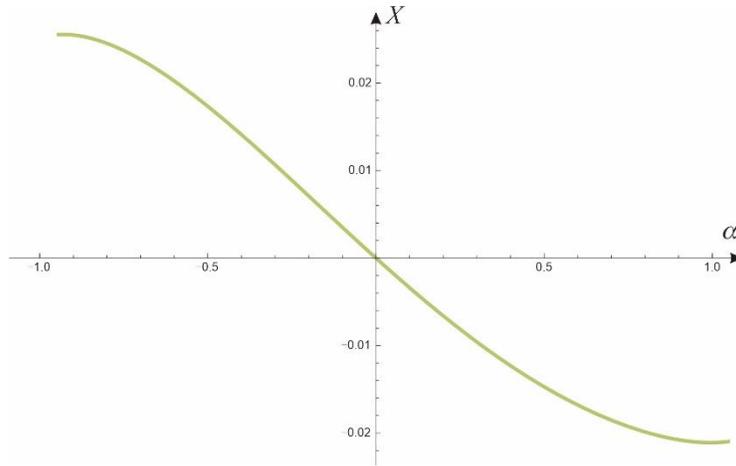


图21: 杯底和水的总重心位置随倾角的变化。(2.40)式的数值计算图像, 除倾角外的参数皆取实际实验测量值。

在实验中, 我们确实观察到摆动情况。力矩可以通过摆动频率测定。为了解决摆动造成的落地倾角不确定性, 我们仍采取了旋转流体的办法, 因为转动会增加系统在轴向上的稳定性。

2.5 小结

下落过程作为后续碰撞的初条件对于本问题具有重要意义，我们通过高速摄影观察到了这一过程的许多不平凡的现象。如乒乓球由于系统失重而被“吸入”水中。下落时，液体的形貌变化及其导致的乒乓球的“贴壁”现象，还有下落过程中的摆动。这些现象对加速反弹的成功率具有很大的影响。本节对于这些问题的理解与分析对于后续碰撞过程以及定量实验的改进具有较高的参考价值。

本节的一个重要结论是，在释放前，将流体转动起来会极大的提高后续碰撞的成功率。其原因一方面是旋转流体可以在下落过程中使乒乓球稳定在轴心，避免贴壁，另一方面可以用转速控制液面形貌，以此改变后续碰撞过程中的初条件。此外旋转流体还能使杯体在下落过程中减小左右摆动，保证杯体竖直着地。因此以下讨论全部建立在旋转流体基础之上。

三、碰撞过程

碰撞过程发生在极短的时间，涉及到的物理过程不仅有不可压缩流体的惯性运动，还有水与杯体以及乒乓球之间的流固耦合。在理论上，该问题可以获得解析结论的可能性很小，即便是进行数值模拟，边界条件的选取也将十分复杂。

因此我们将研究对象集中在乒乓球上，而将难以描述和解决的流体问题在时间上进行平均。忽略碰撞时刻短暂的动力学细节，仅从作用效果上考虑乒乓球的受力。从而将该问题简化为一个一维动力学问题。

3.1 实验观察

由于流体的存在，碰撞过程的时间比刚体的碰撞拉长了许多。在1000fps帧率的高速摄影下，从碰撞开始到完成共经历了14帧，共计14ms。因此我们仔细观察了碰撞的全部过程，并以此为依据进行理论建模。

在碰撞前，乒乓球有部分露出水面。碰撞开始后，乒乓球浸没到水中，然后向上浮起，直至弹出，如图22所示。



图22：碰撞过程。1000fps高速记录，每两帧截图。整个过程历时14ms。

3.2 弹起过程动力学

在下落阶段，我们观察到浮力的消失使乒乓球几乎浸没到了水中。在杯底接触地面后，乒乓球先浸没到水中，然后被逐渐加速到水面，这一过程中，杯内的液体由于重力作用重新产生了浮力，此外乒乓球周围流体速度的改变会带来一个额外的压强同样对浮力产生贡献。我们认为正是浮力在这一过程中的作用使乒乓球被加速至远大于触地的初始速度。

3.2.1 碰撞过程流体内压强分布

通过实验观察我们发现，中心部分流体在碰后速度反向。与此同时，杯体稳定在碰撞表面处，液体内部应同时具有重力方向的压差。

由于流动的复杂性，三维压强分布的细节很难用速度场描述，但由于我们只关心竖直方向的行为，因此可以借助欧拉方程，分析压强随在竖直方向的分布

$$\frac{\Delta v_z}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} + g, \quad (3.1)$$

其中 $\Delta v_z = v_0 - 0$ 和 $\Delta t = 14\text{ms}$ 都可以由实验数据获得。式(3.1)可以简单的解出。

$$\bar{p}_z = \rho \left(g + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) z \quad (3.2)$$

这里我们对速度在时间上做了平均化处理，仅考虑了碰撞初始时刻和碰撞结束时刻的速度差 Δv_z ，并没有考虑速度随时间变化的细节。且由于是不可压缩流体，我们近似认为竖直方向速度与位置无关，仅与时间有关 $v_z(z, t) = v_z(t)$ ，这就像如图23所示的U型管模型。

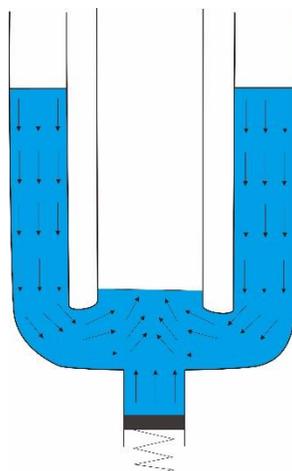


图23：浸没加速过程加速。将流体行为简化为边缘向中心的填充过程，乒乓球在浮力作用下先减速后加速上升。

三、碰撞过程

这样做的好处是忽略了动力学细节，简化了计算，整体效果上是在重力之上叠加了一个冲力形成的压强。

我们可以对此压强的大小进行估计。系统从1m高度下落，触地前速度约为4.4m/s，此速度在16ms时间变为零，期间平均加速度约为

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \sim 275 \text{ m} / \text{s}^2 = 27.5g \quad (3.3)$$

即流体从触底到静止产生的加速度是重力加速度的27.5倍，因此流体运动产生的附加压强将在后续乒乓球动力学中占据主导作用。

3.2.2 第一阶段——乒乓球浮出水面之前

在初始状态下，乒乓球大部分浸没在水中。在杯底与地面接触后，水将停止下落并产生复杂的流动过程，而乒乓球会由于惯性继续下潜，并在浮出水面之前在浮力、重力和阻力的共同作用下产生反弹。在这一过程中重力和浮力均可近似视为恒力。这一阶段，边缘的液体会迅速的填充中心部位，并短暂的将乒乓球淹没。我们将这一过程抽象为如图24所示的填充过程。

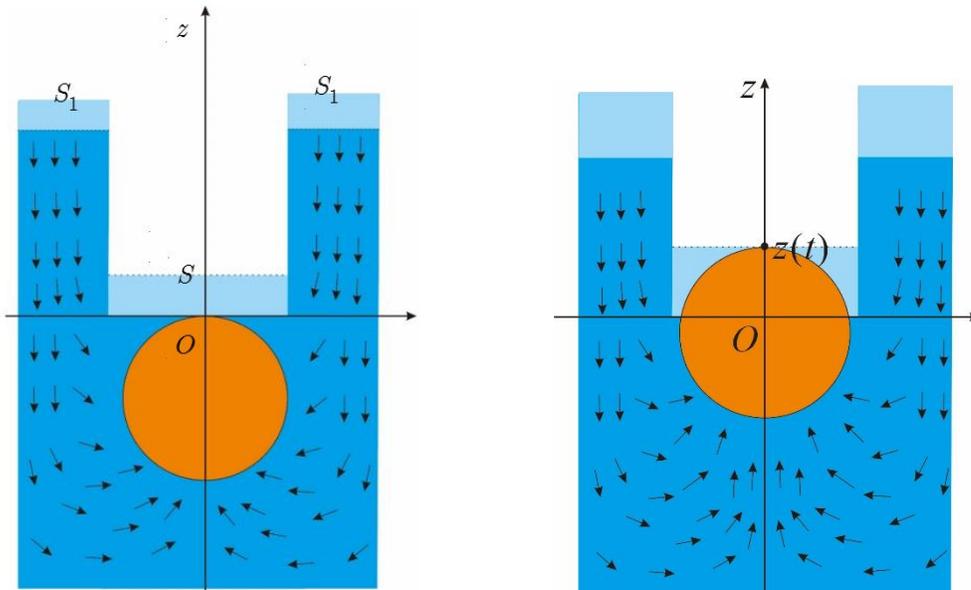


图24：浸没过程加速模型。将流体行为简化为边缘向中心的填充过程，乒乓球在浮力作用下先减速后加速上升直至浮出水面。

乒乓球在这一过程的运动可以分成两个阶段，第一阶段，乒乓球由于惯性下潜，速度为零后加速至与流体等速，此阶段动力学方程和初条件分别为

三、碰撞过程

$$m_b \ddot{z} = \rho_w \left(g + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) V_b - m_b g + \frac{1}{2} \rho_w C_b S \dot{z} - v_1^2, \quad (3.4)$$

$$z|_0 = 0, \quad \dot{z}|_0 = -v_0, \quad (3.5)$$

其中 V_b 是乒乓球的体积。最后一项为乒乓球相对水的运动的阻力, v_1 表示中心部位水的流速。

第二阶段, 乒乓球继续在浮力作用下向上加速, 此时流体会提供阻力作用, 此阶段方程和初条件分别为

$$m_b \ddot{z} = \rho_w \left(g + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) V_b - m_b g - \frac{1}{2} \rho_w C_b S \dot{z} - v_1^2, \quad (3.6)$$

$$z|_{t_0} = z_0, \quad \dot{z}|_{t_0} = v_1, \quad (3.7)$$

其中 t_0 是第一阶段的末时刻, z_0 是第一阶段末时刻的位置, v_1 为该阶段的初始速度, 方向向上。

下面确认中心部位的流速, 由于水的不可压缩性, 根据简化模型 (图24), 以及连续性方程应有

$$v_1 = \frac{S_1 v_0}{S}, \quad (3.8)$$

其中 S_1 为边缘部分液体的截面面积, S 为中心部分未填充面积。

假设在 τ 时刻, 乒乓球顶部再次达到与液面齐平, 这一阶段液面上升距离为

$$v_1 \tau = z|_{\tau}, \quad (3.9)$$

综合方程(3.4)-(3.9), 我们可以解出乒乓球浮出水面前一时刻的末速度, 这一方程存在解析解, 但形式较为复杂, 我们采用了数值结果进行分析。结果如图24所示, 乒乓球从浸没到再次浮出水面分为3个阶段:

