参赛选手：陈兆君

中　　学：华南师范大学附属中学高中国际部

省　　份：广东

国　　家：中国

指导老师：郝保国

科　　目：数学 2019

题　　目：围长为 4 的 Ricci-平坦图

致　谢

本文的题目来自我浏览哈佛大学博士后Shuliang Bai的学术网页时候得到的启发。本项研究工作是本人完全独立完成，并没有和Shuliang Bai女士进行过交流，在艰难的研究过程中，我的高中数学老师给与我很多精神上的鼓励，我的家人也给了我很大的后勤支持。

在我的研究过程中，D. Cushing等人开发的图上曲率计算器给予了我很大的帮助，可以在通过网站(https://www.mas.ncl.ac.uk/graph-curvature/)快速验证我研究结论的正确性，我在此对他们无私的奉献精神表示衷心感谢。

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：陈兆君　　　指导老师：郝保国

2019 年 9 月 15 日

论文题目：围长为4的Ricci-平坦图

作者：陈兆君 2019年9月15日

论文摘要：

近年来，有很多学者考虑将曲率引入离散空间，得到诸多成果。2011 年，在 Villani 与 Ollivier 的研究基础上，丘成桐等人将 Ricci 曲率引入图上，定义了图的 Ricci 曲率。Ricci-平坦图是指 Ricci 曲率在所有边上都为 0 的图。丘成桐等人刻画了最小圈长≥ 5，即K_3-，$K_{2,2}$-free 的 Ricci-平坦图。本文中我们研究更宽泛的图类，K_3-，$K_{2,3}$-free，即无三角形且每两个 4 圈最多共享一条边的 Ricci-平坦图。

我们完全刻画了这类图中边及其邻域的局部条件。基于这个局部条件，我们得到这类图的以下整体性刻画。(1) 至少存在一条边包含于最多一个4圈，此图必定最小圈长≥ 5或非正则，且可以全部刻画清楚；(2) 每条边都包含于至少2个4圈，则图必定为正则的。我们的结果蕴含了林-陆-丘，何-罗-杨-袁 和 白-陆-丘(部分) 关于Ricci-平坦图的成果。

目录

围长为 4 的 Ricci-平坦图

2019 年 9 月 12 日

摘要

近年来，有很多学者考虑将曲率引入离散空间，得到诸多成果。2011 年，在 Villani 与 Ollivier 的研究基础上，丘成桐等人将 Ricci 曲率引入图上，定义了图的 Ricci 曲率。Ricci-平坦图是指 Ricci 曲率在所有边上都为 0 的图。丘成桐等人刻画了最小圈长≥ 5，即K_3-, $K_{2,2}$-free 的 Ricci-平坦图。本文中我们研究更宽泛的图类，K_3-, $K_{2,3}$-free，即无三角形且每两个 4 圈最多共享一条边的 Ricci-平坦图。

我们完全刻画了这类图中边及其邻域的局部条件。基于这个局部条件，我们得到这类图的以下整体性刻画。(1) 至少存在一条边包含于最多一个 4 圈，此图必定最小圈长≥ 5或非正则，且可以全部刻画清楚；(2) 每条边都包含于至少 2 个 4 圈，则图必定为正则的。我们的结果蕴含了林-陆-丘，何-罗-杨-袁 和 白-陆-丘(部分) 关于 Ricci-平坦图的成果。

关键字：Ricci-平坦图，Ricci 曲率，围长，K_3-free，$K_{2,3}$-free，正则图

一. 概述

Ricci 曲率(中文一般译为里奇曲率)是n维黎曼流形的$n-1$个截面曲率的和，它是一种重要的内蕴几何量，反映了流形相对于标准欧氏空间的扭曲程度。Ricci 曲率在黎曼几何中有非常重要的作用，对于 Ricci 曲率非负的流形，有非常多重要的研究。Bakry 和 Emery[1]通过热半群在测度空间上首次定义了 Ricci 曲率，而后许多学者开始研究测度空间上的 Ricci 曲率。2009 年，Ollivier[2]在测度空间的马尔科夫链上定义了 Ricci 曲率。

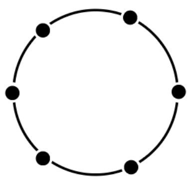
图和流形是两个不同领域的研究对象，但 Ollivier 的 Ricci 曲率定义可以直接延伸到图上。图的 Ricci 曲率的最早研究来自于金芳容和丘成桐[3]，2011 年，丘成桐及其合作者[4]又在 Ollivier 的曲率基础上，定义了新的图上 Ricci 曲率。

在黎曼流形中，卡-丘流形(Calabi-Yau manifolds)就是一类 Ricci 曲率处处为 0 的重要流形，对于图，我们自然要问有哪些图每条边的 Ricci 曲率均为 0 呢？如果图中每条边的 Ricci 曲率均为 0，则该图被称为是 Ricci-平坦的。2014 年，丘成桐及其合作者[5]研究了最小圈长至少为 5(即K_3-, $K_{2,2}$-free)的 Ricci-平坦图的分类。而后，关于 Ricci-平坦图的分类吸引了诸多学者的目光。Cushing 及其合作者[6]修正了最小圈长至少为 5 的 Ricci-平坦图的分类，杨超及其合作者[7]研究了 4 圈不交的 Ricci-平坦图的分类，Shuliang Bai 及其合作者[8]研究了最大度至多为 4 的 Ricci-平坦图的分类。本文中我们研究更宽泛的图类，K_3-, $K_{2,3}$-free，即无三角形且每两个 4 圈最多共享一条边的 Ricci-平坦图。

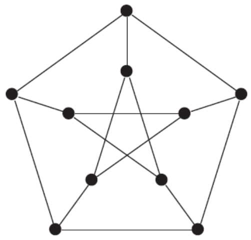
本文完全刻画了这类图中边及其邻域的局部条件，详见引理 5~9。基于这个局部条件，我们得到这类图的以下整体性刻画。证明了以下 2 个定理(具体证明将在后述章节给出)：

定理 1 Ricci-平坦图G是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，并且存在一条边包含于最多一个 4 圈，那么G必定最小圈长≥ 5或非正则，并且是下列的图类之一：

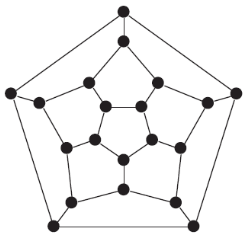
A. 长度大于 5 的圈、无限长的路、Petersen 图、正十二面体、半正十二面体[5]，Triplex 图[6]
B. 图 R1、R2 [7]
C. 图 G3、G4、无限网格带(图类) [8]
D. $K_{4,4}$选择一组完美匹配进行 Subdivision(加点)得到的图、环状网格带(图类)



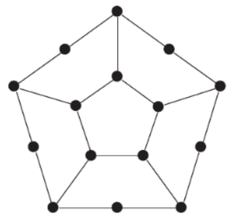
$C_n(n \geq 6)$
$n = \infty$即为无限路[5]



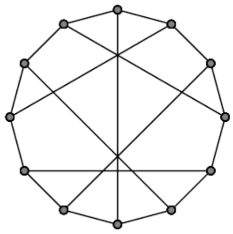
Petersen 图[5]



正 12 面体[5]



半正 12 面体[5]



$Triplex$图[6]

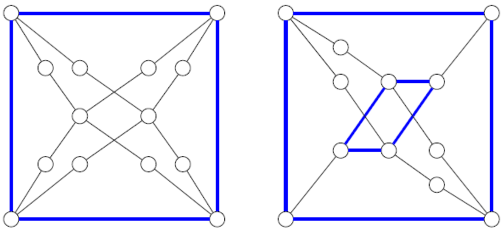


图 R1 和 R2[7]

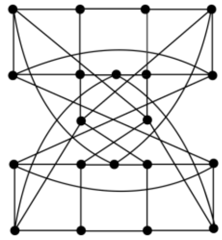


图 G3[8]

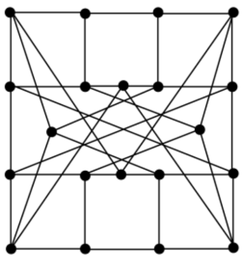
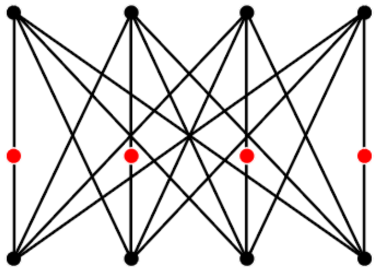
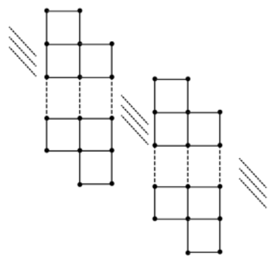


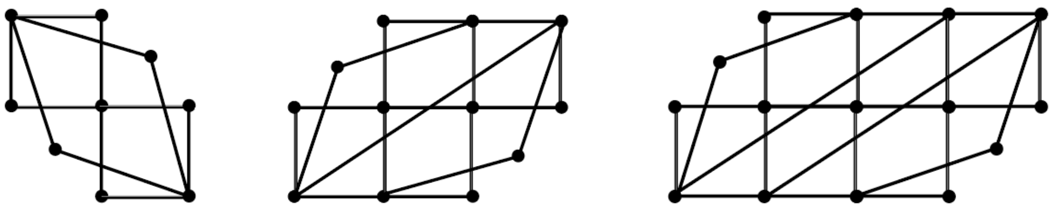
图 G4[8]



$K_{4,4}$+一组完美匹配进行 Subdivision



无限网格带[8]



环状网格带(部分实例)

定理 2　Ricci-平坦图G是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，G的每条边都包含于至少 2 个 4 圈，则G必定为正则图。

注：定理 1 中的 Ricci-平坦图其多样性主要体现为环状网格带这个图类的多样性，环状网格带是由多组 4 圈按照特定规律环接而成，详细的定义和其为 Ricci-平坦图的证明在后述章节中。

二．术语、定义和基本引理

本文中$G = (V, E)$都表示简单无向图，其中V为顶点集，E为边集，每对顶点之间没有重复边，顶点也无自圈。d_x都表示顶点x的度数，即与x邻接的边数，当G中所有顶点度数都相等，就称G是正则的；$d(x, y)$表示顶点x和y之间的最短路的长度。$\Gamma(x)$表示顶点x的邻域，即$\Gamma(x) = \{y|xy \in E$ 且$y \in V\}$，为了论述方便，我们记$N(x) = \Gamma(x) \cup \{x\}$，称为$x$的闭邻域。$C_3, C_4, C_5$分别代表长度为 3，4，5 的圈，一般地，$C_n$代表长度为$n$的圈。$G$包含的最小圈的长度称为$G$的围长，记作$g(G)$。

定义 1 图上概率分布、*coupling* 函数和概率转移距离

图$G=(V,E)$顶点集V上的概率分布定义为一个从V到[0,1]的一个映射：$m:V\to[0,1]$，满足$\sum_{v\in V}m(v)=1$。假设 2 个V上的概率分布m_1,m_2都仅有有限个顶点的概率为非 0，那么一个m_1到m_2的 *coupling* 函数定义为这样一个映射$A:V\times V\to[0,1]$，它也仅有有限个值不为 0，并且满足

$$\sum_{y\in V}A(x,y)=m_1(x)\text{并且}\sum_{x\in V}A(x,y)=m_2(y)$$

那么概率分布m_1转移为m_2的距离定义为

$$W(m_1,m_2)=\inf_A\sum_{x,y\in V}A(x,y)d(x,y)$$

即转换 2 种概率分布需要的最小运输量。容易验证这种距离定义是符合自反性，对称性和三角形不等式的。

定义 2 1- Lipschits 函数

假设图$G=(V,E)$每一个顶点的度数都是有限的，函数f: V → R，满足 任意$x,y\in V$，都有

$$f(x)-f(y)\le d(x,y)$$

那么这样的函数f就称为图G上的 1- Lipschits 函数。

根据线性优化问题的对偶定理，可以知道

$$W(m_1,m_2)=\sup_A\sum_{x\in V}f(x)(m_1(x)-m_2(x))$$

根据定义 1 和 2，找到一个 *coupling* 函数，我们就找到了$W(m_1,m_2)$的某个上界，找到一个 1-Lipschits 函数，我们就找到了$W(m_1,m_2)$的某个下界。

定义 3 图上 Ricci 曲率、Ricci-平坦图

假设图$G=(V,E)$，对于任意$x\in V,\alpha\in[0,1]$，定义m_x^α为V上这样一个概率分布

$$m_x^\alpha(t)=\begin{cases}\alpha & t=x\\ \dfrac{1-\alpha}{d_x} & tx\in E\\ 0 & \text{其它情况}\end{cases}$$

此时G中任意两顶点x,y之间的α-Ricci-曲率定义为$\kappa_\alpha(x,y)=1-\frac{W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{d(x,y)}$，这也是 Oliver[2]最早提出来的图上 Ricci 曲率定义，它并不是一个确定的值，而是一个和α相关的函数。而本文所研究的，是丘成桐及其合作者[4]在 Oliver 的工作基础上改进(增加极限运算)的一个更为合理的 Ricci-曲率定义，记作$\kappa(x,y)$，它是一个标量，定义如下