O-a, 乒乓球初始时刻速度为系统落地时刻速度。由于惯性作用, 乒乓球会经历短暂的下潜, 直至速度衰减为零。此过程时间极短, 仅有0.0006s左右, 在我们的1000fps的高速摄影中约半帧的时间。下潜的深度约为1mm。这一过程由(3.4)和(3.5)式进行描述, 其末状态速度衰减为零。这一过程中, 我们发现由于碰撞造成的系统内压强梯度很大, 对乒乓球产生的加速度在初始时刻接近10000 m/s², 然后迅速的衰减。

a-b, 乒乓球达到最低点后, 在浮力、重力和阻力的共同作用下迅速上浮。在0.0012s后 (约1帧), 被加速到与初始时刻相同速率, 此时速度方向竖直向上。这

三、碰撞过程

一阶段加速度持续衰减，动力学仍满足(3.4)和(3.5)式。

b-c, 乒乓随后被在三力的作用下继续加速，直至浮出水面前一时刻。这一过程，水的阻力较上一过程反向，因而加速度比前两个过程小了很多，此过程满足的动力学方程为(3.6)和(3.7)式。

在浮出水面时刻，乒乓球被加速到9.5m/s。约为落地时速度大小的2.5倍。可见整个碰撞加速过程是在这一阶段完成的。由O-c共历时约0.004秒，在视频中合计4帧。这些数值与我们的实验观察吻合的非常好。说明我们建立的模型是有效的。

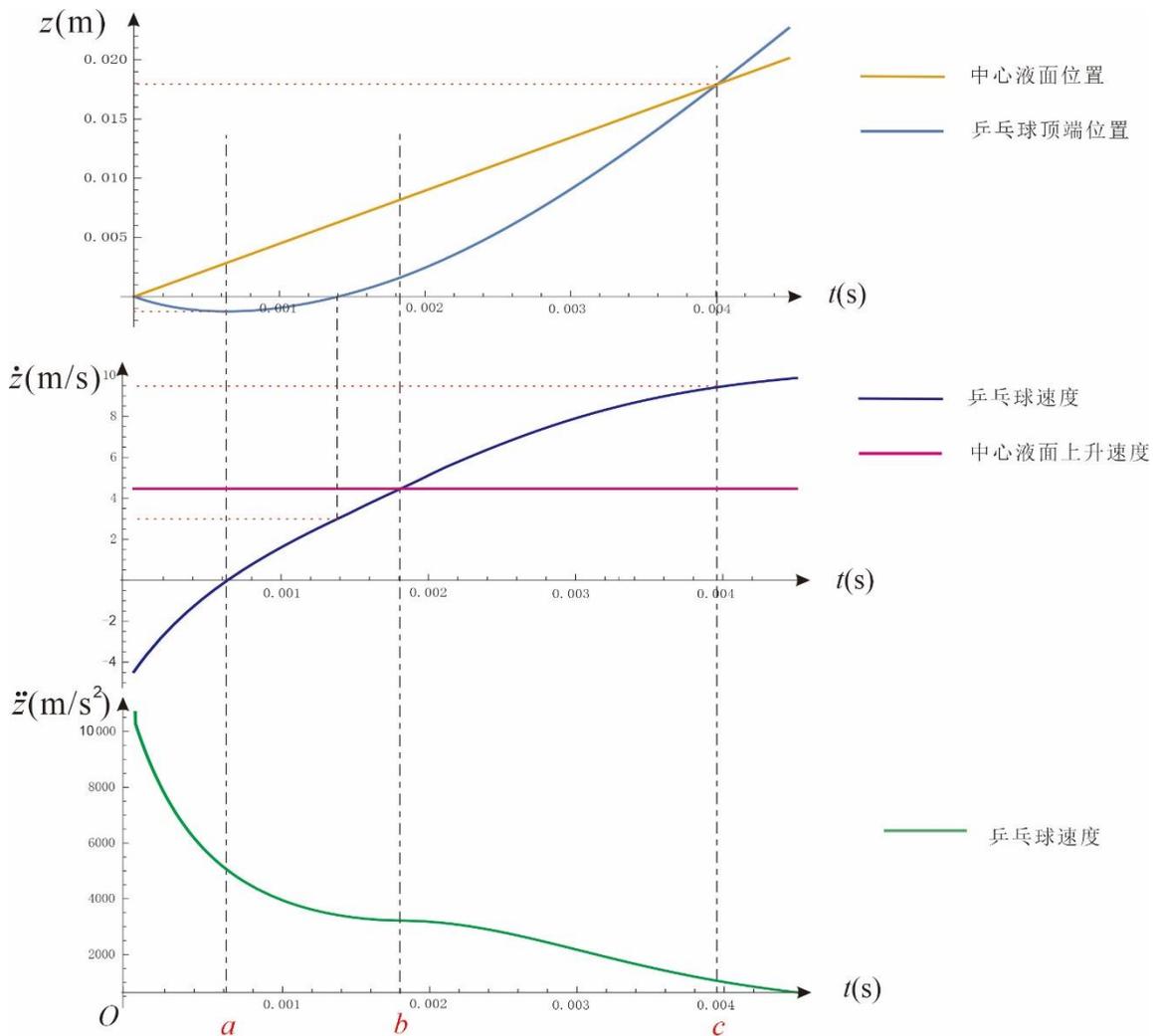


图25: 数值计算结果: 由系统触地开始至乒乓球再次浮出水面的动力学过程。运动分为三个阶段: O-a, 下潜; a-b, 加速上浮直至与水等速; b-c, 继续上浮直至浮出水面, 整个过程约0.004s, 在1000fps帧率高速摄影中可捕捉到4帧图像。

3.2.3 第二阶段——浮出水面至与水脱离

在乒乓球浮出水面后，液面继续变化，乒乓球会经历一个较第一阶段略微缓和的二次加速过程。如图重新建立坐标系，并重新选择时间零点。

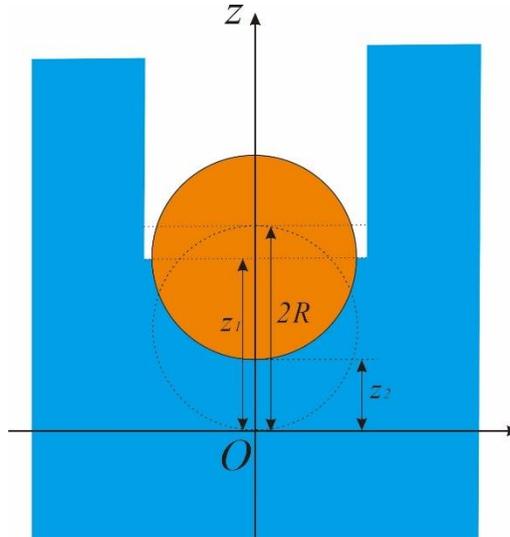


图26：浮出水面后加速过程。坐标系和动力学参量。

乒乓球满足的动力学方程和初条件分别为

$$m_b + m^* \ddot{z}_2 = \rho_w \left(g + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) V_d - m_b + m^* g + F_{\text{surf}}, \quad (3.10)$$

$$z|_0 = 0, \quad \dot{z}|_0 = v_2, \quad (3.11)$$

其中 z_1, z_2 分别为液面和乒乓球底部距离坐标原点的高度， v_2 是第一阶段的末速度。方程(3.10)的最后一项是表面张力。阻力作用被等效为附加质量 m^* 。 V_d 是乒乓球在水面下的体积。根据球冠体积公式

$$V_d = \frac{\pi}{3} (z_1 - z_2)^2 [3R - (z_1 - z_2)] \quad (3.12)$$

表面张力可根据(2.18)式得到

$$F_{\text{surf}} = \frac{2\pi\gamma\sqrt{2R(z_1 - z_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}}{R} \times \left[\sqrt{2R(z_1 - z_2)^2 - (z_1 - z_2)^2} \cos\theta + R - (z_1 - z_2) \sin\theta \right] \quad (3.13)$$

由于乒乓球的不断浮出，液面位置产生变化，导致液面上升的速率有所减缓，根据不可压缩流体质量守恒

三、碰撞过程

$$S_1 v_0 = S \dot{z}_1 t - \frac{dV_d}{dt} \quad (3.14)$$

液面位置变化的初条件为

$$z_1|_0 = 2R, \quad \dot{z}_1|_0 = \frac{S_1 v_0}{S}, \quad (3.15)$$

假设体系加速到受力为零时结束, 此时应满足

$$m_b + m^* g = \rho_w \left(g + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) V_d + \frac{2\pi\gamma\sqrt{2R(z_1 - z_2) - (z_1 - z_2)^2}}{R} \left[\sqrt{2R(z_1 - z_2) - (z_1 - z_2)^2} \cos\theta + R - (z_1 - z_2) \sin\theta \right] \quad (3.16)$$

(3.10)-(3.15)式是一组二元二次二阶非线性常微分方程组, 形式复杂, 无法获得解析解。我们带入实验数据进行计算, 结果如图27所示(运算过程列在附录2中)。在0.004s的时间内, 乒乓球从浮出水面的一刻起仍经历加速过程, 此过程中的动力学变量都随着时间单调变化。最终速度由9.5m/s被二次加速至12.2m/s左右。此时已是落地时速度(4.42m/s)的2.76倍, 在下一节我们将看到, 这与我们后续的测量结果吻合的非常好。

3.3 小结

总体来看, 整个碰撞过程的能量损失仅在第一阶段乒乓球在水内运动的阻力中产生, 可以数值估计其大小约为乒乓球初始动能的1/5, 正是这部分能量损耗以及浮出水面后的附加质量阻碍了更多的机械能转化为乒乓球的动能。

对乒乓球而言, 阻力的作用是耗散, 其余各力都是保守的, 本不应存在加速反弹。由第一阶段的加速分析可知, 能够被加速的根本原因是下落过程由于失重造成的浸没, 浸没造成了能量的蓄积, 并在在碰撞中被释放出来。因此如果水量不够多, 不能让乒乓球有效的浸没将会影响反弹的加速比率。这一点我们也在第5节进行了验证。

总之, 一系列复杂的流体作用使水杯和水在效果上与一刚体的弹性碰撞接近。

三、碰撞过程

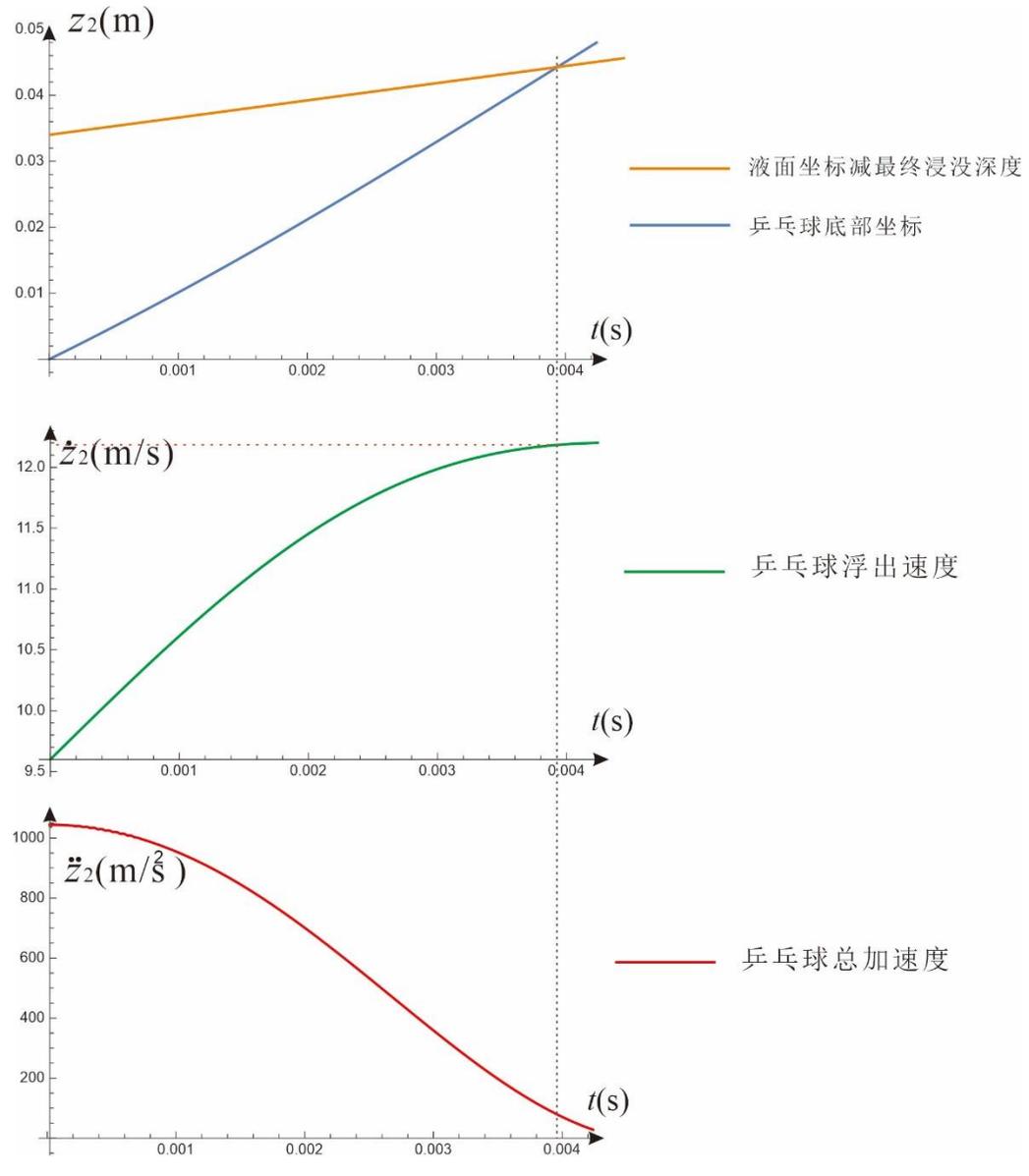


图27: 乒乓球浮出水面后的二次加速过程。整个过程历时约0.004s, 在视频中记录4帧。

四、反弹过程

乒乓球从水面弹出后, 与水脱离, 在重力和空气阻力作用下做上抛运动。按照理想情况估计 ((1.1)式), 由一米高度下落反弹最高可达9米 (3倍原速度)。即使考虑空气阻力, 反弹距离也将远高于我们实验室高度 (不足3米), 因此我们采用测量初速度并利用空气阻力和重力来反算乒乓球能够到达的最大高度。

对于反弹过程, 乒乓球受到重力和空气阻力的共同作用, 这与杯体下落情况一致。参照2.1节的讨论, 乒乓球的动力学方程和初条件为

$$m_b \ddot{z} = -m_b g - g \dot{z} \quad (4.1)$$

其中 $g \dot{z}$ 为乒乓球在空气中飞行所遇到的阻力, 根据2.1节, 阻力与速度近似为二次关系

$$g \dot{z} \approx \frac{\rho_a C_b S}{2m_b} \dot{z}^2 \quad (4.2)$$

其中 $C_b \approx 0.38$ 为实际测定乒乓球的空气阻力系数 (附录1中给出了测量的数值), S 为乒乓球截面积。

以反弹的起始点为坐标原点, 设反弹后脱离的初速度为 v_f , 则初条件可以表示为

$$z|_{t=0} = 0, \dot{z}|_{t=0} = v_f \quad (4.3)$$

(4.1)和(4.3)式所代表的初值问题具有精确解

$$\begin{aligned} z|_t &= -\frac{m_b^2}{C_b S \rho_a} \left\{ \ln \left[1 + \frac{C_b S \rho_a v_f^2}{2g m_b^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \ln \left[\cos \left(\frac{\sqrt{C_b S \rho_a g}}{\sqrt{2m_b}} t - \arctan \sqrt{\frac{C_b S \rho_a}{2g}} \frac{v_f}{m_b} \right) \right] \right\}, \\ &\approx v_f t - \left(\frac{g}{2} + \frac{C_b S \rho_a v_f^2}{4m_b^2} \right) t^2 + O(t^3), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}|_t &= -\frac{\sqrt{2g m_b}}{\sqrt{C_b S \rho_a}} \tan \left[\frac{\sqrt{C_b S \rho_a g}}{\sqrt{2m_b}} t - \arctan \frac{\sqrt{C_b S \rho_a} v_f}{\sqrt{2g m_b}} \right] \\ &\approx v_f - \left(g + \frac{C_b S \rho_a v_f^2}{2m_b^2} \right) t + O(t^2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

当 $\dot{z}|_t = 0$ 时, 达到最大高度,

四、反弹过程

$$z_{\max} = \frac{m_b^2}{C_b S \rho_a} \ln \left[1 + \frac{C_b S \rho_a v_f^2}{2g m_b^2} \right], \quad (4.6)$$

除反弹后初速度 v_f 外, 其余参量均为常数。通过一些参数控制可以给出在最后飞起过程对最终高度的影响。在 v_f 不变的前提下, 弹起高度与 $m_b^2 / C_b S \rho_a$ 是单调递增关系。也就是说, 在最后的的过程中, 减小截面积 S , 减小空气密度 ρ_a , 增加乒乓球质量, 在相同的反弹速度下会增加最终反弹高度。

通过以上的理论模型并配合实验测量, 我们得到了乒乓球反弹过程运动的精确解。这一结果使我们实验的最后阶段被大大简化——我们可以用反弹的起始速度代替最大高度。

五、实验与优化

5.1 实验装置优化与改进

在大量预实验后, 为了精细观察实验现象, 验证理论模型, 我们搭建了两套定量测量系统, 一套用于测定速度比 (图28a), 另一套用于精细观察下落以及碰撞过程的局部特征 (图28b)。

为了能够观察到运动的各个细节, 我们采用了 $n = 1000$ fps帧率的高速摄影, 然而帧率的增加却造成了测量相对误差的增大(详见5.4节讨论)。为此我们将每一帧的曝光时间缩短到 $1/8000$ s以减小记录误差, 但缩短曝光时间势必会造成记录画面曝光不足, 使噪点增多, 从而影响图像清晰度。为此, 我们采购了多个低频闪高功率视频灯 (每组300W节能灯泡) 进行照明, 最终获得了较为理想的动力学视频。



图28: 定量实验系统。a. 反弹速比测定系统; b. 下落过程、碰撞过程局部观测系统。

为了确保下落的竖直, 我们定制了亚克力圆筒, 刚好能确保一次性纸杯能够在其中竖直滑落 (图29a), 此外为了避免用手释放带来影响, 我们用3D打印制作了一个释放器以确保每次实验的初始条件一致 (图29b)。



图29: 释放装置。a. 定制亚克力管恰能保证杯子以低阻力滑落。b. 3D打印释放卡止装置, 能减小释放时的人为扰动, 保证释放时体系左右平衡。

五、实验与优化



图30: 水量, 释放高度, 转速对比实验。a, 不同参量的记录标签; b. 非牛顿流体碰撞面; c. 蹦床碰撞面和瑜伽垫碰撞面。

释放时刻初始转速影响下落过程形貌, 进而影响碰撞过程的加速时间。由于杯壁与流体之间的粘性作用, 流体转速一定沿径向存在分布。而乒乓球尺寸与杯子的直径尺寸相当, 因此讨论流体某个局部的转速对整个问题的意义不明显。我们还是更为关注转速在空间上平均(整体)变化。

我们注意到, 转速必定随着时间增加而衰减。因而我们采用时间来代表整体转速的变化。从将旋转装置从水中拿出的一刻起开始计时, 分别记录4s-7s释放后的反弹速比, 如图31所示。

五、实验与优化

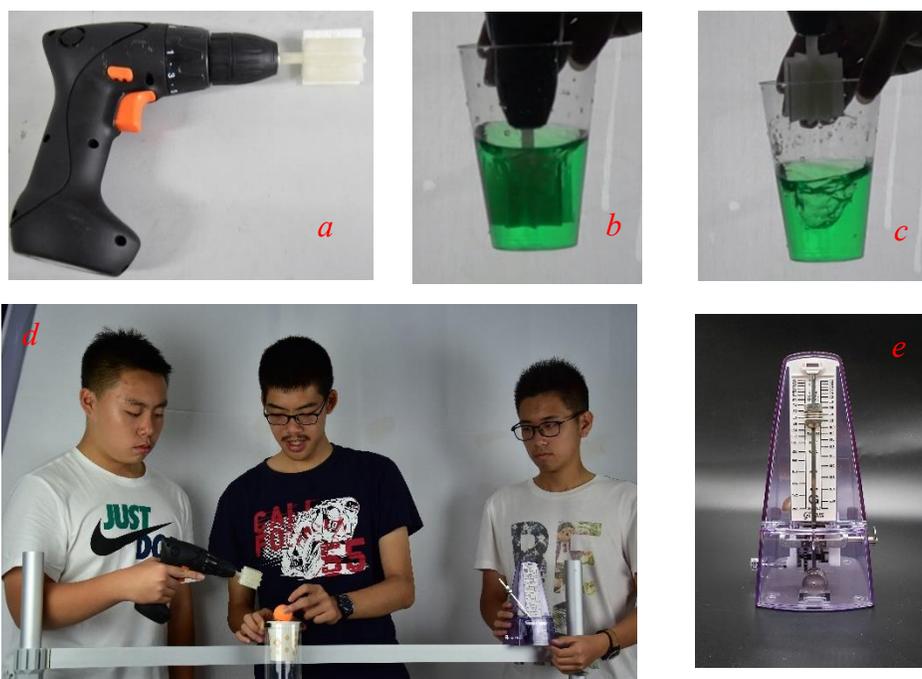


图31：转速控制。a，采用IKEA（FIXA 7.2V）锂电电钻，3D打印转子搅动。b,c，搅拌过程与停止搅拌。d，从停止搅拌时刻及时，以此代替初始释放时刻转速。e，计时装置。