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{\kappa_\alpha(x,y)}{1-\alpha}$$

对于$xy\in E(G)$，$\kappa(x,y)$就称为这条边的 Ricci-曲率。如果G的每一条边的 Ricci-曲率都等于 0，那么图G就称为 Ricci-平坦的。

这种定义的灵感主要是来源于N维可微黎曼流形 M 上的 Ricci-曲率，设 M 中任意一点x，v为x的单位切向量，y沿v方向测地线足够接近x，此时以x和y为球心，半径为ε的开球之间的平均距离

$$\bar{d}\left(Ball_x^{\varepsilon}, Ball_y^{\varepsilon}\right) = d(x,y)\left(1 - \frac{\varepsilon^2 Ric(v,v)}{2(N+2)} + O(\varepsilon^2 d(x,y) + \varepsilon^3)\right)$$

而在图上 Ricci-曲率的定义中，令$\varepsilon = 1 - \alpha$，根据极限定义我们马上有

$$W\left(m_x^{\alpha}, m_y^{\alpha}\right) = d(x,y)(1 - \varepsilon\kappa(x,y) + o(\varepsilon))$$

两者形式十分相似，Ricci 曲率是定义在可微流形上，而图上 Ricci-曲率定义在离散空间上，但两种 Ricci-曲率的正负性都决定了x和y的ε-邻域的平均距离和x, y之间的距离之间的增减关系。

引理 1 假设图$G = (V, E)$，$xy \in E(G)$，A是m_x^{α}到m_y^{α}的一个 *coupling* 函数，而f是图G上的一个 1-Lipschits 函数，那么

$$\sum_{v \in V} f(x)(m_x^{\alpha}(v) - m_y^{\alpha}(v)) \leq W\left(\mu_x^{\alpha}, \mu_y^{\alpha}\right) \leq \sum_{\substack{u,v \in N(x) \cup N(y) \\ u \neq v}} A(u,v) d(u,v)$$

证明：从定义 1 和定义 2 即可得，只需要注意到顶点$u \in \mathrm{V}$都有$d(u,u) = 0$，若$m_x^{\alpha}(u) = m_y^{\alpha}(u) = 0$则$\forall v \in \mathrm{V}\ A(u,v) = A(v,u) = 0$。□

Shuliang Bai 及其合作者[8]关于最大度小于等于 4 的 Ricci-平坦图的文章中还给出了如下有用的结论：

引理 2 图$G = (V, E)$，G的每个顶点的度数都是有限的，若$xy \in E(G)$，那么当$\alpha \geq \frac{1}{max(d_x, d_y)+1}$时，$\kappa_{\alpha}(x,y)$是关于的一次线性函数，并且$\lim_{\alpha \to 1} \kappa_{\alpha}(x,y) = 0$。

根据洛必达法则和图上 Ricci-曲率的定义，我们马上可以推论当$\alpha \geq \frac{1}{max(d_x, d_y)+1}$，$\kappa(x,y) = W'\left(m_x^{\alpha}, m_y^{\alpha}\right)$，即$W\left(m_x^{\alpha}, m_y^{\alpha}\right)$的斜率。我们要寻找的是 Ricci-平坦图，此时$\kappa(x,y) = 0$，即α足够大就有$W\left(m_x^{\alpha}, m_y^{\alpha}\right) \equiv 1$。引理 1 中的不等式的下界和上界都是关于α的函数(通常为 1 次线性函数)，根据夹逼原理，我们有以下结论：

引理 3 假设图$G = (V, E)$，$xy \in E(G)$，A是m_x^{α}到m_y^{α}的一个 *coupling* 函数，而f是图G上的一个 1-Lipschits 函数，那么

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \leq \kappa(x,y) \leq \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

引理 3 是我们分析 Ricci-平坦图的局部条件的最重要依据。如果能够找到一组合适的 *coupling* 和 1- Lipschits 函数使得$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$，那么就可以得出$\kappa(x,y) = 0$，即边$xy$的 Ricci-曲率为 0。如果$\frac{\partial A}{\partial \alpha} > 0$或$\frac{\partial f}{\partial \alpha} < 0$，我们都可以断言边$xy$的 Ricci-曲率不可能为 0。

三. K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci 平坦图的局部条件

假设图$G = (V, E)$，$xy \in E(G)$，不失一般性设$d_x \leq d_y$，G中刚好有k个 4 圈包含边xy，因为K_3-free，所以$\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset$，记$\Gamma(x)$与$k$个 4 圈的公共顶点为$T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$，$\Gamma(y)$与$k$个 4 圈的公共顶点为$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$，因为$K_{2,3}$-free，所以$T$和$S$之间有且仅有一组一一对应的边，不设一般性设为$t_i s_i (i = 1,2, \dots, k)$，如下图 1 所示。再令$S' = \Gamma(y)/\{x\}/S$，即$y$的邻居中不在经过$xy$的 4 圈的部分。类似地，令$T' = \Gamma(x)/\{y\}/T$，即$x$的邻居中不在经过$xy$的 4 圈的部分。显然$|T'| = d_x -$

$k-1, |S'| = d_y - k - 1$。又因为G是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，容易分析得出T, S, T', S'没有边，而T, T'、T, S'、S, T'和S, S'之间都没有边。

直观上，若无其它捷径可走(即没有经过xy的C_5)，当α足够接近 1，较好的 *coupling* 就是T中的点t_i直接一步转移$\frac{1-\alpha}{d_y}$到S中对应的点s_i。而x则运输$\alpha - \frac{1-\alpha}{d_y}$至$y$，然后$T$和$T'$余下的概率全部 2 或者 3 步转移到$y$和$S'$中。这时候，算出来的下界为$\frac{2}{d_x} + \frac{2k+2}{d_y} - 2$。此时我们以下面的 1-Lipschits 函数$f$来估算 Ricci 曲率的上界为$\frac{1}{d_x} + \frac{k+2}{d_y} - 1$。

$$f(u) = \begin{cases} 1 & u = y\text{或}u \in S \\ 2 & u \in S' \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$$

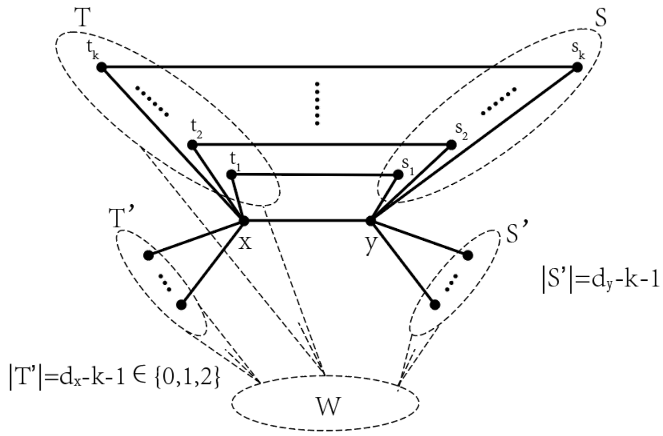


图 1：边xy的局部结构

联立得到不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{2}{d_x} + \dfrac{2k+2}{d_y} - 2 \le 0 \\ \dfrac{1}{d_x} + \dfrac{k+2}{d_y} - 1 \ge 0 \\ d_y \ge d_x \ge k+1 \end{cases}$$

这组不等式很容易通过换元法将$\frac{1}{d_x}$和$\frac{1}{d_y}$看作变元来分析，通过线性规划求解，我们得到：

引理 4　图$G = (V, E)$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图，$xy \in E(G)$，那么d_x, d_y, k的组合必为下列三大类 8 种情况之一：

A. $d_x = d_y$
1. $d_x = d_y = k+2$
2. $d_x = d_y = k+3$

B. $1 \le d_y - d_x \le 2$
3. $d_x = k+2$，$d_y = k+3$
4. $d_x = k+1$，$d_y = k+3$，$k > 0$
5. $d_x = 2$，$d_y = 4$，$k = 0$

C. $3 \le d_y - d_x \le 4$
6. $d_x = 2$，$d_y = 5$，$k = 1$

7. $d_x = 3$，$d_y = 6$，$k = 2$
8. $d_x = 2$，$d_y = 6$，$k = 1$

推论：$2 \le |d_y - d_x| + |d_x - k| = d_y - k \le 5$。

现在我们来考虑T, T'和S'的公共邻域W，即$W = \Gamma(T \cup T') \cap \Gamma(S')$，这个 W 给出了从 T,T'转移概率分布到$S'$的一些捷径，即一些经过边$xy$的$C_5$。原来需要通过$xy$三步才可以从$T, T'$转移到$S'$的 *coupling* 可以调整为经过$W$的点两步转移，这样可以使得$\kappa(x,y)$增大。适当的 W 的结构，可以使得$\kappa(x,y) = 0$，通过比较精巧地构造 *coupling* 和 1- Lipschits 函数，引理 4 中 8 中必要条件都可以扩展为充分必要条件，详细的证明见过程附录 A。另外，W可以看作是一个$T \cup T'$到S'的二元关系，即$W(u,v)$表示u和v在W中有公共邻居。W^{-1}则表示 W 的逆关系。我们将运用这种技巧来更简洁的表达$\kappa(x,y) = 0$的充要条件。

引理 5　图$G = (V,E)$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，$xy \in E(G)$，$d_x = d_y = k + 2$，此时$\kappa(x,y) = 0$等价于$W^{-1}(S') \cap T' = \emptyset$，即不存在$C_5$经过边$xy$，$T$和$S'$，即任意$t_i$和$S'$中唯一的一点$y_1$之间距离都为 3。

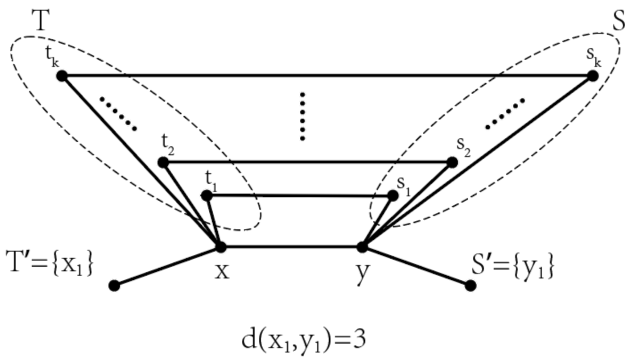


图 2：引理 5，两端点度数=4 圈数+2，边 Ricci 曲率=0

引理 6　图$G = (V,E)$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，$xy \in E(G)$，$d_x = d_y = k + 3$，此时$\kappa(x,y) = 0$等价于$|W(T')| = |W^{-1}(S')| = 2$，即任意$u \in T', v \in S'$，都有$d(u,v) = 2$。

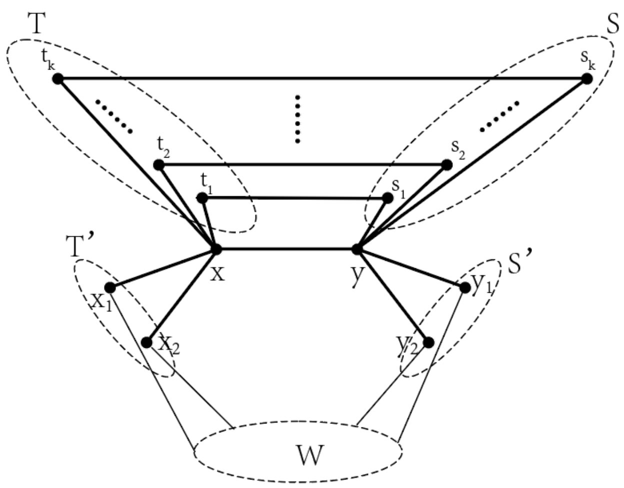


图 3：引理 6，两端点度数=4 圈数+3，边 Ricci 曲率=0

引理 7　图$G = (V,E)$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，$xy \in E(G)$，$d_x = k + 2, d_y = d_x + 1 = k + 3$，设$T' = \{x_1\}, S' = \{y_1, y_2\}$，此时$\kappa(x,y) = 0$等价于下列 2 者之一：

1. $W(T') = \{y_j\}$且$|W^{-1}(y_{3-j})| = k$

2. $W(T') = S'$且$|W^{-1}(S')| = k-1\ (k>0)$

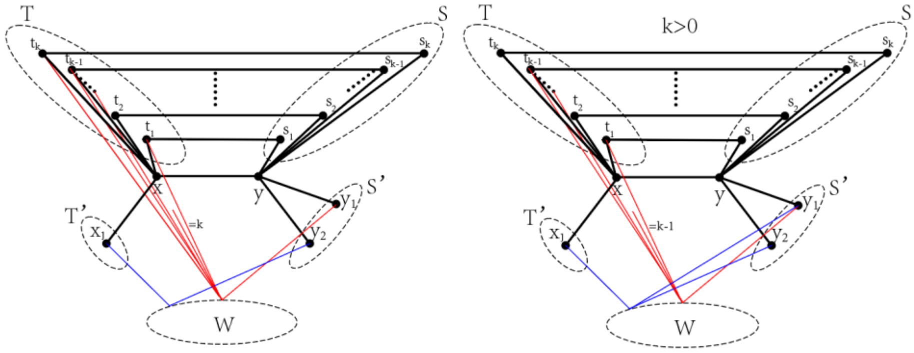


图 4：引理 7，两端点度数相差为 1，边 Ricci 曲率=0

引理 8 图$G=(V,E)$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，$xy \in E(G)$，$d_x = k+1, d_y = d_x + 2 = k+3$，那么$k>1$，设$S' = \{y_1, y_2\}$，不妨设$|W^{-1}(y_1)| \geq |W^{-1}(y_2)|$，此时$\kappa(x,y) = 0$等价于下列 2 者之一：

1. $|W^{-1}(S')| = k-1$ 且$|W^{-1}(y_j)| \leq \frac{k+1}{2}, j=1,2$
2. $|W^{-1}(S')| = k$，$|W^{-1}(y_1)| \geq \frac{k+3}{2}$，$|W^{-1}(y_2)| = \frac{k-3}{2}$ $(k=2n+1, n>0)$

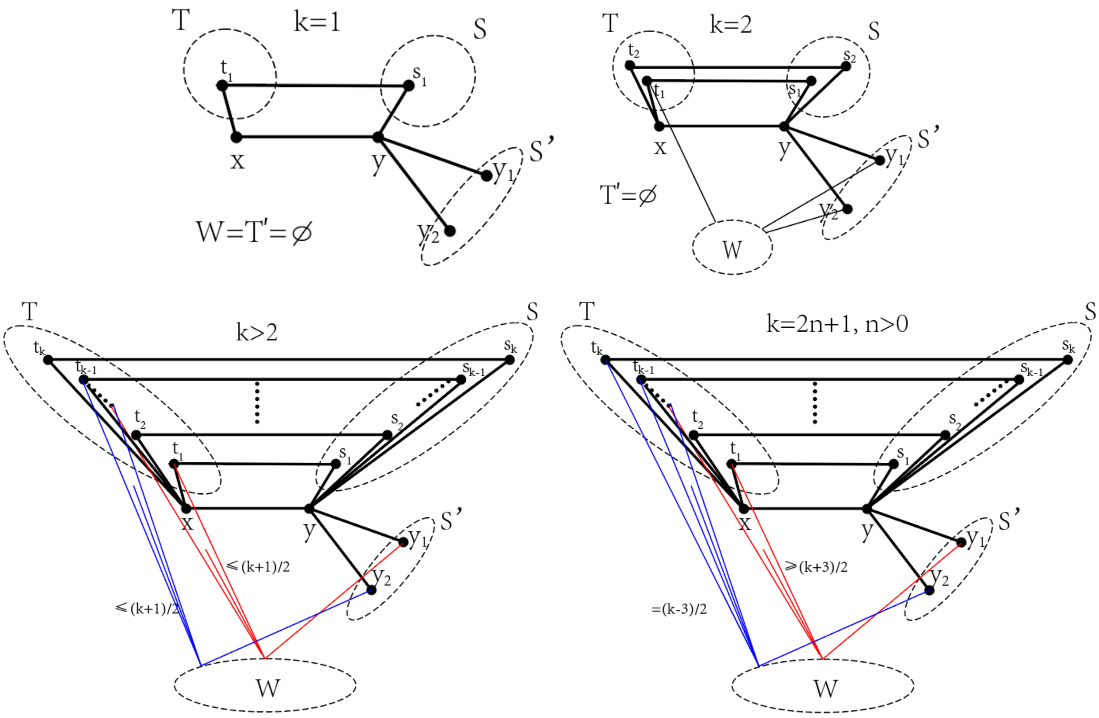


图 5：引理 8，两端点度数相差为 2，边 Ricci 曲率=0

引理 5~8 描述了d_x, d_y, k都可以无限大的时候，边xy的 Ricci-曲率为 0 的充要条件，余下的情况，由于**引理 4** 必要性的限制，d_x, d_y, k都只能取较小的整数值，并且只有 4 种组合情况，我们将其 Ricci-曲率为 0 的充要条件一并在下一个引理中描述。

引理 9 图$G=(V,E)$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，$xy \in E(G)$，满足$d_y - d_x > 2$ 或 $d_y - d_x = 2$ 且$d_x - k \geq 2$，此时$\kappa(x,y) = 0$等价于下列 4 种情况之一：

1. $d_x = 2$，$d_y = 4$，$k=0$，$|W(T')| \geq 2$
2. $d_x = 2$，$d_y = 5$，$k=1$，$|W(T)| = 1$

3. $d_x=3$，$d_y=6$，$k=2$，$|W(T)|\geq 2$，$|W^{-1}(S')|\geq 2$
4. $d_x=2$，$d_y=6$，$k=1$，$|W(T)|\geq 2$

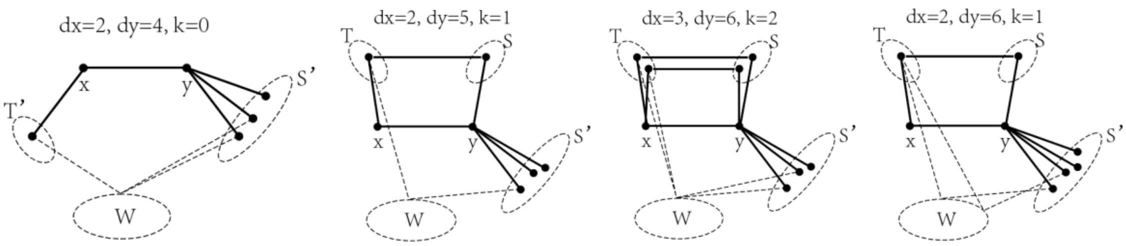


图 6：引理 9，两端点度数相差超过 2 或者度数差和度数-4 圈数都≥ 2，边 Ricci 曲率=0

四. K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci 平坦图的全局刻画

定义 4　图$G=<V,E>$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，令$xy\in E(G)$，经过xy的不同的C_4的数量称为 4 圈覆盖度，记为k_{xy}，那么k_{xy}中最小那个就称为最小 4 圈覆盖度，记为$\rho(G)=min\{k_{xy}|xy\in E(G)\}$；$k_{xy}$中最大那个就称为最大 4 圈覆盖度，记为$\aleph(G)=max\{k_{xy}|xy\in E(G)\}$。

借助定义 4，我们重新更为简洁的表述和证明定理 1 和定理 2。

定理 1　Ricci-平坦图G是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，并且$\rho(G)<2$，那么G必定最小圈长≥ 5或非正则，并且是下列的图类之一：

A. 长度大于 5 的圈、无限长的路、Petersen 图、正十二面体、半正十二面体[5]，Triplex 图[6]
B. 图 R1、R2 [7]
C. 图 G3、G4、无限网格带(图类) [8]
D. $K_{4,4}$选择一组完美匹配进行 Subdivision(加点)得到的图、环状网格带(图类)

证明：

A、B、C 三种图类都是之前学者已经发现的满足K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图，此处仅介绍情况 D，是本文新发现，并且详细研究的图类，本文还证明了超出了这个范围，并不存在非正则的满足K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图，详细的证明需要分类讨论较多的情况，已经整理放入附录 B。

整体而言，要得到非正则的满足K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图是非常困难的，这也符合 Ricci-平坦所代表的一种高度的对称性。

根据$\rho(G)=0$和$\rho(G)=1$进行分类讨论，反复运用引理 5~9，进行边的扩张，大部分情况都能够得到无法同时满足 2 条相邻的边的 Ricci-曲率都为 0 的要求，主要是 2 条边的所对应的二元关系W_1和W_2会有矛盾。

情况 1: $\rho(G)=0$

如果$\rho(G)=\aleph(G)=0$，那么显然 G 就是围长大于等于 5 的，所有 Ricci-平坦图已经在[5]和[6]中列出。所以，只需要讨论$\rho(G)=0,\aleph(G)>0$。此时必定有$xy,yz\in E(G),k_{xy}=0,0<k_{yz}\leq 2$。

由引理 4 的推论我们知道$2\leq d_x,d_y,d_z\leq 6$，选取其中符合必要条件的所有组合进行分类讨论，我们可以得到杨的图 R1 和 R2[7]，以及 Shuliang Bai 的图 G3 和 G4[8]。除此之外并没有其它满足条件的 Ricci-平坦图。

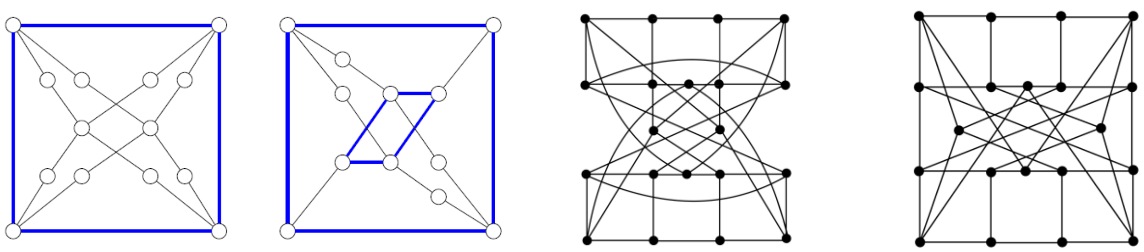


图 R1 和 R2[7]　　　　　　　　　　图 G3[8]　　　　　　　图 G4[8]

情况 2: $\rho(G) = 1$

首先，从引理 5~9 知道$\aleph(G) \leq 2$。

若$\aleph(G) = 1$，那么也就说G的每条边都刚好有一个 4 圈经过，很容易可以推出这种情况下，G是宽度为 1，长度大于 2 的环状网格带，拓扑上就是若干个 4 圈依次点接，铺满圆柱面。

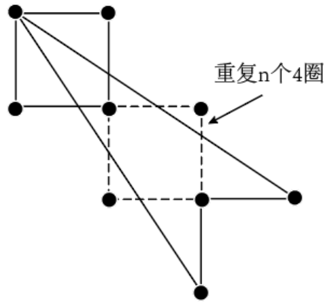


图 7: 宽度为 1，长度大于 2 的环状网格带，n > 0，当∞，即为无限网状带[8]

若$\aleph(G) = 2$，若没有连续 3 条边xy, yz, zt对应的k_{xy}, k_{yz}, k_{zt}值都等于 1，那么可以得出只有唯一图——$K_{4,4}$选择一组完美匹配进行 Subdivision(加点)得到的图满足条件并且是 Ricci-平坦的，它有C_5，不是二部图。

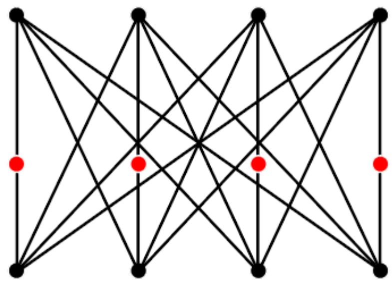


图 8：新发现的 Ricci-平坦图 共 12 个顶点

否则，存在 3 条连续边都仅被 1 个 4 圈经过，加上$\aleph(G) = 2$，可以推出G要是 Ricci-平坦的，那么必须是宽度大于 1，长度大于 2 的环状网格带。图 9 以宽度为 4，长度也为 4 的情况，展示了环状网格带的构造方法：将无限网格带进行全等划分，分割线为 2 条形状一样的从上部的 2 度点，沿着向下和向左的方向移动到下部的 2 度点的路(下图红色的路)，其长度必为宽度+1。两条红线上的对应的点认为是同一个顶点，这样 2 条红色路夹着的部分构成的图，就是环状网格带。由于它的拓扑本质上和无限网格带[8]一样，所以它也是 Ricci-平坦的。

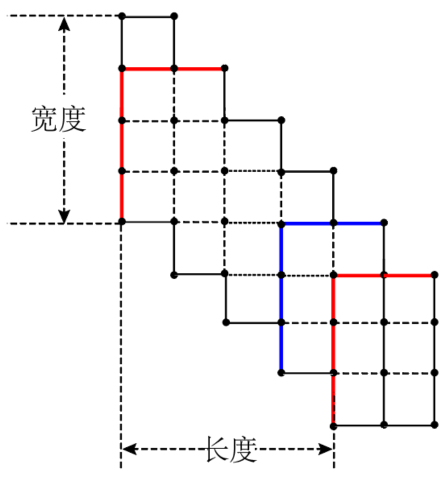


图 9：宽度和长度都为 4 的环状网格带，沿红色路剪下粘合而成的环状图

至此，我们找出了$\rho(G) < 2$的约束下，所有K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图(类)。□

为了产生$\rho(G) \geq 2$的 Ricci-平坦图，丘成桐及其合作者在[5]中介绍了笛卡尔乘积和强覆盖 2 种方法

引理 10 2 个正则的 Ricci-平坦图 A 和 B，其笛卡尔乘积$A\square B$依然是 Ricci-平坦的。
引理 11 图 A 是 B 的强覆盖，则 A 是 Ricci-平坦的当且仅当 B 是 Ricci 平坦的。

$A\square B$可以直观地描述为先删掉 B 的所有边，然后以 A 替换 B 的每一个顶点，然后再按照 B 原来的边，用$V(A)$和$V(A)$之间的恒等映射来代替 B 原来的边，得到的图就是其笛卡尔乘积。显然正则图的笛卡尔乘积依然是正则的。