5.2 定量实验结果

我们进行了多组对比实验以及定量实验。找到了最佳反弹速度比率及其对应的实验条件。

1, 不同接触面对比实验。

表5.1: 75ml不同碰撞面对比试验

碰撞面	地面	瑜伽垫	非牛顿流体	蹦床	水
最大反弹加速比	1: 2.7	1: 2.5	1: 2.4	1: 1.4	不能反弹
平均反弹加速比	1: 2.3	1: 2.3	1: 1.8	1: 1.2	

除了地面以外, 我们采用了软性的瑜伽垫, 淀粉配制的非牛顿流体, 弹性的蹦床以及水作为系统碰撞的界面。得出如下结论: (1) 硬质的地面碰撞效果反弹加速比最好, 原因是接触时间短, 造成流体内压强更大从而能让乒乓球更快速的从液体中浮出(见式(3.1)), 减小摩擦损失。(2) 软性接触面(如瑜伽垫、非牛顿流体)接触时间较长, 但仍能在有效时间内使杯子静止下来, 形成加速, 但由于作用时间变长, 使得内压强比硬质地面情况略小, 影响了反弹加速比。(3) 软质弹性接触面(蹦床), 其接触反弹时间远大于流体在碰撞过程的典型时间, 此时主导乒乓球浮力的压强贡献将大大减小, 从而极大的降低反弹比率, 且影响成功率。

(4) 水。水是流体, 本质上与空气相同, 仅提供阻力作用, 其减速时间远远大于其他几种情况, 因此整个动力学行为将不符合我们第3节建立的模型, 在实验上也无法形成反弹。

总之, 接触面影响的是碰撞过程的作用时间, 接触面越硬, 接触时间越短, 内压强就越大, 反弹加速比将越大。

2, 不同水量下落加速比(相同高度, 相同转速)

表5.2: 1m高度成功率、速比对比实验

水量	50ml	75ml	100ml
10次下落反弹成功率	10	8	3
最大反弹加速比	1: 1.8	1: 2.7	1: 2.3

五、实验与优化

平均反弹加速比	1: 1.6	1: 2.3	1: 2.1
---------	--------	--------	--------

实验中我们采用的杯子是7盎司（200ml）一次性纸杯，在一米高度，撤出搅拌器4s情况下的对比不同水量反弹的加速比。我们能得到以下结论：（1）在50ml水量情况下，实验最容易成功，但是加速比最小。我们认为这是由于水量过少不足以让乒乓球在下落过程完全浸没，从而不存在3.2.2节描述的第一阶段这一主要加速过程。（2）水量在75ml时达到最佳反弹速比——接近理想弹性碰撞和3.2节的理论模型预测。（3）100ml水量过大，会造成碰地过程杯壁的塑性形变，损失一部分压强的贡献。事实上，在100ml水量情况下，我们有许多实验都因为杯底破裂而失败。

总之，水量刚好能够浸没乒乓球时反弹速比将达到最佳。水量较少时会增加成功率。

3. 不同高度下落的加速比（相同水量，相同转速）

表5.3: （75ml、撤出搅拌器4s）不同高度加速比实验

释放高度	0.75m	1m	1.25m
最大反弹加速比	1: 2.2	1: 2.7	1: 2.4
平均反弹加速比	1: 1.8	1: 2.2	1: 2.1

我们发现在一定范围内，存在最佳加速比。下落高度过低时，初始下凹页面尚未稳定形成，且乒乓球还未充分的浸没到水中（见第2.2节讨论）就发生了碰撞，因此会影响反弹的加速比。当下落高度过高时，空气阻力以及碰撞过程的阻力会增加系统的能量耗散，造成加速比减小。

总之我们实验中给出的最佳加速比下落高度为1m左右。

五、实验与优化

4, 不同转速加速比对比实验 (1m高度, 75ml水量)

表5.4: (75ml, 1m高度下落) 不同转速速比实验

撤掉转动时间	4s	5s	6s
最大反弹加速比	1: 2.7	1: 2.1	1: 2.0
平均反弹加速比	1: 2.3	1: 1.9	1: 1.8

在实验中, 我们采用撤出搅拌器后计时来代表系统的平均转速。我们发现, 在我们能够控制的范围内, 反弹加速比随着转速的降低而减小, 即转速和加速比单调正相关。这是因为在下落阶段, 页面沿壁上升的最大高度与转速是正相关的, 因此较大的转速在碰撞前一刻其边缘页面的初始高度更高, 在加速过程中产生的压强也更大更持续。

因此在液体稳定旋转的前提下, 转动越快, 反弹的加速比越大。

综上所述, 于7盎司一次性纸杯、水、乒乓球构成的系统, 在水量为75ml时, 停止搅拌4s后由1米高度释放, 与硬质地面碰撞将获得最大反弹加速比: 2.7倍——与完全弹性碰撞结果接近。

5.3 视角误差控制

实验采用主要手段是视频拍摄，后续所有的动力学数据都是通过视频分析获得。因此视频的拍摄和后期处理方法对我们的研究结果具有决定性的影响。因此有必要仔细分析实验方法的合理性以及在此过程中可能产生较大误差的因素。

我们研究的动力学过程是一个准一维的运动。只要保证相机感光面与竖直方向平行，将不存在视角误差，如图32所示。

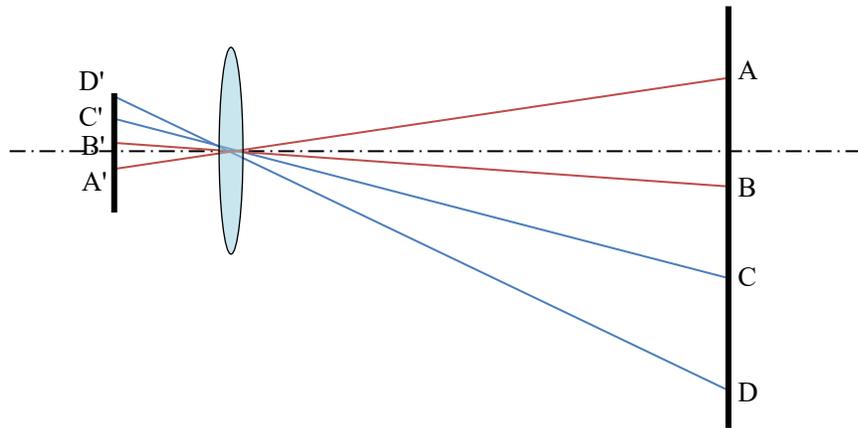


图 32: 利用相机记录平面运动可忽略视角误差。若能够确保被记录平面与相机感光平面平行，则根据三角形的相似关系，必定有 $AB/A'B' = CD/C'D'$ 。即感光元件上相同的距离将对应着被记录平面上的同样的距离，放大比例为像距与物距之比。

在实际操作中，很难确保相机和被记录面完全平行，因此我们有必要分析当相机感光面与记录平面存在小角度偏差所带来的影响。

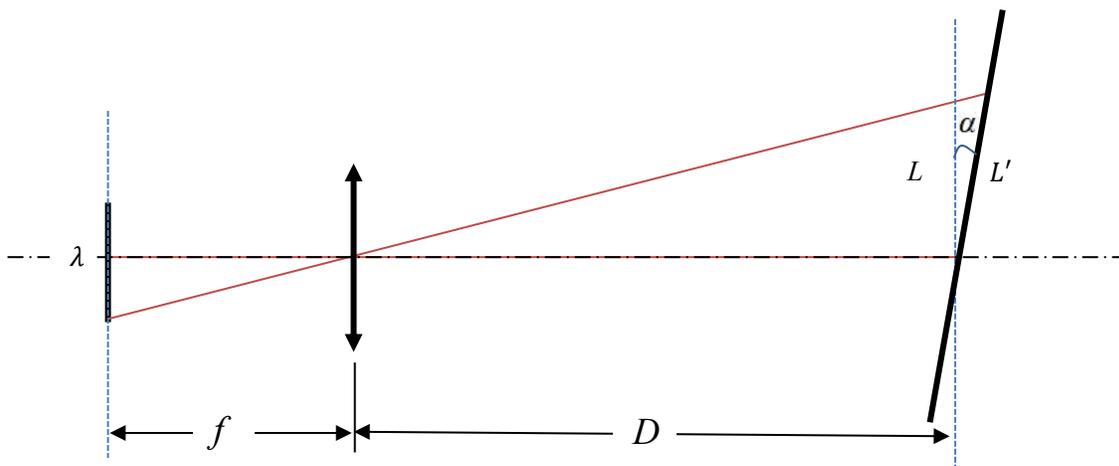


图 33: 感光器部位与记录事件平面存在倾角时，记录的内容会存在视角误差，因此需要一定的方法将误差控制在可接受的范围之内。

五、实验与优化

如图31所示, 假设相机的等效透镜位置距离拍摄物体为 D , 相机镜头等效透镜位置与感光面之间的距离为 f 。当镜头的光轴与被记录平面成小角度 α 时。根据几何关系, 由于视角偏差, 拍摄物体形变比率为

$$\kappa = \frac{1}{2f} \sqrt{\lambda^2 + 4f^2} \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{8} \right) \sqrt{\frac{\lambda^2}{f^2} + 4}, \quad (5.1)$$

其中 λ 为感光介质尺寸。呈现在感光器件上的长度, 是原来的 κ 倍。可见, 角度误差仅与相机本身的性质和倾角有关, 与拍摄距离无关。在拍摄设备和等效焦距不变的前提下, 形变比例 κ 会随着 α^2 而衰减, 因此如果我们能够控制 α 的精度, 则视角误差将能够得到很好的控制。

我们采用了以下方法来控制视角误差:

1, 调节三脚架高度, 使相机镜头中心距地面高度为 h ;