所谓强覆盖的具体定义请参考[5]，直观上就是$V(A)$和$V(B)$之间有一个满射，覆盖要求这个映射限制在 A 的某个顶点的闭领域都是一个双射，强覆盖则进一步要求限制在每一条边及其 2 端点的闭领域上也是双射。显然这种覆盖使得边的 Ricci-曲率也得到保留。

在$A\square B$的第二步，用$V(A)$和$V(A)$之间的恒等映射来代替 B 原来的边，我们可以修改为用 A 的任意一个自同构映射来替代恒等映射，这样得到的图，就是$A\square B$的强覆盖。如果，$A\square B$是 Ricci-平坦的，用自通过替换之后得到的图自然也是 Ricci-平坦的。例如C_6是 Ricci-平坦的，所以$C_6\square C_6$也是 Ricci-平坦的，即一个环上的网格(lattice)覆盖。如果其中用一个C_6的轮换对应来替换其中一个恒等映射，得到新的 Ricci-平坦图，就类似于莫比乌斯环上网格覆盖依然是平的。

另外，很容易证明

引理 12 K_3-, $K_{2,3}$-free 这个性质对于笛卡尔乘积和强覆盖都是传递的。

引理 12 说明了我们研究K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图类对笛卡尔乘法和强覆盖映射是封闭的，我们的研究是合理而重要的。

定理 2 Ricci-平坦图G是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，并且$\rho(G) \geq 2$，则G必定为正则图。

证明：

直观上，要求每条边都给 2 个以上 4 圈包含，是一个很强的结构要求，一般都要以高对称性来实现，例如 2 个正则图的笛卡尔乘积$C_6\square C_6$。或者使用满足特定条件$d(x, x + ns) = n$（s 为任意生成元，n为任意正整数）的 torsion free 的阿贝尔群的 Cayley 图来构造[5]。事实上正则是对对称性的最低要求，我们将用数学归纳法和反证法证明定理 2。令

$$k' = min\{k_{xy}|xy \in E(G), d_y > d_x\}$$

显然$k' \geq \rho(G) \geq 2$，我们首先证明$k' = 2$的时候，是无法实现的。从引理 5~9 我们可以看到，等两边的度数不等($d_y > d_x$)并且经过xy的C_4数不小于 2 的时候，$\kappa(x, y) = 0$就以为着对经过xy的C_5数量和分布都有比较高的要求。在这里我们将证明在K_3-, $K_{2,3}$-free 的前提下，这是不可能实现的。

当$k_{xy} = 2$，$d_x, d_y(d_y > d_x)$可能的情况为<3, 5>, <3, 6>, <4, 5>三种。通过分类讨论，可以知道从xy出发扩张顶点和边，最终都无法实现 5 圈的合理安排，满足xy和x和T之间的边都 Ricci-平坦。产生矛盾。详见附录 B。总体而言，度数d_x, d_y和 4 圈数k_{xy}的差距越大、d_y和d_x的差距越大，k_{xy}本身越大都产生对 5 圈数量和结构的很高要求，所以要么压低k_{xy}来实现边的 Ricci-平坦，具体情况就是定理 1 所描述的；要么就是要度数正则$d_y = d_x$，同时压低度数d_x, d_y和 4 圈数k_{xy}的差距(根据引理 5~9，差距只能为 2 或 3)来实现边的 Ricci-平坦。笛卡尔乘积$C_6\square$Petersen图，就产生 5-正则的 Ricci-平坦图。

当$k_{xy} > 2$，$d_x, d_y(d_y > d_x)$，根据引理 5~9，我们可以适当选取其中一个经过xy的C_4，删除除xy以外的 3 边，T 也减去一个点，此时xy、x和T余下的点之间的边都保持 Ricci-平坦，并且

d_y, d_x, k_{xy}都同时减少 1，其差距保持不变。最后可以删至k_{xy} =2 而$d_y > d_x$的情况，而前面已经证明这种情况下无法实现 5 圈的合理安排，满足xy和x和T之间的边都 Ricci-平坦。产生矛盾。

最后，我们就证明了当$\rho(G) \geq 2$，则G必定为正则图。□

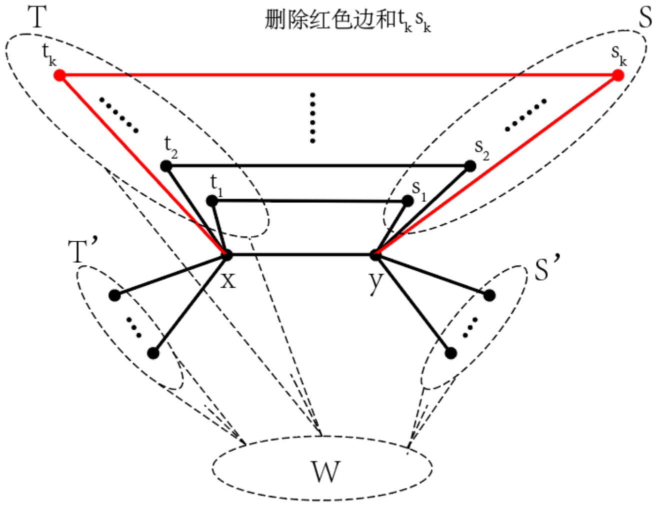


图 10：删除适当的 4 圈的边，适当 Ricci-平坦性在xy，x和T之间的边上保留

五. 总结和未来的工作展望

本文系统的研究了K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图，是在丘及其合作者[5]提出了图上 Ricci-曲率定义之后对 Ricci-平坦图的进一步研究，研究结果显示了丘的定义的合理性及其与对称性可以与微分几何的 Ricci-平坦流形有某种内在关联。对于K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图的边局部条件我们通过引理 5~9 已经完全刻画清楚，对于 4 圈覆盖度较低的K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图，我们也已经完全列举，而对于 4 圈覆盖度较大的K_3-, $K_{2,3}$-free 的 Ricci-平坦图我们也已经证明其必须是正则的，但是究竟这些正则图是否进能够通过覆盖度较小的正则图的笛卡尔乘积+强覆盖映射生成，还有待日后进一步的研究工作。进一步的研究工作将聚焦在图的对称性上，Cayley 图也是非常重要的研究对象，作为一名中学生，我将进一步加强抽象代数和拓扑学方面知识的学习，期待之后可以彻底刻画K_3-, $K_{2,3}$-free 甚至仅仅是K_3-free 的 Ricci-平坦图。而刻画全部包含K_3的平坦图相信是一个非常困难的问题，希望在大学阶段能够进一步深入研究。

在我的研究过程中，D. Cushing 等人[9]开发的图上曲率计算器给予了我很大的帮助，可以在通过网站(https://www.mas.ncl.ac.uk/graph-curvature/)快速验证引理 5~9 的正确性，在此表示衷心感谢。

六. 参考文献

[1]D. Bakry and M. Emery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177–206, Lecture Notes in Math. 1123, Springer, Berlin, 1985.
[2]Y. Ollivier, Ricci curvature of Markov chains on metric spaces, J. Funct. Anal. 256 (3) (2009), 810–864.
[3]F. Chung and S.-T. Yau, Logarithmic Harnack inequalities, Math. Res. Lett. 3 (1996), 793–812.
[4]Y. Lin, L. Lu and S.-T. Yau, Ricci curvature of graphs, Tohoku Math. J. 63(4) (2011), 605–627.
[5]Y. Lin, L. Lu, and S.-T. Yau, Ricci-flat graphs with girth at least five, Comm. Anal. Geom. 22 (2014), no 4, 671-687.
[6]D. Cushing, R. Kangaslampi, Y. Lin, S. Liu, L. Lu and S.-T. Yau,Erratum for Ricci-flat graphs with girth at least five, Communications in Analysis and Geometry, 2019, accepted
[7]W. He, J. Luo, C. Yang, W. Yuan. Ricci-flat graphs with girth four. arXiv preprint arXiv:1807.07253, 2018.
[8]S. Bai, L. Lu, S.-T. Yau, Ricci-flat graphs with maximum degree at most 4, 2018, preprint.
[9] D. Cushing, R. Kangaslampi, V. Lipiäinen, S. Liu, G. Stagg. The Graph Curvature Calculator and the curvatures of cubic graphs. arXiv:1712.03033, 2017.

七. 附录 A：引理 5~9 的证明

假设一个围长为 4 的图$G=<V,E>$是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，即无三角形且任意两个 4 圈最多共享一条边，那么对于该图中某边$xy \in E(G)$，不失一般性假设$d_x \le d_y$。

设x的邻居中有k个与y的邻居相连，显然这k个点每个都只恰好和 1 个y的邻居相连，否则会出现两个四圈共享 2 条边。所以y的邻居中也恰有k个和x的邻居相连，设这k个y的邻居组成的集合为S， 设它们在$\Gamma(x)$中的邻居组成的集合为T。再令$S' = \Gamma(y)/\{x\}/S$，即y的邻居中不在经过xy的 4 圈的部分。类似地，令$T' = \Gamma(x)/\{y\}/T$，即x的邻居中不在经过xy的 4 圈的部分。那么，令

引理 4 已经得出了$\kappa(x,y)=0$时d_x, d_y, k要满足的必要条件，下面再进一步分析$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件。

情况一：当$d_x = k+1$，$d_y = k+3$，$k>0$。

假设S'中的两个点中的某点m与x的一个邻居n距离为 2：

令：

$$A_1(u,v)=\begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}t_i \in T, v = s_i \\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u \in T/\{n\}, v=y \\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=n, v=m \\ 2\dfrac{1-\alpha}{k+3}-\dfrac{1-\alpha}{k+1} & \text{当}u=y, v=m \\ \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=y, v\in S'/\{m\} \\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x, v=y \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$$

容易验证 A_1 是一个m_x^α和m_y^α间的 *coupling*。 所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \le \sum_{u,v\in V} A_1(u,v)\, d(u,v)$$

$$= A_1(x,y) + \sum_{u\in T} A_1(u, N(u)\cap N(y)) + 2\sum_{u\in T/\{n\}} A_1(u,y) + 2A(n,m) + A(y,m) + \sum_{v\in N(y)/(\{x,n\}/S)} A_1(y,v)$$

$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{k+3} + k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 2(k-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 2\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 2\frac{1-\alpha}{k+3}-\frac{1-\alpha}{k+1}+\frac{1-\alpha}{k+3}$$

$$= -\frac{k-2}{k+3}(1-\alpha) + \frac{2k-1}{k+1}(1-\alpha) + \alpha$$

所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{1-\alpha} \ge \frac{k-2}{k+3} - \frac{2k-1}{k+1} + 1 = \frac{k-2}{k+3} - \frac{k-2}{k+1}$。

若$k<3$：

则$k=1$或2。当$k=1$，$\frac{k-2}{k+3}-\frac{k-2}{k+1} = \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3} > 0$，所以$\kappa(x,y)>0$。因此若要$\kappa(x,y)=0$，$k \ne 1$。所以$k=2$。此时，设 T 中的两点为 x_1，x_2，N(y)/(S∪{x})中的两点为 y_1，y_2。首先，若要$\kappa(x,y)=0$，不可能 x_1，x_2 都与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2。因为否则有如下两种情况：

1. x_1，x_2 都与 N(y)/(S∪{x})中的同一点（不失一般性假设为 y_1）距离为 2。
2. x_1，x_2 分别与 N(y)/(S∪{x})中的两点距离为 2（不失一般性假设$d(x_1,y_1)=d(x_2,y_2)=2$）。

情况 1 时，可以令

$$A_2(u,v)\begin{cases}\frac{1-\alpha}{5} & 当u\in T, v\in N(u)\cap N(y)\\ \frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5} & 当u=x_1, v=y_1\\ \frac{1}{2}(\frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5}) & 当u=x_2, v=y_1\\ \frac{1}{2}(\frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5}) & 当u=x_2, v=y\\ \frac{(1-\alpha)}{5} & 当u=y, v=y_2\\ \alpha-\frac{1-\alpha}{5} & 当u=x, v=y\\ 0 & 其余情况\end{cases}$$

容易验证 A_2 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)\le\sum_{u,v\in V}A_2(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A_2(x,y)+\sum_{u\in T}A_2(u,N(u)\cap N(y))+2A_2(x_1,y_1)+2A_2(x_2,y_2)+2A_2(x_2,y)+A_2(y,y_2)$$

$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{5}+2\left(\frac{1-\alpha}{5}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5}\right)+(\frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5})+(\frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5})+\frac{1-\alpha}{5}$$

$$=1+\frac{1}{3}(1-\alpha)-\frac{2}{5}(1-\alpha)$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}>0$，与$\kappa(x,y)=0$矛盾。

情况 2 时，可以令

$$A_2(u,v)\begin{cases}\frac{1-\alpha}{5} & 当u\in T, v\in N(u)\cap N(y)\\ \frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5} & 当u=x_1, v=y_1\\ \frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5} & 当u=x_2, v=y_2\\ \frac{(1-\alpha)}{15} & 当u=y, v=\{y_1,y_2\}\\ \alpha-\frac{1-\alpha}{5} & 当u=x, v=y\\ 0 & 其余情况\end{cases}$$

容易验证 A_2 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)\le\sum_{u,v\in V}A_2(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A_2(x,y)+\sum_{u\in T}A_2(u,N(u)\cap N(y))+2A_2(x_1,y_1)+2A_2(x_2,y_2)+2A_2(y,y_1)+A_2(y,y_2)$$

$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{5}+2\left(\frac{1-\alpha}{5}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5}\right)+2(\frac{1-\alpha}{3}-\frac{1-\alpha}{5})+\frac{2(1-\alpha)}{15}$$

$$=1-\frac{2}{15}(1-\alpha)$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge\frac{2}{15}>0$，与$\kappa(x,y)=0$矛盾。

因此，当$k=2$，若要$\kappa(x,y)=0$，x_1，x_2中最多有 1 点都与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2。又因为根据假设 x_1，x_2 中至少有 1 点都与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2。因此，当$k=2$，$\kappa(x,y)=0$的必要条件是 x_1，x_2中恰有 1 点都与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2。这个必要条件也是充分的，因为不失一般性假设 x_1，x_2中只有 x_1与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2。首先，前面已

经证明过$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \le \sum_{u,v\in V} A_1(u,v)\, d(u,v) = -\frac{k-2}{k+3}(1-\alpha) + \frac{2k-1}{k+1}(1-\alpha) + \alpha$，所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{1-\alpha} \ge \frac{k-2}{k+3} - \frac{2k-1}{k+1} + 1 = \frac{k-2}{k+3} - \frac{k-2}{k+1} = 0$。同时，令

$$f(u) = \begin{cases} -1 & u = x_2 \\ 1 & u \in \{y\} \cup (S/N(x_2)) \\ 2 & u \in (N(y)/\{x\})/S \\ 0 & \text{其余情况.} \end{cases}$$

显然，f(u)是一个1-李普希茨的函数，所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \ge \sum_{u\in V} f(u)\,[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)]$$
$$= \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{3}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{3}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{5}\right) + 4\frac{1-\alpha}{5}$$
$$= 1$$

$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{1-\alpha} \le 0$。因此$\kappa(x,y) = 0$。

若$k \ge 3$：

假设 N(y)/(S∪{x})中的两点为 y_1，y_2。设 x 的邻居中有 p 个点与 y_1 距离为 2，这 p 个点组成集合 P；设 x 的邻居中有 q 个点与 y_2 距离为 2，这 q 个点组成集合 Q。设 P 中的点在 S 中的邻居组成集合 P’, Q 中的点在 S 中的邻居组成集合 Q’。

首先证明若$\kappa(x,y) = 0$，$|P \cup Q| \ge k-1$。

令：

$$f_1(u) = \begin{cases} 1 & u \in \{x\} \cup (P \cup Q) \cup (S/(P' \cup Q')) \\ 2 & u \in \{y\} \cup (P' \cup Q') \\ 3 & u \in \{y_1, y_2\} \\ 0 & \text{其余情况.} \end{cases}$$

显然，f(u)是一个1-李普希茨的函数，所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \ge \sum_{u\in V} f_1(u)\,[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)]$$
$$= 2\left(\alpha - \frac{1-\alpha}{k+1}\right) - \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{k+3}\right) + (k - |P\cup Q|)\frac{1-\alpha}{k+3} - |P\cup Q|\frac{1-\alpha}{k+1} + 2|P\cup Q|\frac{1-\alpha}{k+3} + 6\frac{1-\alpha}{k+3}$$
$$= \alpha + \frac{k + |P\cup Q| + 7}{k+3}(1-\alpha) - \frac{2 + |P\cup Q|}{k+1}(1-\alpha)$$

$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{1-\alpha} \le \frac{2+|P\cup Q|}{k+1} - \frac{k+|P\cup Q|+7}{k+3} + 1$。

所以若$\kappa(x,y) = 0$，$\frac{2+|P\cup Q|}{k+1} - \frac{k+|P\cup Q|+7}{k+3} + 1 \ge 0$，$\frac{k+3+|P\cup Q|}{k+1} \ge \frac{k+|P\cup Q|+7}{k+3}$，$(k+3)^2 + (k+3)|P\cup Q| \ge (k+1)(k+7) + (k+1)|P\cup Q|$，$2|P\cup Q| \ge (k+1)(k+7) - (k+3)^2 = 2k-2$，$|P\cup Q| \ge k-1$。

再证明|P|，|Q|≥ $\frac{k-3}{2}$。

令：

$$f_2(u) = \begin{cases} 1 & u \in \{x\} \cup Q \cup (S/Q') \\ 2 & u \in \{y, y_1\} \cup Q' \\ 3 & u = y_2 \\ 0 & \text{其余情况.} \end{cases}$$

显然，f(u)是一个1-李普希茨的函数，所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \ge \sum_{u\in V} f_2(u)\,[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)]$$
$$= 2\left(\alpha - \frac{1-\alpha}{k+1}\right) - \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{k+3}\right) + (k - |Q|)\frac{1-\alpha}{k+3} - |Q|\frac{1-\alpha}{k+1} + 2|Q|\frac{1-\alpha}{k+3} + 5\frac{1-\alpha}{k+3}$$

$$= \alpha + \frac{k+|Q|+6}{k+3}(1-\alpha) - \frac{2+|Q|}{k+1}(1-\alpha)$$

$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \le \frac{2+|Q|}{k+1} - \frac{k+|Q|+6}{k+3} + 1$。

所以若$\kappa(x,y)=0$，$\frac{2+|Q|}{k+1} - \frac{k+|P\cup Q|+6}{k+3} + 1 \ge 0$，$\frac{k+3+|Q|}{k+1} \ge \frac{k+|P\cup Q|+6}{k+3}$，$(k+3)^2 + (k+3)|P\cup Q| \ge (k+1)(k+6) + (k+1)|P\cup Q|$，$2|P\cup Q| \ge (k+1)(k+6) - (k+3)^2 = k-3$，$|Q| \ge \frac{k-3}{2}$。类似的，令

$$f_3(u) = \begin{cases} 1 & u \in \{x\}\cup P \cup (S/P') \\ 2 & u \in \{y, y_2\} \cup P' \\ 3 & u = y_1 \\ 0 & \text{其余情况.} \end{cases}$$

则可以证明$|P| \ge \frac{k-3}{2}$。

现在根据$|P\cup Q|$的值进行讨论。因为$k-1 \le |P\cup Q| \le k$，所以$|P\cup Q| = k-1$或k。当$|P\cup Q| = k-1$：

首先，$|P/Q| = |P\cup Q| - |Q| \le k-1-\frac{k-3}{2} = \frac{k+1}{2}$。同理$|Q/P| \le \frac{k+1}{2}$。则$|P/Q|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \le \frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{k+1}{2k+6} = \frac{(k+3)-(k+1)}{2k+6} = \frac{2}{2k+6} = \frac{1}{k+3}$。类似的$|Q/P|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \le \frac{1}{k+3}$。当$|P\cap Q| = 0$，$|P/Q| = P, |Q/P| = Q$，因此，可以令

$$A(u,v)\begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in T, v = N(u)\cap N(y) \\ \dfrac{1-\alpha}{k+1} - \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u \in T/(P\cup Q), v = y \\ \dfrac{1-\alpha}{k+1} - \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in P, v = y_1 \\ \dfrac{1-\alpha}{k+1} - \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in Q, v = y_2 \\ \dfrac{1-\alpha}{k+3} - |P|(\dfrac{1-\alpha}{k+1} - \dfrac{1-\alpha}{k+3}) & \text{当}u = y, v = y_1 \\ \dfrac{1-\alpha}{k+3} - |Q|\left(\dfrac{1-\alpha}{k+1} - \dfrac{1-\alpha}{k+3}\right) & \text{当}u = y, v = y_2 \\ \alpha - \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u = x, v = y \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) \le \sum_{u,v\in V} A(u,v)\, d(u,v)$$

$$= A(x,y) + \sum_{u\in T} A(u, N(u)\cap N(y)) + 2\sum_{u\in T/(P\cup Q)} A(u,y) + 2\sum_{u\in P} A(u,y_1) + 2\sum_{u\in Q} A(u,y_2) + A(y,y_1) + A(y,y_2)$$

$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{k+3} + k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 2\left(\frac{1-\alpha}{k+1} - \frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 2(|P|+|Q|)(\frac{1-\alpha}{k+1} - \frac{1-\alpha}{k+3}) + \frac{1-\alpha}{k+3} - |P|(\frac{1-\alpha}{k+1} - \frac{1-\alpha}{k+3}) + \frac{1-\alpha}{k+3} - |Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1} - \frac{1-\alpha}{k+3}\right)$$

$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{k+3} + k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 2\left(\frac{1-\alpha}{k+1} - \frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 2(k-1)(\frac{1-\alpha}{k+1} - \frac{1-\alpha}{k+3}) + 2\frac{1-\alpha}{k+3} - (k-1)(\frac{1-\alpha}{k+1} - \frac{1-\alpha}{k+3})$$

$$= 1$$

所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \ge 0$。

又因为此时$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) \ge \sum_{u\in V} f_1(u)\left[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)\right] = \alpha + \frac{k+|P\cup Q|+7}{k+3}(1-\alpha) - \frac{2+|P\cup Q|}{k+1}(1-\alpha) = \alpha + \frac{2k+6}{k+3}(1-\alpha) - \frac{k+1}{k+1}(1-\alpha) = 1$，所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \le 0$。故$\kappa(x,y) = 0$。

当$|P\cap Q| > 0$：

若 k 为偶数，设 $k=2a$。不失一般性假设 $|P/Q|\le|Q/P|$。显然 $|P/Q|\le\left\lfloor\frac{|P/Q|+|Q/P|}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{|P\cup Q|-|P\cap Q|}{2}\right\rfloor$。若 $|P\cap Q|>1$，$|P/Q|\le\left\lfloor\frac{|P\cup Q|-|P\cap Q|}{2}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{2a-1-2}{2}\right\rfloor=a-2$。所以 $|P/Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\le(a-2)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)=\frac{k-4}{2}\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)=\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)(1-\alpha)$。$\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)(1-\alpha)<(k-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)-\frac{1-\alpha}{k+3}=\frac{(k-1)(1-\alpha)}{k+1}-\frac{k(1-\alpha)}{k+3}$，因为 $\left(\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}\right)-\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)=\frac{k+2}{2k+2}-\frac{k+4}{2k+6}$，而 $(k+2)(2k+6)=2k^2+10k+12>2k^2+10k+8=(2k+2)(k+4)$，故 $\frac{k+2}{2k+2}>\frac{k+4}{2k+6}$，$\frac{k+2}{2k+2}-\frac{k+4}{2k+6}>0$；因此，$\left(\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}\right)-\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)>0$，$\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}>\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}$，$\frac{(k-1)(1-\alpha)}{k+1}-\frac{k(1-\alpha)}{k+3}>\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)(1-\alpha)$。那么，可以令：

$$
A_1(u,v)\begin{cases}
\frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in T,v=N(u)\cap N(y)\\
\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in T/(P\cup Q),v=y\\
\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in P/Q,v=y_1\\
\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in Q/P,v=y_2\\
\frac{1}{|P\cap Q|}\left(\frac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right) & \text{当}u\in P\cap Q,v=y_2\\
\frac{1}{|P\cap Q|}\left(\left(\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}\right)(1-\alpha)-|P/Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right) & \text{当}u\in P\cap Q,v=y_1\\
\left(\frac{k+1}{k+3}-\frac{k-1}{k+1}\right)(1-\alpha) & \text{当}u=y,v=y_1\\
\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x,v=y\\
0 & \text{其余情况}
\end{cases}
$$

容易验证 A_1 是一个 m_x^α 和 m_y^α 间的 coupling。所以：

$$
W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\le\sum_{u,v\in V}A_1(u,v)\,d(u,v)
$$

$$
=A_1(x,y)+\sum_{u\in T}A_1(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in T/(P\cup Q)}A_1(u,y)+2\sum_{u\in P/Q}A_1(u,y_1)+2\sum_{u\in Q/P}A_1(u,y_2)+2\sum_{u\in P\cap Q}A_1(u,y_1)
$$
$$
+2\sum_{u\in P\cap Q}A_1(u,y_2)+A_1(y,y_1)
$$
$$
=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2|P/Q+Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right)
$$
$$
+2\left(\left(\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}\right)(1-\alpha)-|P/Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right)+\left(\frac{k+1}{k+3}-\frac{k-1}{k+1}\right)(1-\alpha)
$$
$$
=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2(k-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\frac{1-\alpha}{k+3}-(k-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)
$$
$$
=1
$$

所以 $\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge0$。

又因为此时 $W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\ge\sum_{u\in V}f_1(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]=\alpha+\frac{k+|P\cup Q|+7}{k+3}(1-\alpha)-\frac{2+|P\cup Q|}{k+1}(1-\alpha)=\alpha+\frac{2k+6}{k+3}(1-\alpha)-\frac{k+1}{k+1}(1-\alpha)=1$，所以 $\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\le0$。故 $\kappa(x,y)=0$。