2, 如图34所示, 我们在远处 D 架设拍摄设备, 利用相机内显示的中心部位对准与远处固定的高度, 再调整相机高度, 与远处高度一致, 从而将倾角误差控制在较小范围。此外我们借助iphone5s手机 (其边缘非常平整) 中的Phyphox软件进行了水平调整, 将角度误差控制在0.5度以内。

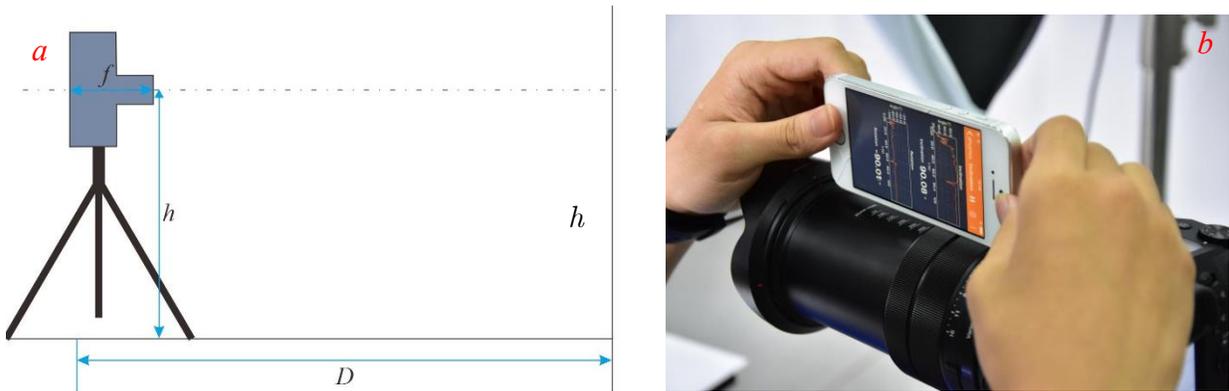


图34: 角度误差控制。采用远距离架设拍摄设备, 利用相机自身的水平仪和将屏幕中心点对准远处的已知高度点, 从而可将倾角误差控制在1%以内。再利用Phyphox软件自带的倾角仪, 进行验证和校准, 最终将放装置水平度调整到0.5度以内。

将相机的水平仪调整至水平, 调节三脚架高度, 对准距离 D 以外的标准高度 (h)。假设三脚架高度调整误差可控制在 δh 以内, 此时可以算出角度偏差的

最大值约为

$$\alpha_{\max} \approx \frac{\delta h}{D}, \quad (5.2)$$

带入(5.1)式可得

$$\kappa_{\max} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\delta h^2}{D^2} \right) \sqrt{\frac{\lambda^2}{f^2} + 4}. \quad (5.3)$$

形变比例将随着 δh 控制程度的增加而快速衰减。

综上所述, 可以得到以下结论。

- 1, 在理想情况下, 利用拍摄视频处理力学数据原则上可不存在视角误差。
- 2, 视角误差的影响是二阶小量, 随着角度控制精密程度加强, 可以将误差控制在很小范围。
- 3, 可以利用三脚架和拍摄物体距离选取来实现小视角误差控制。在三脚架高度调整精度一定的前提下, 定标平面距离越远, 其视角误差越小, 拍摄焦距越短, 视角误差越小。

5.4 视频追踪误差

视频分析的优点是可以以较小的时间间隔记录运动行为。然而相机记录会存在一种不可避免的误差——拖影误差。具体的说，相机每记录一帧图像都需要一定的曝光时间，在这段时间内，物体运动了一段距离，这会对后续捕捉物体位置造成一定的误差范围，本节来估算拖影误差视频分析的影响。

假设相机记录帧率为 n ，每一帧曝光时间为 τ ，以一定速率 v 运动的物体在一次曝光时间段内拖影的距离为

$$\delta z = v\tau, \quad (5.4)$$

手动（或AI）标记一帧图像内该物体位置的误差应正比于 δz ，假设比例为 η ，则标记误差为

$$E = \eta v\tau, \quad (5.5)$$

视频中每两帧之间，物体走过的距离是我们要测量的距离

$$\delta l = \frac{v}{n}, \quad (5.6)$$

因此，标记两帧之间距离的相对误差应为

$$E_r = \frac{E}{\delta l} = \eta\tau n, \quad (5.7)$$

可见这一误差与速度无关，仅与曝光时间成正比，与帧率成正比，与标记识别率成正比。

图35展示了一组对比实验。我们在完全相同的实验环境中分别用1/1000(s)和1/8000(s)进行高速摄影录制。从图像上看前者明显不清晰。在利用Tracker软件分析位置后，我们对导出的数据进行了对比，发现二者的分散程度（方差）相差4倍左右。

因此我们给出结论，利用视频（或拍照）进行力学测量过程中，每张图片的曝光时间越短，测量结果就越精确。但曝光时间短会造成曝光量降低，因此需要大功率光源进行照明才可能获得好的实验结果。

五、实验与优化

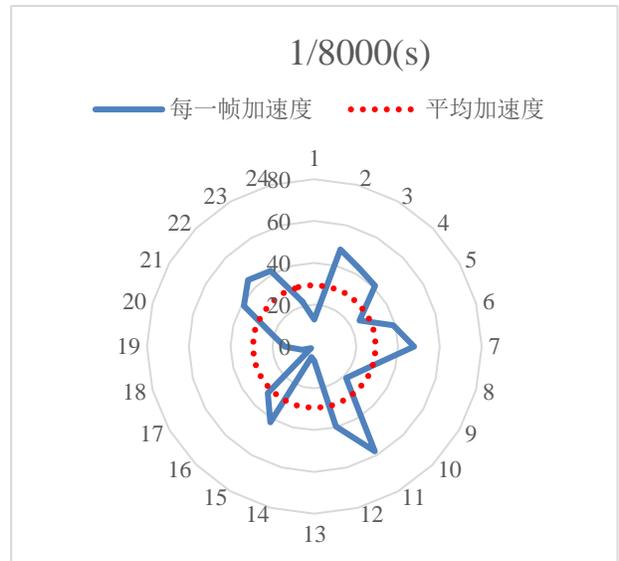
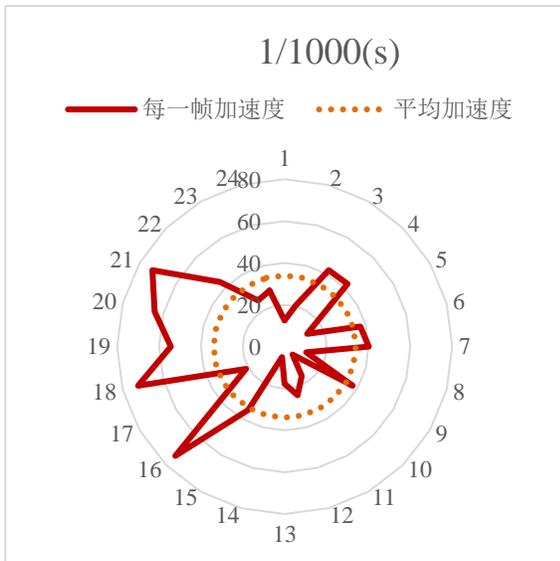
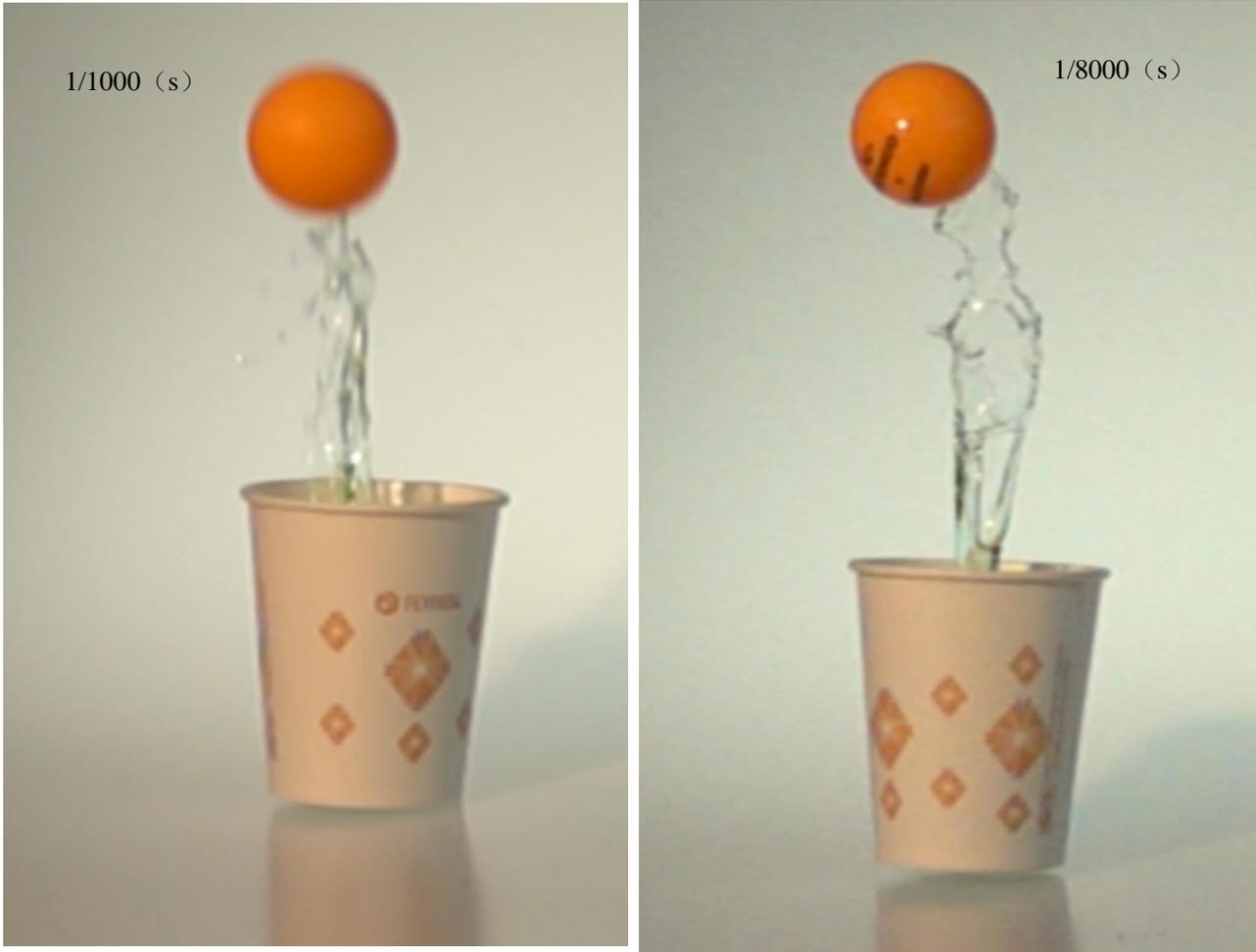