若 $|P\cap Q|=1$，$|P/Q|\le\left\lfloor\frac{|P\cup Q|-|P\cap Q|}{2}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{2a-1-1}{2}\right\rfloor=a-1$。当 $|P/Q|\le a-2$，A_1 仍是一个 m_x^α 和 m_y^α 间的 coupling，所以我们仍可以推出 $\kappa(x,y)=0$。当 $|P/Q|=a-1$，$\frac{1}{k+3}-(|P/Q|+|P\cap Q|)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{2a+3}-a\left(\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{2a+3}\right)=\frac{a+1}{2a+3}-\frac{a}{2a+1}$。又因为 $(a+1)(2a+1)=2a^2+3a+1>$

$2a^2+3a=a(2a+3)$，所以$\frac{a+1}{2a+3}>\frac{a}{2a+1}$，$\frac{a+1}{2a+3}-\frac{a}{2a+1}>0$，$\frac{1}{k+3}-(|P/Q|+|P\cap Q|)(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3})>0$，$(|P/Q|+|P\cap Q|)(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3})<\frac{1}{k+3}$。因此，可以令

$$A_2(u,v)\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u\in T,v=N(u)\cap N(y)\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u\in T/(P\cup Q),v=y\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u\in P/Q,v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u\in Q/P,v=y_2\\ \left(\dfrac{k-1}{k+1}-\dfrac{k}{k+3}\right)(1-\alpha) & 当u\in P\cap Q,v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+3}-(|P/Q|+|P\cap Q|)\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)(1-\alpha) & 当u=y,v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)(1-\alpha) & 当u=y,v=y_2\\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u=x,v=y\\ 0 & 其余情况\end{cases}$$

容易验证 A_2是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\le\sum_{u,v\in V}A_2(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A_2(x,y)+\sum_{u\in T}A_2(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in T/(P\cup Q)}A_2(u,y)+2\sum_{u\in P/Q}A_2(u,y_1)+2\sum_{u\in Q/P}A_2(u,y_1)+2\sum_{u\in P\cap Q}A_2(u,y_2)$$
$$+A_2(y,y_1)+A_2(y,y_2)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2|P/Q+Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2|P\cap Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+\frac{1-\alpha}{k+3}$$
$$-(|P/Q|+|P\cap Q|)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)(1-\alpha)+\frac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)(1-\alpha)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2(k-1)(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3})+2\frac{1-\alpha}{k+3}-(k-1)(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3})$$

$$=1$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge0$。

又因为此时$W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\ge\sum_{u\in V}f_1(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]=\alpha+\frac{k+|P\cup Q|+7}{k+3}(1-\alpha)-\frac{2+|P\cup Q|}{k+1}(1-\alpha)=\alpha+\frac{2k+6}{k+3}(1-\alpha)-\frac{k+1}{k+1}(1-\alpha)=1$，所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\le0$。故$\kappa(x,y)=0$。

若k为奇数，设$k=2a+1$。不失一般性假设$|P/Q|\le|Q/P|$。显然$|P/Q|\le\left\lfloor\frac{|P/Q|+|Q/P|}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{|P\cup Q|-|P\cap Q|}{2}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{2a+1-1}{2}\right\rfloor=a-1$。所以$|P/Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\le(a-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)=\frac{k-3}{2}\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)=(\frac{k-3}{2k+2}-\frac{k-3}{2k+6})(1-\alpha)$。$\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)(1-\alpha)\le(k-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)-\frac{1-\alpha}{k+3}=\frac{(k-1)(1-\alpha)}{k+1}-\frac{k(1-\alpha)}{k+3}$，因为$\left(\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}\right)-\left(\frac{k-3}{2k+2}-\frac{k-3}{2k+6}\right)=\frac{k+1}{2k+2}-\frac{k+3}{2k+6}$，而$(k+1)(2k+6)=2k^2+8k+7>2k^2+8k+6=(2k+2)(k+3)$，故$\frac{k+2}{2k+2}>\frac{k+4}{2k+6}$，$\frac{k+2}{2k+2}-\frac{k+4}{2k+6}>0$；因此，$\left(\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}\right)-\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)>0$，$\frac{k-1}{k+1}-\frac{k}{k+3}>\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}$，$\frac{(k-1)(1-\alpha)}{k+1}-\frac{k(1-\alpha)}{k+3}>\left(\frac{k-4}{2k+2}-\frac{k-4}{2k+6}\right)(1-\alpha)$。因此$A_1$仍是一个$m_x^\alpha$和$m_y^\alpha$间的 coupling，所以我们仍可以推出$\kappa(x,y)=0$。

因此，当$|P\cup Q|=k-1$，$|P|,|Q|\ge\frac{k-3}{2}$是$\kappa(x,y)=0$的充分条件。又因为前面证明过$|P|,|Q|\ge\frac{k-3}{2}$是$\kappa(x,y)=0$的必要条件，所以当$|P\cup Q|=k-1$，$|P|,|Q|\ge\frac{k-3}{2}$是$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件。

当$|P\cup Q|=k$：

若k为奇数，设$k=2a+1$。$|Q/P|=|P\cup Q|-|Q|\le \left\lfloor k-\frac{k-3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{k+3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2a+4}{2}\right\rfloor=a+2$。同理$|P/Q|\le a+2$。

若$|P/Q|$或$|Q/P|$等于$a+2$，不失一般性假设$|P/Q|=a+2$。则$Q=k-|P/Q|=2a+1-a-2=a-1$。因为$(|P/Q|-1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=(a+1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{k+1}{2k+6}=\frac{k+3-(k+1)}{2k+6}=\frac{2}{2k+6}=\frac{1}{k+3}$；$|Q|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=(a-1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)<(a+1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{k+3}$。因此，假设某点$n\in|P/Q|$，可以令：

$$A_1(u,v)\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in T,v=N(u)\cap N(y)\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in (P/Q)/\{n\},v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in Q,v=y_2\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=n,v=y\\ \dfrac{1-\alpha}{k+3}-|Q|\left(\dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right) & \text{当}u=y,v=y_2\\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x,v=y\\ 0 & \text{其余情况}\end{cases}$$

容易验证A_1是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A_1(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A_1(x,y)+\sum_{u\in T}A_1(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in(P/Q)/\{n\}}A_1(u,y_1)+2\sum_{u\in Q}A_1(u,y_2)+2A_1(n,y)+A_1(y,y_2)$$

$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2(|P/Q|-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2|Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+\frac{1-\alpha}{k+3}-|Q|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)$$

$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2k\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+\frac{1-\alpha}{k+3}-\left(\frac{k-3}{2}\right)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)$$

$$=1$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\ge0$。

又因为此时$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\ge\sum_{u\in V}f_2(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]=\alpha+\frac{k+|Q|+6}{k+3}(1-\alpha)-\frac{2+|Q|}{k+1}(1-\alpha)=\alpha+\frac{2a+1+a-1+6}{2a+4}(1-\alpha)-\frac{2+a-1}{2a+2}(1-\alpha)=1$，所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\le0$。故$\kappa(x,y)=0$。

若$|P/Q|$，$|Q/P|<a+2$。则显然$|P/Q|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\le(a+1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{k+3}$，同理$|Q/P|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\le\frac{1}{k+3}$。同时，不失一般性假设$|P/Q|\le|Q/P|$。显然$|P/Q|\le\frac{|P/Q|+|P/Q|}{2}\le\frac{|P\cup Q|}{2}=\frac{k-1}{2}$，所以$|P/Q|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\le\frac{k-1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{k+3}$。因此，可以令

$$A_2(u,v)\begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u\in T, v=N(u)\cap N(y) \\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u\in P/Q, v=y_1 \\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u\in Q/P, v=y_2 \\ \dfrac{1}{|P\cap Q|}\left(\dfrac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|\left(\dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right)\right) & \text{当} u\in P\cap Q, v=y_2 \\ \dfrac{1}{|P\cap Q|}\left((k-|P/Q|)\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)-\dfrac{1}{k+3}\right) & \text{当} u\in P\cap Q, v=y_1 \\ 2\dfrac{1-\alpha}{k+3}-k\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)(1-\alpha) & \text{当} u=y, v=y_1 \\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u=x, v=y \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$$

容易验证 A_2 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以:

$$W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\le\sum_{u,v\in V}A_2(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A_2(x,y)+\sum_{u\in T}A_2(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in P/Q}A_2(u,y_1)+2\sum_{u\in Q/P}A_2(u,y_1)+2\sum_{u\in P\cap Q}A_2(u,y_2)+2\sum_{u\in P\cap Q}A_2(u,y_1)$$
$$+A_2(y,y_1)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2|P/Q+Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right)$$
$$+2\left((k-|P/Q|)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{k+3}\right)+2\frac{1-\alpha}{k+3}-k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)(1-\alpha)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2k\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\frac{1-\alpha}{k+3}-k\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1-\alpha}{k+3}+\frac{k(1-\alpha)}{k+1}$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}>0$。

因此，当k为奇数$2a+1$，$\kappa(x,y)=0$当且仅当$|P/Q|$或$|Q/P|$等于 $a+2$。

若 k 为偶数，设 $k=2a$。$|Q/P|=|P\cup Q|-|Q|\le\left\lfloor k-\frac{k-3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{k+3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2a+3}{2}\right\rfloor=a+1$。同理$|P/Q|\le a+1$。

不失一般性假设$|P/Q|\le|Q/P|$。显然$|P/Q|\le\frac{|P/Q|+|P/Q|}{2}\le\frac{|P\cup Q|}{2}=\frac{k-1}{2}$，所以$|P/Q|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\le\frac{k-1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{k+3}$。

若$|Q/P|=a+1$，此时$|P|=|P\cup Q|-|Q/P|=2a-a-1=a-1$。因为$\left(|Q/P|-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{k+1}{2k+6}=\frac{k+3-(k+1)}{2k+6}=\frac{2}{2k+6}=\frac{1}{k+3}$。又因为$|P/Q|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\le|P|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{k-2}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=(k-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=(k-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{k+3}$。

因此，假设某点$n\in|Q/P|$，可以令:

$$A_1(u,v)\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in T, v=N(u)\cap N(y)\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in P/Q, v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in (Q/P)/\{n\}, v=y_2\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right) & \text{当}u=n, v=y_2\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right) & \text{当}u=n, v=y\\ \dfrac{1}{|P\cap Q|}((k-\dfrac{1}{2}-|P/Q|)\left(\dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right)-\dfrac{1-\alpha}{k+3}) & \text{当}u\in P\cap Q, v=y_1\\ 2\dfrac{1-\alpha}{k+3}-(k-\dfrac{1}{2})\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)(1-\alpha) & \text{当}u=y, v=y_1\\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x, v=y\\ 0 & \text{其余情况}\end{cases}$$

容易验证 A_2是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A_1(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A_1(x,y)+\sum_{u\in T}A_1(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in P/Q}A_1(u,y_1)+2\sum_{u\in(Q/P)/\{n\}}A_1(u,y_2)+2A_1(n,y_2)+2A_1(n,y)$$
$$+2\sum_{u\in P\cap Q}A_1(u,y_1)+A_1(y,y_1)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2(|P/Q|)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2(|Q/P|-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)$$
$$+2\left(k-\frac{1}{2}-|P/Q|\right)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)-2\frac{1-\alpha}{k+3}+2\frac{1-\alpha}{k+3}-(k-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)(1-\alpha)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\frac{1-\alpha}{k+3}+\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+(2k-1)\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)-\frac{2}{k+3}+2\frac{1-\alpha}{k+3}-(k$$
$$-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)(1-\alpha)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)>0$。

若 $|Q/P|<a+1$，因为 $|Q/P|\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\le a\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)<\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{k+1}{2k+6}=\frac{k+3-(k+1)}{2k+6}=\frac{2}{2k+6}=\frac{1}{k+3}$。因此，假设某点$n\in|Q/P|$，可以令：

$$A_2(u,v)\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u\in T, v=N(u)\cap N(y)\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u\in P/Q, v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u\in Q/P, v=y_2\\ \dfrac{1}{|P\cap Q|}(\dfrac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|(\dfrac{1-\alpha}{k+1}-\dfrac{1-\alpha}{k+3})) & 当u\in P\cap Q, v=y_2\\ \dfrac{1}{|P\cap Q|}((k-|P/Q|)\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)-\dfrac{1}{k+3}) & 当u\in P\cap Q, v=y_1\\ 2\dfrac{1-\alpha}{k+3}-k\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)(1-\alpha) & 当u=y, v=y_1\\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & 当u=x, v=y\\ 0 & 其余情况\end{cases}$$

容易验证 A_2是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A_2(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A_2(x,y)+\sum_{u\in T}A_2(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in P/Q}A_2(u,y_1)+2\sum_{u\in Q/P}A_2(u,y_1)+2\sum_{u\in P\cap Q}A_2(u,y_2)+2\sum_{u\in P\cap Q}A_2(u,y_1)$$
$$+A_2(y,y_1)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2|P/Q+Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+3}-|Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right)$$
$$+2\left((k-|P/Q|)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{k+3}\right)+2\frac{1-\alpha}{k+3}-k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)(1-\alpha)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2k\left(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\frac{1-\alpha}{k+3}-k(\frac{1-\alpha}{k+1}-\frac{1-\alpha}{k+3})$$

$$=\frac{1-\alpha}{k+3}+\frac{k(1-\alpha)}{k+1}$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\ge\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}>0$。

综上所述，当$|P\cup Q|=k$，$\kappa(x,y)=0$当且仅当k为奇数且$|P/Q|$或$|Q/P|$等于$\frac{k+3}{2}$。

假设 N(y)/(S∪{x})中的两个点中的点与 x 的所有邻居 n 距离均为 3：

令

$$f(u)=\begin{cases}1 & u\in\{x\}\cup S\\ 2 & u=y\\ 3 & u\in(N(y)/\{x\})/S\\ 0 & 其余情况.\end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\ge\sum_{u\in V}f(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]$$
$$=\frac{1-\alpha}{k+3}-\alpha+2\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{k+1}\right)+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+3(k+3-k-1)\frac{1-\alpha}{k+3}$$
$$=\alpha-\frac{2(1-\alpha)}{k+1}+\frac{(k+7)(1-\alpha)}{k+3}$$
$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\le\frac{2}{k+1}-\frac{4}{k+3}$$

若$\kappa(x,y)=0$，则$\frac{2}{k+1}-\frac{4}{k+3}\ge0$，$\frac{2}{k+1}\ge\frac{4}{k+3}$，$4k+4\le2k+6$，$k\le1$。又因为$k>0$，所以$k=1$。

所以当 N(y)/(S∪{x})中的两个点中的点与 x 的所有邻居 n 距离均为 3，$\kappa(x,y)=0$的必要条件是$k=1$。这个必要条件也是充分的，因为前面证明过$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\geq\frac{2}{d_x}+\frac{2k+2}{d_y}-2=\frac{2}{2}+\frac{2+2}{4}-2=0$。又因为$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\leq\frac{2}{k+1}-\frac{4}{k+3}=\frac{2}{1+1}-\frac{4}{1+3}=0$，因此$\kappa(x,y)=0$。

综上所述，当$d_x=k+1$，$d_y=k+3$，$k>0$，$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件是边xy满足如下四种情况之一：

1. $k=1$，N(y)/(S∪{x}) 中的两个点与 x 的所有邻居距离均为 3。
2. $k=2$，T 中恰好有一个点与 N(y)/(S∪{x}) 中的某点距离为 2。
3. $k\geq 3$，T 中有$k-1$个点与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2，且 N(y)/(S∪{x})中的两点分别都与至少$\frac{k-3}{2}$个 T 中的点距离为 2。
4. $k\geq 3$，k 为奇数，T 中有k个点与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2；且假设 N(y)/(S∪{x})中的两点为 y_1，y_2，T 中有$\frac{k+3}{2}$个点只与 y_1 距离为 2，有至少至少$\frac{k-3}{2}$个与 y_2 距离为 2。

情况二：当$d_x=k+2$，$d_y=k+3$。

假设 N(x)/(T∪{y})中的唯一点为 x_1，N(y)/(S∪{x})中的两点为 y_1, y_2。首先，若$\kappa(x,y)=0$，x_1 必与 y_1, y_2 中的某个相连，否则，令

$$f(u)=\begin{cases}-1 & u=x_1\\ 1 & u\in\{y\}\cup S\\ 2 & u\in(N(y)/\{x\})/S\\ 0 & \text{其余情况.}\end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以:

$$\begin{aligned}W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)&\geq\sum_{u\in V}f(u)\,[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)]\\&=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{k+2}\right)+\frac{1-\alpha}{k+2}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+4\frac{1-\alpha}{k+3}\\&=1+\frac{1-\alpha}{k+3}\end{aligned}$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\leq-\frac{1}{k+3}<0$。

那么，有两种情况

1. x_1 只与 y_1, y_2 中的某一个距离为 2，不失一般性假设为 y_1。
2. x_1 与 y_1, y_2 距离均为 2。

情况 1：

假设 T 中有 p 个点与 y_2 距离为 2，这 p 个点组成集合 P，这 p 个点在 N(y)中的邻居组成集合 P’。令：

$$f(u)=\begin{cases}1 & u\in\{x\}\cup P\cup(N(y)/\{x\})/P'\\ 2 & u\in\{y,y_1\}\cup P'\\ 3 & u=y_2\\ 0 & \text{其余情况.}\end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以:

$$\begin{aligned}W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)&\geq\sum_{u\in V}f(u)\,[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)]\\&=\frac{1-\alpha}{k+3}-\alpha+2\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{k+2}\right)-p\frac{1-\alpha}{k+2}+2p\frac{1-\alpha}{k+3}+(k-p)\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+5\frac{1-\alpha}{k+3}\\&=\alpha+\frac{(p+k+6)(1-\alpha)}{k+3}-\frac{(p+2)(1-\alpha)}{k+2}\end{aligned}$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\leq 1+\frac{(p+2)(1-\alpha)}{k+2}-\frac{(p+k+6)(1-\alpha)}{k+3}=\frac{(p+2)(1-\alpha)}{k+2}-\frac{(p+3)(1-\alpha)}{k+3}$。要使$\kappa(x,y)=0$，$\frac{(p+2)(1-\alpha)}{k+2}-\frac{(p+3)(1-\alpha)}{k+3}\geq 0$，$\frac{p+2}{k+2}\geq\frac{x+3}{k+3}$，$(k+2)p+3k+6\leq(k+3)p+2k+6$，

$p \ge k$。又因为显然$p \le k$，所以当 x_1 只与 y_1, y_2 中的某一个距离为 2，$\kappa(x,y)=0$的必要条件是$p=k$。这个必要条件也是充分的，因为当$|P\cup Q|=k-1$，我们已经证明$\kappa(x,y)\le \frac{(p+2)(1-\alpha)}{k+2}-\frac{(p+3)(1-\alpha)}{k+3}=\frac{(k+2)(1-\alpha)}{k+2}-\frac{(k+3)(1-\alpha)}{k+3}=0$ 。同时， $p\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=k\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)<(k+2)\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=1-\frac{k+2}{k+3}=\frac{1}{k+3}$，所以$p\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)<\frac{1-\alpha}{k+3}$，可以令

$$A(u,v)\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{k+2} & \text{当}u\in T, v=N(u)\cap N(y)\\ \dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in P, v=y_2\\ \dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x_1, v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x_1, v=y\\ \dfrac{1-\alpha}{k+3}-p(\dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}) & \text{当}u=y, v=y_2\\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x, v=y\\ 0 & \text{其余情况}\end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A(x,y)+\sum_{u\in T}A(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in P}A(u,y_2)+2A(x_1,y_1)+2A(x_1,y)+A(y,y_2)$$

$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2k\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\frac{1-\alpha}{k+3}+2\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+\frac{1-\alpha}{k+3}-k(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3})$$
$$=1$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge0$。因此$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}=0$。

情况 2：

假设 T 中有 p 个点与 y_1距离为 2，这 p 个点组成集合 P；有 1 个点与 y_1距离为 2，这 p 个点组成集合 Q。同时$p\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\le k\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)<(k+2)\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=1-\frac{k+2}{k+3}=\frac{1}{k+3}$，所以$p\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)<\frac{1-\alpha}{k+3}$；同理$|Q/P|\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\le q\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)<\frac{1}{k+3}$，所以$|Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)<\frac{1-\alpha}{k+3}$。同时，$\frac{1-\alpha}{k+2}-\left(\frac{1-\alpha}{k+3}-p\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right)+|Q/P|\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)=\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}+(p+|Q/P|)\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)=(|P\cup Q|+1)\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\le(k+1)\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)<(k+2)\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)=\frac{1-\alpha}{k+3}$。所以，可以令：

$$A(u,v)\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{k+2} & \text{当}u\in T, v=N(u)\cap N(y)\\ \dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in P, v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in Q/P, v=y_2\\ \dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u\in T/(P\cup Q), v=y\\ \dfrac{1-\alpha}{k+3}-p\left(\dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right) & \text{当}u=x_1, v=y_1\\ \dfrac{1-\alpha}{k+2}-\left(\dfrac{1-\alpha}{k+3}-p\left(\dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right)\right) & \text{当}u=x_1, v=y_2\\ \dfrac{1-\alpha}{k+3}-(|P\cup Q|+1)\left(\dfrac{1-\alpha}{k+2}-\dfrac{1-\alpha}{k+3}\right) & \text{当}u=y, v=y_2\\ \alpha-\dfrac{1-\alpha}{k+3} & \text{当}u=x, v=y\\ 0 & \text{其余情况}\end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以:

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A(x,y)+\sum_{u\in T}A(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{u\in P}A(u,y_1)+2\sum_{u\in Q/P}A(u,y_2)+2\sum_{u\in T/(P\cup Q)}A(u,y)+2A(x_1,y_1)$$
$$+2A(x_1,y_2)+A(y,y_2)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+3}+k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2(p+|Q/P|+|T/(P\cup Q)|)\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{k+3}-p\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right)$$
$$+2\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\left(\frac{1-\alpha}{k+3}-p\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)\right)\right)+\frac{1-\alpha}{k+3}-(|P\cup Q|+1)\left(\frac{1-\alpha}{k+2}-\frac{1-\alpha}{k+3}\right)$$
$$=\alpha+\frac{(|P\cup Q|-k+1)(1-\alpha)}{k+3}+\frac{(2k+1-|P\cup Q|)(1-\alpha)}{k+2}$$

所以 $\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge1+\frac{k-1-|P\cup Q|}{k+3}+\frac{|P\cup Q|-2k-1}{k+2}=\frac{k-1-|P\cup Q|}{k+3}+\frac{|P\cup Q|-k+1}{k+2}$。要使 $\kappa(x,y)=0$,则 $\frac{k-1-|P\cup Q|}{k+3}+\frac{|P\cup Q|-k+1}{k+2}\le0$,$\frac{|P\cup Q|-k+1}{k+2}\le\frac{|P\cup Q|-k+1}{k+3}$,$(k+3)(|P\cup Q|-k+1)\le(k+2)(|P\cup Q|-k+1)$,$|P\cup Q|-k+1\le0$,$|P\cup Q|\le k-1$。这也意味着$0\le k-1$,$1\le k$。同时,令

$$f(u)=\begin{cases}-1 & u\in T/(P\cup Q)\\ 1 & u\in\{y\}\cup P'\cup Q'\\ 2 & u\in(N(y)/\{x\})/S\\ 0 & \text{其余情况.}\end{cases}$$

显然,f(u)是一个 1-李普希茨的函数,所以:

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\ge\sum_{u\in V}f(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{k+2}+(k-|P\cup Q|)\frac{1-\alpha}{k+2}+|P\cup Q|\frac{1-\alpha}{k+3}+4\frac{1-\alpha}{k+3}$$
$$=\alpha+\frac{(|P\cup Q|+4)(1-\alpha)}{k+3}+\frac{(k-1-|P\cup Q|)(1-\alpha)}{k+2}$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\le1-\frac{|P\cup Q|+4}{k+3}+\frac{-k+1+|P\cup Q|}{k+2}=-\frac{|P\cup Q|+4}{k+3}+\frac{|P\cup Q|+3}{k+2}$。要使$\kappa(x,y)=0$,$-\frac{|P\cup Q|+4}{k+3}+\frac{|P\cup Q|+3}{k+2}\ge0$,$\frac{|P\cup Q|+3}{k+2}\ge\frac{|P\cup Q|+4}{k+3}$,$(k+3)|P\cup Q|+3k+9\ge(k+2)|P\cup Q|+2k+8$,$|P\cup Q|\ge k-1$。因此,$x_1$与 y_1, y_2距离均为 2,$\kappa(x,y)=0$的必要条件是$|P\cup Q|=k-1$。这个必要条件也是充分的,因当$|P\cup Q|=k-1$,我们已经证明$\kappa(x,y)\ge\frac{k-1-|P\cup Q|}{k+3}+\frac{|P\cup Q|-k+1}{k+2}=\frac{k-1-(k-1)}{k+3}+\frac{k-1-k+1}{k+2}=0$,且$\kappa(x,y)\le-\frac{|P\cup Q|+4}{k+3}+\frac{|P\cup Q|+3}{k+2}=-\frac{k-1+4}{k+3}+\frac{k-1+3}{k+2}=0$。所以$\kappa(x,y)=0$。

综上所述，当$d_x = k+2$，$d_y = k+3$，$\kappa(x,y) = 0$的充分必要条件是边xy满足如下两种情况之一：

1. N(x)/(T∪{y}) 中的唯一一点只与 N(y)/(S∪{x})中的一点 y_1 距离为 2，且 T 中恰有k个点与 N(y)/(S∪{x})中的另一点 y_2 距离为 2。

2. $k \geq 1$，k 为奇数，N(x)/(T∪{y}) 中的唯一一点与 N(y)/(S∪{x})中的两点距离均为 2，且 T 中恰有$k-1$个点与 N(y)/(S∪{x})中的某点距离为 2。