图35: 同样帧率,不同曝光速率对比试验。图像清晰度对比, 数据的分散度对比。

六、结论

本文系统研究了“流体碰撞加速”这一物理现象。发现由于流体的存在导致一系列不常见现象的产生，并最终导致了碰撞后反弹速度远高于触地速度的结果，其效果与三体完全弹性碰撞相当。

我们细致的描述了各个阶段产生的典型物理现象，还为每一种现象建立了物理模型，给出令人较为信服的解释。

在下落阶段，我们得到以下结论：（1）空气阻力的作用不可忽略，它不仅会影响下落中系统的惯性力、乒乓球的浮力，还会导致杯子下落的不稳定。为此我们自己创造了一种方法，测量了杯子和乒乓球的空气阻力系数。（2）浮力会随着失重而消失，乒乓球在表面张力作用下被部分吸入水中，这实际上为后续的加速过程蓄积了能量。（3）乒乓球无法稳定在杯子轴线附近，而是倾向于贴壁，造成实验的失败。这是由于液体自由下落过程中，表面微微下凹，表面张力的合力指向杯壁的结果。（4）由于空气阻力和重力不共线，造成杯体下落的不稳定，以及倾斜触地降低实验成功率。（5）用旋转液体既可以解决乒乓球贴壁，又可以增强系统在竖直方向上的倾角稳定性，从而可以大大增强实验的成功率和可重复性。

在碰撞阶段，我们获得以下结论：（1）1m高度下落的系统与地面相互作用的总时间约为0.016s。这段时间内，流体运动速度反向，产生相当于27.5倍重力加速度的压强。这一压强是产生最终加速的主要原因（2）乒乓球在碰撞过程经历两个阶段：水面下阶段，乒乓球先减速后加速，在浮出水面之前，将被加速到原速度两倍以上，碰撞加速的主要过程也是在这一阶段完成的。浮出水面后，乒乓球会经历一个较上一阶段略为缓和的二次加速，最终与水脱离。

在反弹至最高点的飞行阶段，乒乓球将在重力和阻力的联合作用下做上抛运动。由于乒乓球被加速到2倍原速度以上，反弹的最大高度将远超出实验室天花板高度，为此我们建立了一套物理模型，可以用反弹的初始速度替代最终反弹高度，从而简化实验过程。

在实验上，我们在获取数据、处理数据、影响因素、误差控制等诸多方面进行了优化和改进。在一系列定量实验中，我们得到了以下结论：

（1）对于1m高度的反弹，存在最佳水量使碰撞前后的速度比达到最大。对于7盎司（200ml）一次性纸杯，反弹最大速比水量为75ml，反弹速度比最大值为2.7倍，接近理想弹性碰撞模型。

六、结论

(2) 对于相同水量, 相同转速的反弹, 存在最佳下落高度使碰撞前后的速度比达到最大。对于水量为75ml的下落实验, 反弹速度比最大值出现在高约1m处。

(3) 转速越大, 下落的反弹速度比越大。对于我们的实验装置, 从撤掉搅拌器后4s释放(能够稳定控制的最短时间), 下落反弹速比最大。

(4) 硬质地面反弹加速比大于软性接触面。

(5) 可以通过高度和距离控制将视频记录的视角误差控制在很小范围内。

(6) 可以通过缩短曝光之间, 同时增强照明来减小视频追踪误差。

这些方法和结论将对其他力学相关实验产生一定的借鉴意义。

附录 1, 空气阻力系数测定

空气阻力系数是我们实验中一个重要的参数。它与整个下落过程中系统的惯性力、乒乓球所受浮力等动力学变量关系密切。因此我们采用自由落体法对其进行测定。

测定方法如下。

(1) 将一个钢球和待测物从约2米高的位置同时释放。根据2.1.1节的(10)式估算, 可将钢球视为受空气阻力影响很小的自由落体。选取其为重力加速度参照物。

(2) 追踪待测物和参照物下落的轨迹。如图所示。

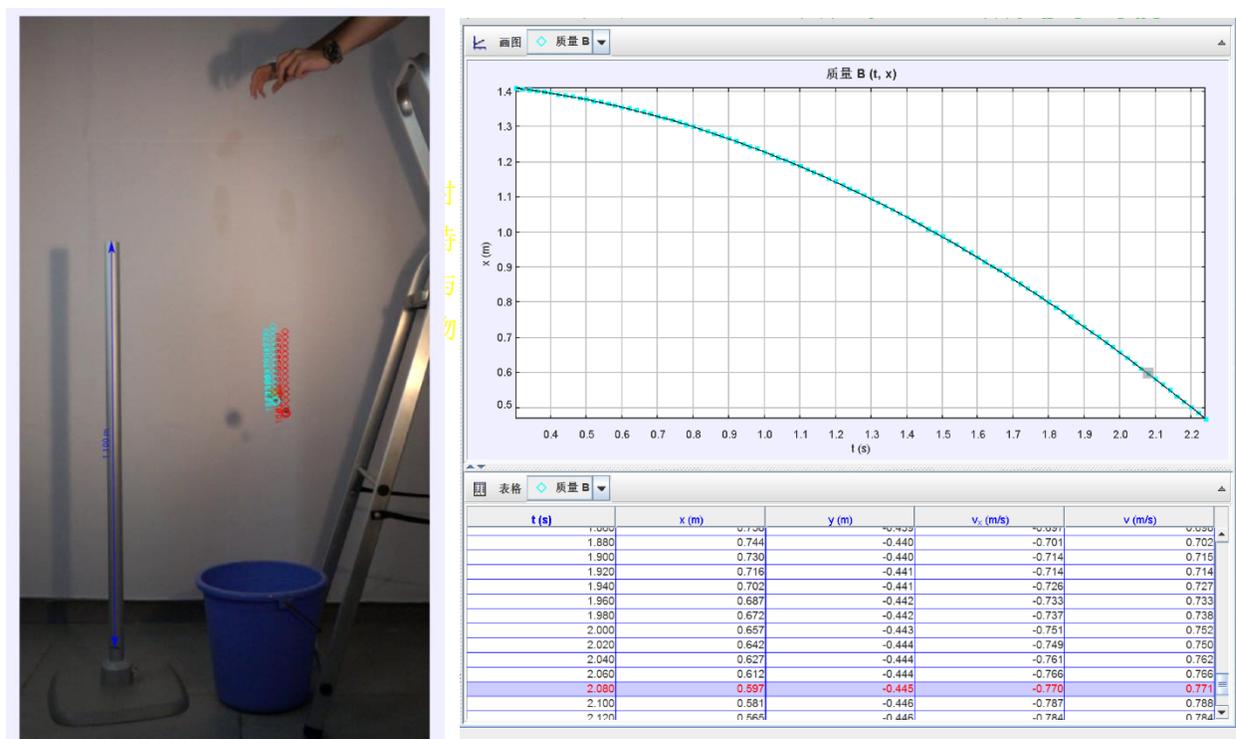


图36: 空气阻力系数的测定。

(3) 将追踪点数据用(2.6)、(2.7)式进行拟合。

由于在追踪过程中, 我们采用的坐标以及时间零点都不在原点处, 因此有必要修正公式, 从而得到正确的拟合结果。

对于钢球, 可以近似的认为接近理想自由落体, 根据自由落体公式

$$\dot{z} = v_0 + g t - t_0, \quad (0.1)$$

用实验数据拟合重力加速度, 拟合结果为 9.82m/s^2 , 较真实值略大, 我们认为

是由于视角误差带来的影响。我们可以以标准重力加速度值对系统尺度进行校准，尺度比例与加速度比例应当相同。

$$\frac{\Delta x}{\Delta X} = \frac{v}{v_0} = \frac{g}{g_0} = \frac{9.82}{9.80} \approx 1.002 \quad (0.2)$$

带初值修正的位移可以利用(2.6)式得到

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 - \frac{CS\rho_a g^2}{24m_{\text{tot}}}(t-t_0)^4 \\ &= z_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 - \frac{CS\rho_a g^2}{24m_{\text{tot}}}t_0^4 - \left(gt_0 - \frac{CS\rho_a g^2}{6m_{\text{tot}}}t_0^3 \right)t + \left(\frac{1}{2}g - \frac{CS\rho_a g^2}{4m_{\text{tot}}}t_0^2 \right)t^2 \\ &\quad + \frac{CS\rho_a g^2}{6m_{\text{tot}}}t_0 t^3 - \frac{CS\rho_a g^2}{24m_{\text{tot}}}t^4, \end{aligned} \quad (0.3)$$

需要拟合的参数包括 $z_0, t_0, g, CS\rho_a / m_{\text{tot}}$ 。这不仅比较繁琐，而且有可能造成参数调整的累积误差。我们最终选择了速度作为拟合的对象，根据(2.7)式

$$\begin{aligned} \dot{z} &= g(t-t_0) - \left(\frac{CS\rho_a g}{6m_{\text{tot}}} \right) (t-t_0)^3 \\ &= -gt_0 + \frac{CS\rho_a}{6m_{\text{tot}}}gt_0^3 + \left(1 - 3\left(\frac{CS\rho_a}{6m_{\text{tot}}} \right)t_0^2 \right)gt + 3\left(\frac{CS\rho_a}{6m_{\text{tot}}} \right)gt_0 t^2 - \left(\frac{CS\rho_a}{6m_{\text{tot}}} \right)gt^3, \end{aligned} \quad (0.4)$$

要拟合的参数是 $t_0, g, CS\rho_a / m_{\text{tot}}$ 。由于式中每一个 t_0 项都非线性变化，会对拟合的误差造成灾难性后果。因此在拟合之前我们先将 $t = 0$ 时刻标记完整，以确保在整个拟合过程中，后面的展开式都是收敛的。

结论：杯子竖直下落的空气阻力系数为 $C_{\text{cup}} \approx 1.1$ ；乒乓球空气阻力系数 $C_b \approx 0.38$

以下为处理数据编写的代码

```
空气阻力参数拟合.nb * - Wolfram Mathematica 11.3
文件(F) 编辑(E) 插入(I) 格式(R) 单元(C) 图形(G) 计算(V) 面板(P) 窗口(W) 帮助(H)
```

空气阻力系数测量

```
In[*]:= Quit[]
退出内核
```

(*已知常数复制*)

```
In[1]:= mtot = 51.19 * 10^-3; s =  $\frac{\pi 7.2^2 \times 10^{-4}}{4}$ ; g = 9.8; rho = 1.3;
```

```
In[2]:= mb = 2.7 * 10^-3;
```

提取数据, 赋值

```
In[3]:= (*导入数据*)
steel1 = Flatten[Import["D:\\fraction\\steel.xlsx"]];
           |压平   |导入
steelcup = Flatten[Import["D:\\fraction\\steelcup.xlsx"]];
           |压平   |导入
pingpang = Flatten[Import["D:\\fraction\\pingpong.xlsx"]];
           |压平   |导入
cup = Flatten[Import["D:\\fraction\\cup.xlsx"]];
           |压平   |导入

(*数组分布*) Table[steel1[[i]], {i, 5}];
           |表格
Table[steelcup[[i]], {i, 5}];
|表格
Table[pingpang[[i]], {i, 5}];
|表格
Table[cup[[i]], {i, 5}];
|表格

In[11]:= (*提取时间*)
timesteel = Table[steel1[[6 + 5 i]], {i, 1, 100}];
           |表格
timesteelcup = Table[steelcup[[6 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格
timepingpang = Table[pingpang[[6 + 5 i]], {i, 1, 90}];
           |表格
timecup = Table[cup[[6 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格

(*提取位移*)
xsteel = Table[steel1[[7 + 5 i]], {i, 1, 100}];
           |表格
xsteelcup = Table[steelcup[[7 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格
xpingpang = Table[pingpang[[7 + 5 i]], {i, 1, 90}];
           |表格
xcup = Table[cup[[7 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格

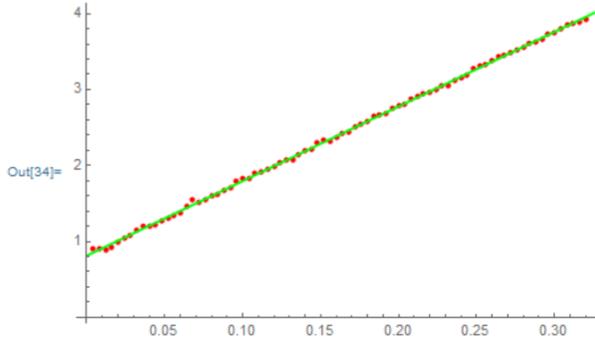
(*提取x速度*)
vxsteel = Table[steel1[[9 + 5 i]], {i, 1, 100}];
           |表格
vxsteelcup = Table[steelcup[[9 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格
vxpingpang = Table[pingpang[[9 + 5 i]], {i, 1, 90}];
           |表格
vxcup = Table[cup[[9 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格

(*提取总速率*)
vsteel = Table[steel1[[10 + 5 i]], {i, 1, 100}];
           |表格
vsteelcup = Table[steelcup[[10 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格
vpingpang = Table[pingpang[[10 + 5 i]], {i, 1, 90}];
           |表格
vcup = Table[cup[[10 + 5 i]], {i, 1, 80}];
           |表格
```

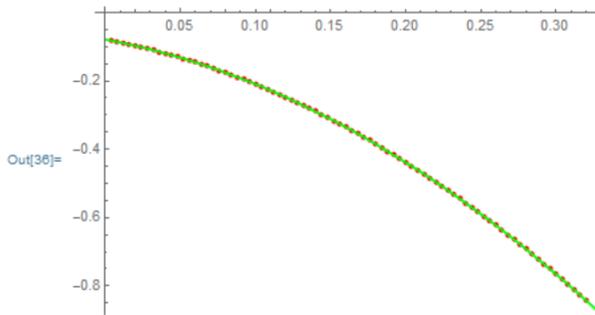
钢球cup拟合

```
In[33]:= vtfiteelcup = Table[{0.2 timesteelcup[[i]], -5 vxsteelcup[[i]]}, {i, 1, 80}]; (*时间和速度坐标*)
linesteeelcup = Fit[vtfiteelcup, {1, t}, t] (*拟合速度公式 (加速度) *)
Show[ListPlot[vtfiteelcup, PlotStyle -> Red], Plot[linesteeelcup, {t, 0, 5}, PlotStyle -> Green]] (*速度拟合曲线*)
xtfiteelcup = Table[{0.2 timesteelcup[[i]], xsteelcup[[i]]}, {i, 1, 80}]; (*时间和位移坐标*)
parabolasteelcup = Fit[xtfiteelcup, {1, t, t^2}, t] (*拟合位移公式 (加速度) *)
Show[ListPlot[xtfiteelcup, PlotStyle -> Red], Plot[parabolasteelcup, {t, 0, 5}, PlotStyle -> Green]] (*位移拟合曲线*)
```

Out[33]= 0.812897 + 9.82107 t



Out[35]= -0.078713 - 0.812694 t - 4.91448 t^2



```
In[30]:= (*理论模型*)
Series[x0 - 1/2 g (t - t0)^2, {t, 0, 4}]
Series[g t0 - gt, {t, 0, 4}];
```

Out[30]= (-4.9 t0^2 + x0) + 9.8 t0 t - 4.9 t^2 + 0 [t]^5

```
In[32]:= Reduce[g t0 == 0.8128973165022148` && g == -9.818182038001055`]
```

```
In[31]:= Reduce[-g t0^2/2 + x0 == -0.5780863854264794 && g t0 == 3.236836891787675 && g/2 == -4.914479746154739`]
```

x0 == -1.1110580123944893` && t0 == -0.32931633244803676` && g == -9.828959492309478`

附录 1 : 空气阻力系数测定

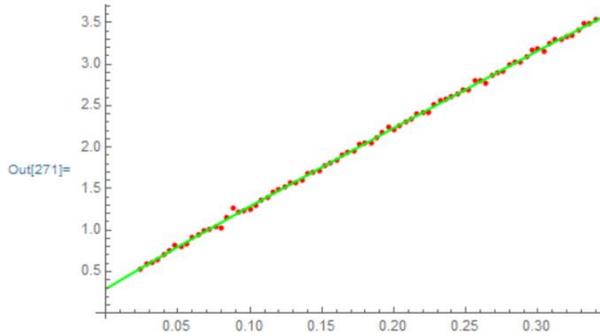
杯子拟合

```

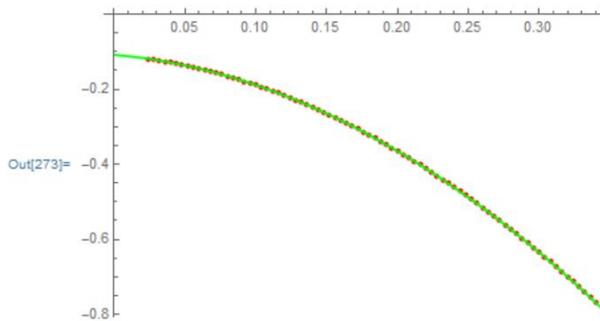
In[269]= vtfitcup = Table[{0.2 timecup[[i]], - $\frac{5}{1.002}$  vxcup[[i]]}, {i, 1, 80}]; (*时间和速度坐标*)
          | 表格
linecup = Fit[vtfitcup, {1, t, t2, t3, t4}, t] (*拟合速度公式 (加速度) *)
          | 拟合
exactfit = FindFit[vtfitcup, a Tanh[b (x - c)], {a, b, c}, x]
          | 求拟合 | 双曲正切
Show[ListPlot[vtfitcup, PlotStyle -> Red], Plot[linecup, {t, 0, 5}, PlotStyle -> Green]] (*速度拟合曲线*)
      | 显示 | 绘制点集 | 绘图样式 | 红色 | 绘图 | 绘图样式 | 绿色
xtfitcup = Table[{0.2 timecup[[i]],  $\frac{1}{1.002}$  xcup[[i]]}, {i, 1, 80}]; (*时间和位移坐标*)
          | 表格
parabolacup = Fit[xtfitcup, {1, t, t2, t3, t4}, t] (*拟合位移公式 (加速度) *)
          | 拟合
Show[ListPlot[xtfitcup, PlotStyle -> Red], Plot[parabolacup, {t, 0, 5}, PlotStyle -> Green]]
      | 显示 | 绘制点集 | 绘图样式 | 红色 | 绘图 | 绘图样式 | 绿色
      (*位移拟合曲线*)
    
```

Out[269]= $0.291521 + 10.4195 t - 6.30034 t^2 + 17.8309 t^3 - 20.7305 t^4$

Out[270]= {a -> 13.0816, b -> 0.742006, c -> -0.0325117}



Out[272]= $-0.108326 - 0.317295 t - 4.87036 t^2 + 0.211919 t^3 + 0.184947 t^4$



```

In[205]= Solve[1/13.081601446855585` ==  $\sqrt{\frac{c S \rho a}{2 m t_{ot} g}}$ , c]
          | 解方程
    
```

Out[205]= {{c -> 1.1077}}

```

In[206]= Solve[0.742006008901029` ==  $\sqrt{\frac{c S \rho a g}{2 m t_{ot}}}$ , c]
          | 解方程
    
```

Out[206]= {{c -> 1.08669}}

附录 1 : 空气阻力系数测定

乒乓球拟合

In[279]:= vtfittingpang = Table[表格 {0.2 timepingpang[[i]], - $\frac{5}{1.002}$ vxpangpang[[i]]}, {i, 1, 80}]; (*时间和速度坐标*)

exactfitpingpang = FindFit[vtfittingpang, a Tanh[b (x - c)], {a, b, c}, x] (*拟合速度公式 (加速度) *)
求拟合 双曲正切

Out[280]= {a -> 9.1778, b -> 1.06007, c -> -0.0685608}

对表达式应用规则... 对多个变量应用规则 把规则转换成列表   

+

Solve[解方程 $\frac{1}{9.177802461378828} = \sqrt{\frac{c \text{ sb } \rho a}{2 \text{ mb } g}}, c]$

Out[267]= {{c -> 0.384582}}

In[268]:= Solve[解方程 $1.0600719581380134 = \sqrt{\frac{c \text{ sb } \rho a g}{2 \text{ mb}}}, c]$

Out[268]= {{c -> 0.37904}}

附录 2：碰撞过程计算

这里给出第3节动力学问题的求解过程

浮出水面之前-数值

```
zz = NDSolve[{{m z'[t] == rho_w * (4 (g + 25 g) pi R^3 / 3 - m g + 1/2 rho_w cb pi R^2 (z'[t] - v1)^2), z[0] == 0, z'[0] == -v0},
  [数值求解微分方程组]
  {z[t], z'[t], z''[t]}, {t, 0, 0.0018327305}] (*第一阶段, 减速下沉*)
```

```
zz1 = NDSolve[{{m z''[t] == rho_w * (4 (g + 25 g) pi R^3 / 3 - m g - 1/2 rho_w cb pi R^2 (z'[t] - v1)^2),
  [数值求解微分方程组]
  z[0.0018327305] == 0.0016210961365853988, z'[0] == 2.197555124539008 * 10^-7}, {z[t], z'[t], z''[t]},
  {t, 0.000002593, 0.006}] (*第一阶段, 加速上升*)
```

```
{z[t] -> InterpolatingFunction[ Domain: {{0, 0.00183}} Output: scalar ] [t],
```

```
z'[t] -> InterpolatingFunction[ Domain: {{0, 0.00183}} Output: scalar ] [t],
```

```
z''[t] -> InterpolatingFunction[ Domain: {{0, 0.00183}} Output: scalar ] [t]]}
```

```
{z[t] -> InterpolatingFunction[ Domain: {{2.59 * 10^-6, 0.006}} Output: scalar ] [t],
```

```
z'[t] -> InterpolatingFunction[ Domain: {{2.59 * 10^-6, 0.006}} Output: scalar ] [t],
```

```
z''[t] -> InterpolatingFunction[ Domain: {{2.59 * 10^-6, 0.006}} Output: scalar ] [t]]}
```

```
(v0 - z'[t]) /. zz /. t -> 0.0018327305 (*判定速度为零点, 此后阻力反向, 方程变化*)
{2.19756 * 10^-7}
```

```
z[t] /. zz /. t -> 0.0018327305 (*判定速度为零点, 初条件变化*)
{0.0016211}
```

```
Plot[Piecewise[{{z[t] /. zz, t < 0.0018327305}, {z[t] /. zz1, t > 0.0018327305}}, v0 t], {t, 0, 0.0045}]
[绘图] [分段函数]
(*浮出水面前的位移时间图*)
```

```
Plot[Piecewise[{{z'[t] /. zz, t < 0.0018327305}, {z'[t] /. zz1, t > 0.0018327306}}, v0],
  {t, 0, 0.0045}, PlotRange -> All] (*浮出水面前的速度时间图*)
[绘图] [分段函数]
[绘制范围] [全部]
```

```
Plot[Piecewise[{{z''[t] /. zz, t < 0.0018327305}, {z''[t] /. zz1, t > 0.0018327305}}, {t, 0, 0.0045},
  [绘图] [分段函数]
  PlotRange -> All] (*浮出水面前的加速度时间图*)
[绘制范围] [全部]
```

浮出加速过程-数值

$$\text{In[178]}= \text{Vd} = \frac{\pi}{3} (\text{z1}[t] - \text{z2}[t])^2 (3R - (\text{z1}[t] - \text{z2}[t]));$$

$$\text{Vdp} = \text{FullSimplify}[\partial_t (\text{Vd})];$$

完全简化

$$\text{Fsurf} =$$

$$\frac{2\pi\gamma}{R} \left((2R (\text{z1}[t] - \text{z2}[t]) - (\text{z1}[t] - \text{z2}[t])^2) \cos[\theta] + \right.$$

余弦

$$\left. \sqrt{2R (\text{z1}[t] - \text{z2}[t]) - (\text{z1}[t] - \text{z2}[t])^2} (R - (\text{z1}[t] - \text{z2}[t])) \sin[\theta] \right);$$

正弦

$$\text{mstar} = 2m;$$

$$\text{In[231]}= \text{z1} = \text{NDSolve}[\{(m + \text{mstar}) \text{z2}''[t] == \rho w (g + 25g) \text{Vd} - (m + \text{mstar}) g + \text{Fsurf}, \text{z2}[0] == 0, \text{z2}'[0] == 9.6,$$

数值求解微分方程组

$$\text{z1}[t] == 2R + \frac{1}{2} v_0 t\}, \{\text{z2}[t], \text{z2}'[t], \text{z2}''[t], \text{z1}[t], \text{z1}'[t]\}, \{t, 0, 0.005\}]$$

NDSolve: For the method IDA, only machine real code is available. Unable to continue with complex values or beyond floating-point exceptions.

$$\text{Out[231]}= \left\{ \left\{ \text{z2}[t] \rightarrow \text{InterpolatingFunction} \left[\left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Domain: } \{0, 0.00432\} \\ \text{Output: scalar} \end{array} \right\} \right\} \right] [t], \right. \right.$$

$$\left. \text{z2}'[t] \rightarrow \text{InterpolatingFunction} \left[\left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Domain: } \{0, 0.00432\} \\ \text{Output: scalar} \end{array} \right\} \right\} \right] [t], \right.$$

$$\left. \text{z2}''[t] \rightarrow \text{InterpolatingFunction} \left[\left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Domain: } \{0, 0.00432\} \\ \text{Output: scalar} \end{array} \right\} \right\} \right] [t], \right.$$

$$\left. \text{z1}[t] \rightarrow \text{InterpolatingFunction} \left[\left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Domain: } \{0, 0.00432\} \\ \text{Output: scalar} \end{array} \right\} \right\} \right] [t], \right.$$

$$\left. \left. \text{z1}'[t] \rightarrow \text{InterpolatingFunction} \left[\left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Domain: } \{0, 0.00432\} \\ \text{Output: scalar} \end{array} \right\} \right\} \right] [t] \right\} \right\}$$

$$\text{In[232]}= \text{Plot}[\{\text{z2}[t], \text{z1}[t] - 0.008\} /. \text{z1}, \{t, 0, 0.00424\}] (*浮出水面前的位移时间图*)$$

绘图

$$\text{Plot}[\{\text{z2}'[t]\} /. \text{z1}, \{t, 0, 0.00424\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{Full}]$$

绘图

绘制范围 全范围

$$\text{Plot}[\text{z2}''[t] /. \text{z1}, \{t, 0.00002, 0.00424\}]$$

绘图

附录 3：热效应估算

流体力学问题除了力学部分外，还涉及到热力学过程，例如温度的升高通常会造成粘度的下降。在有些情况下，热力学甚至会主导系统的行为。而在我们考虑的旋转以及碰撞等诸多过程中，我们仅在力学层面上进行探讨，并未考虑系统的热力学行为，因此我们有必要在此补充说明这样做的合理性。

假设流体微元 Δm 以速度 v 运动，最终其动能完全转化为温度变化（估计温度变化的最大值），应有

$$c\Delta V\Delta T = \frac{1}{2}\Delta mv^2, \quad (0.5)$$

$$\Delta T = \frac{\rho v^2}{2c}, \quad (0.6)$$

其中 c 为流体的比热， ΔV 是体积， ρ 为密度。可见温度的变化与密度成正比，与比热成反比，与速度平方成正比。

以水为例，定容比热为 $c_V = 4.2 \times 10^3 \text{ J / kg} \cdot \text{K}$ ，密度 $\rho_w = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，对于我们所考虑过程的典型速度，例如平均流速为 4 m / s （1米高度自由下落的落地速度），造成的温度变化约为 1.9 K 。这一温度变化的最大值在1%以内，因此有理由进行忽略。事实上对于水流，如果运动的典型速度达到 10 m/s ，则其温度变化将达到5%，影响不可忽略，这对应自由落体过程的释放高度为 5 m ，远超出本实验所考虑的高度变化范围。

对于空气， $c_p \approx 1 \times 10^3 \text{ J / kg} \cdot \text{K}$ ， $\rho_a = 1.3 \text{ kg/m}^3$ ，可以估算出 4 m / s 的流速完全转化为热造成的温度变化约为 0.02 K ，比水的变化低两个数量级，因此更可以忽略。对于空气，当速度达到 100 m/s 数量级时才会造成显著的热效应。

通过这一估算我们认识到，对于相对低速过程，以及比热较大，密度比较低的流体，其动力学过程不需要考虑温度变化造成的影响（5%）。

参考文献

- [1] Lamb, H. Statics, Including Hydrostatics and the Elements of the Theory of Elasticity, 3rd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1928.
- [2] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Course of theoretical physics, Fluid Mechanics, vol. 6, Butterworth, Heinemann, Oxford(1987) (Chapter II).
- [3] McCormick, Barnes W. (1979): Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics. p. 24, John Wiley & Sons, Inc., New York, ISBN 0-471-03032-5.
- [4] Yuan, Yuehua, and T. Randall Lee. "Contact angle and wetting properties." Surface science techniques. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. 3-34.
- [5] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979, 2(4): 83.

致谢

经过近一年时间的努力探索，我们的论文《流体碰撞加速问题研究》终于完稿了。在整个实验探究过程中，虽然经历无数次失败和淬炼，我们小组始终对科学的探究充满热情，相互之间给予了极大的支撑和激励。从独立思考到创新选题，从预实验到定量实验，从实验目的到实验设计，从实验条件控制到实验材料准备，从实验过程到实验测量研究，从实验数据获取到数据处理，从论文的初始搭建到论文的最终定稿，从白天到黑夜，从平日到周末，我们沉浸其中，无怨无悔。我们并不仅仅期望看到实验出现成功的结果，而是刨根问底，找到它关系到的每一个细节，我们是科学探究之路上的孤独者，也是美妙物理世界的寻宝者。

本论文能够得以成形，首先要感谢陈健老师和庞海老师的悉心指导。陈老师经验丰富、严以律己，工作作风精益求精；庞老师学识渊博，治学态度严谨，宽以待人。他们对物理的热爱以及朴实无华、平易近人的人格魅力对我们影响深远，不仅使我们树立了远大的学术目标、掌握了各种研究方法，更使我们明白了许多接人待物和为人处世的道理。本论文从选题到完成，每一步都倾注了导师们大量的心血。在此，谨向他们表示崇高的敬意和衷心的感谢！

研究的每一步顺利开展都离不开我们的父母在背后的默默支持。他们的关心、鼓励和鞭策给予了我们莫大的帮助，他们是我们研究期间的精神后盾。真诚地感谢他们！

感谢我们小组成员共同的母校——天津市耀华中学！一脉相承的科研传统潜移默化地培养了我们积极严谨的科学探究态度，使我们善于发现并提出问题，积极探索并最终解决问题。

在研究过程中，组长王卓杰同学主要负责实验数据的采集和处理及论文的撰写和修改工作，组员项赟希同学主要负责对实验现象的分析和理论解释并协助实验的进行，组员高宇成同学主要负责实验的具体操作及论文修改工作。感谢我们共同完成了本论文的撰写，感谢幽深奥妙的物理世界让我们得以共同探索如此有趣的现象！

最后，感谢为评阅本论文而付出宝贵时间的专家和教授们，不管结果如何，我们都会带着对物理热爱的心在以后的学习生活中继续前进！

此页为学术诚信声明

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知,除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处,本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员: 王霖 高宇成 顾赞希
指导老师: 陈旭 阮海

2019年9月13日