情况三：当$d_x = d_y = k+2$。

假设 N(x)/(T∪{y}) 中的唯一一点为 x_1，N(y)/(S∪{x})中唯一一点为 y_1。假设 x_1 与 y_1 距离为 2，令

$$A(u,v)\begin{cases} \frac{1-\alpha}{k+2} & 当u \in T, v = N(u)\cap N(y) \\ \frac{1-\alpha}{k+2} & 当u = x_1, v = y_1 \\ \alpha - \frac{1-\alpha}{k+2} & 当u = x, v = y \\ 0 & 其余情况 \end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \leq \sum_{u,v\in V} A(u,v)\, d(u,v)$$
$$= A(x,y) + \sum_{u\in T} A(u, N(u)\cap N(y)) + 2A(x_1,y_1)$$
$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{k+2} + k\left(\frac{1-\alpha}{k+2}\right) + 2\frac{1-\alpha}{k+2}$$
$$= \alpha + \frac{(k+1)(1-\alpha)}{k+2}$$

所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \geq 1 - \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2} > 0$。所以当$d_x = d_y = k+2$，$\kappa(x,y) = 0$的必要条件是 x_1 与 y_1 距离为 3。这个必要条件也是充分的，因为当 x_1 与 y_1 距离为 3，我们已经证明$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \geq \frac{2}{d_x} + \frac{2k+2}{d_y} - 2 = \frac{2}{k+2} + \frac{2k+2}{k+2} - 2 = 0$。又因为此时令

$$f(u) = \begin{cases} -1 & u = x_1 \\ 1 & u \in \{y\}\cup S \\ 2 & u \in (N(y)/\{x\})/S \\ 0 & 其余情况. \end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \geq \sum_{u\in V} f(u)\,[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)]$$
$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{k+2} + \frac{1-\alpha}{k+2} + k\frac{1-\alpha}{k+2} + 2\frac{1-\alpha}{k+3}$$
$$= 1$$

$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \leq 0$。因此$\kappa(x,y) = 0$。

所以当$d_x = d_y = k+2$，$\kappa(x,y) = 0$的充分必要条件是 x_1 与 y_1 距离为 3。

情况四：当$d_x = d_y = k+3$。

假设 N(x)/(T∪{y}) 中的两点为 x_1，x_2；N(y)/(S∪{x})中的两点为 y_1，y_2。假设 x_1，x_2 中某点与 y_1，y_2 距离均为 3（不失一般性假设为 x_1），那么，令

$$f(u) = \begin{cases} -1 & u = x_1 \\ 1 & u \in \{y\}\cup S \\ 2 & u \in (N(y)/\{x\})/S \\ 0 & 其余情况. \end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) \geq \sum_{u \in V} f(u)\left[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)\right]$$
$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{k+3} + \frac{1-\alpha}{k+3} + k\frac{1-\alpha}{k+3} + 4\frac{1-\alpha}{k+3}$$
$$= \alpha + \frac{(k+4)(1-\alpha)}{k+3}$$

$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha} \leq 1 - \frac{k+4}{k+3} = -\frac{1}{k+3} < 0$，因此若要$\kappa(x,y) = 0$，$x_1$，$x_2$ 必须都与 y_1，y_2 中某点距离均为 2。同理 y_1，y_2 必须都与 x_1，x_2 中某点距离均为 2。因此，当$d_x = d_y = k+3$，$\kappa(x,y) = 0$的必要条件是 x_1，x_2 都与 y_1，y_2 中某点距离均为 2 且 y_1，y_2 必须都与 x_1，x_2 中某点距离都为 2。这个必要条件也是充分的，因为在满足该条件时，若 x_1 与 y_1，y_2 距离均为 2，x_2 也必须与 y_1，y_2 中某点距离为 2，不失一般性假设为 y_2；若 x_1 只与 y_1，y_2 中一点距离为 2，不失一般性假设为 y_1，那么因为 y_2 也必须与 x_1，x_2 中某点距离均为 2，所以 y_2 只能与 x_2 距离为 2。此时，令

$$A(u,v)\begin{cases} \frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u \in T, v = N(u) \cap N(y) \\ \frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u = x_1, v = y_1 \\ \frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u = x_2, v = y_2 \\ \alpha - \frac{1-\alpha}{k+3} & \text{当} u = x, v = y \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) \leq \sum_{u,v \in V} A(u,v)\, d(u,v)$$
$$= A(x,y) + \sum_{u \in T} A(u, N(u) \cap N(y)) + 2A(x_1,y_1) + 2A(x_2,y_2)$$
$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{k+3} + k\left(\frac{1-\alpha}{k+3}\right) + 4\frac{1-\alpha}{k+3}$$
$$= 1$$

所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha} \geq 0$。

又因为前面已经证明$\kappa(x,y) \leq \frac{1}{d_x} + \frac{k+2}{d_y} - 1 = \frac{1}{k+3} + \frac{k+2}{k+3} - 1 = 0$，因此$\kappa(x,y) = 0$。

因此，当$d_x = d_y = k+3$，$\kappa(x,y) = 0$的充分必要条件是 x_1，x_2 都与 y_1，y_2 中某点距离为 2 且 y_1，y_2 必须都与 x_1，x_2 中某点距离为 2。

情况五：$d_x = k+1$，$d_y = k+4$，$k = 1$。

假设 T 中的唯一一点为 x_1；N(y)/(S∪{x})中的三点为 y_1，y_2，y_3。假设 x_1 与 y_1，y_2，y_3 距离均为 3，那么，令

$$f(u) = \begin{cases} -1 & u = x_1 \\ 1 & u = y \\ 2 & u \in (N(y)/\{x\})/S \\ 0 & \text{其余情况.} \end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) \geq \sum_{u \in V} f(u)\left[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)\right]$$
$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2} + 6\frac{1-\alpha}{5}$$
$$= \alpha + \frac{6(1-\alpha)}{5}$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\le 1-\frac{6}{5}=-\frac{1}{5}<0$，因此若要$\kappa(x,y)=0$，$x_1$ 必须至少与 y_1，y_2，y_3 中一点距离均为 2；同时，x_1 最多与 y_1，y_2，y_3 中一点距离均为 2，因为假设 x_1 最多与 y_1，y_2，y_3 中 p>1 个点距离均为 2，这 p 个点组成集合 P。因为$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=0.15<\frac{1}{5}$，所以$\frac{1}{p}\left(\frac{1-\alpha}{2}-\frac{1-\alpha}{5}\right)<\frac{1-\alpha}{5}$，可以令

$$A(u,v)\begin{cases}\frac{1-\alpha}{5} & \text{当}u\in T,v=N(u)\cap N(y)\\ \frac{1}{p}\left(\frac{1-\alpha}{2}-\frac{1-\alpha}{5}\right) & \text{当}u=x_1,v\in P\\ \frac{1-\alpha}{5}-\frac{1}{p}\left(\frac{1-\alpha}{2}-\frac{1-\alpha}{5}\right) & \text{当}u=y,v\in P\\ \frac{1-\alpha}{5} & \text{当}u=y,v\in (N(y)/S)/P\\ \alpha-\frac{1-\alpha}{5} & \text{当}u=x,v=y\\ 0 & \text{其余情况}\end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A(x,y)+\sum_{u\in T}A(u,N(u)\cap N(y))+2\sum_{v\in P}A(x_1,v)+\sum_{v\in P}A(y,v)+\sum_{v\in(N(y)/S)/P}A(y,v)$$

$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{5}+\frac{1-\alpha}{5}+2(\frac{1-\alpha}{2}-\frac{1-\alpha}{5})+p\frac{1-\alpha}{5}-\left(\frac{1-\alpha}{2}-\frac{1-\alpha}{5}\right)+(3-p)\frac{1-\alpha}{5}$$

$$=\alpha+\frac{2(1-\alpha)}{5}+\frac{1-\alpha}{2}$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge 1-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=0.1>0$。

因此，当$d_x=k+1$，$d_y=k+4$，$k=1$，$\kappa(x,y)=0$的必要条件是 x_1恰与 y_1，y_2，y_3中一点距离均为 2。这个必要条件也是充分的，因为不失一般性假设 y_1，y_2，y_3中，x_1只与 y_1， 距离为 2，那么，令

$$A(u,v)\begin{cases}\frac{1-\alpha}{5} & \text{当}u\in T,v=N(u)\cap N(y)\\ \frac{1-\alpha}{5} & \text{当}u=x_1,v=y_1\\ \frac{1-\alpha}{10} & \text{当}u=x_1,v=y\\ \frac{1-\alpha}{5} & \text{当}u=y,v\in\{y_2,y_3\}\\ \alpha-\frac{1-\alpha}{5} & \text{当}u=x,v=y\\ 0 & \text{其余情况}\end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A(u,v)\,d(u,v)$$

$$=A(x,y)+\sum_{u\in T}A(u,N(u)\cap N(y))+2A(x_1,y_1)+2A(x_1,y)+\sum_{v\in\{y_2,y_3\}}A(y,v)$$

$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{5}+\frac{1-\alpha}{5}+2\frac{1-\alpha}{5}+2\frac{1-\alpha}{10}+2\frac{1-\alpha}{5}$$

$$=1$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha}\ge 0$。

同时，令

$$f(u)=\begin{cases}-1 & u=x_1\\ 1 & u\in\{y,y_1\}\\ 2 & u\in\{y_2,y_3\}\\ 0 & \text{其余情况.}\end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\geq\sum_{u\in V}f(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{2}+\frac{1-\alpha}{2}+5\frac{1-\alpha}{5}$$
$$=1$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\leq0$，因此 $\kappa(x,y)=0$。

因此，当$d_x=k+1$，$d_y=k+4$，$k=1$，$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件是 x_1恰与 y_1，y_2，y_3中一点距离均为 2。

情况六：$d_x=k+1$，$d_y=k+4$，$k=2$。

假设 T 中的两点为 x_1，x_2，N(y)/(S∪{x})中的三点为 y_1，y_2，y_3。若 x_1，x_2中有一点与 y_1，y_2，y_3距离均为三（不失一般性假设为 x_1），那么，令

$$f(u)=\begin{cases}-1 & u=x_1\\ 1 & u=y\\ 2 & u\in(N(y)/\{x\})/S\\ 0 & \text{其余情况.}\end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\geq\sum_{u\in V}f(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{6}+\frac{1-\alpha}{3}+6\frac{1-\alpha}{6}$$
$$=\alpha+\frac{7(1-\alpha)}{6}$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\leq1-\frac{7}{6}=-\frac{1}{6}<0$，因此若要$\kappa(x,y)=0$，$x_1$，$x_2$ 必须都至少与 y_1，y_2，y_3中一点距离均为 2。在满足这个条件前提下，假设 x_1与 y_1，y_2，y_3中 p>1 个点距离为 2，这些点组成集合 P，那么随便选定 y_1，y_2，y_3中一个与 x_2距离为 2 的点，不失一般性假设为 y_2，那么 $|P/\{y_2\}|\geq|P|-|\{y_2\}|=p-1>0$，所以 $P/\{y_2\}$不是空集，里面必定还包含至少一个顶点。假设 x_1仅与 y_1，y_2，y_3中的 1 个点，不失一般性假设为 y_1，距离为 2，那么 x_2也必须至少与 y_1，y_2，y_3中一点距离均为 2。假设 x_2只与 y_1距离为 2，那么令

$$f(u)=\begin{cases}1 & u=x\cup S\\ 2 & u\in\{y,y_1\}\\ 3 & u=y_2\\ 0 & \text{其余情况.}\end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\geq\sum_{u\in V}f(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]$$
$$=\frac{1-\alpha}{3}-\alpha+2\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{6}\right)+\frac{1-\alpha}{6}+7\frac{1-\alpha}{6}$$
$$=\alpha+\frac{4(1-\alpha)}{3}$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\leq1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}<0$，因此，若要$\kappa(x,y)=0$，$x_2$ 必须与 y_2，y_3 中一点距离均为 2。

综上所述，当$d_x=k+1$，$d_y=k+4$，$k=2$，$\kappa(x,y)=0$的必要条件是 x_1，x_2 分别与两个不同的 y_1，y_2，y_3中的点距离为 2。这个必要条件也是充分的，因为在满足该条件前提下，不失一般性假设$d(x_1,y_1)=d(x_2,y_2)=2$，令

$$A(u,v)\begin{cases}\frac{1-\alpha}{6} & 当u\in T, v=N(u)\cap N(y)\\ \frac{1-\alpha}{6} & 当u=x_1, v=y_1\\ \frac{1-\alpha}{6} & 当u=x_2, v=y_2\\ \frac{1-\alpha}{6} & 当u=y, v=y_3\\ \alpha-\frac{1-\alpha}{6} & 当u=x, v=y\\ 0 & 其余情况\end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)\le\sum_{u,v\in V}A(u,v)\,d(u,v)$$
$$=A(x,y)+\sum_{u\in T}A(u,N(u)\cap N(y))+2A(x_1,y_1)+2A(x_2,y_2)+A(y,y_3)$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{6}+2\frac{1-\alpha}{6}+2\frac{1-\alpha}{6}+2\frac{1-\alpha}{6}+\frac{1-\alpha}{6}$$
$$=1$$

所以$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\ge0$。

又因为前面证明过明$\kappa(x,y)\le\frac{1}{d_x}+\frac{k+2}{d_y}-1=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}-1=0$，所以$\kappa(x,y)=0$。

因此，当$d_x=k+1$，$d_y=k+4$，$k=2$，$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件是 x_1，x_2 分别与两个不同的 y_1，y_2，y_3 中的点距离为 2。

情况七：$d_x=k+1$，$d_y=k+5$，$k=1$。

假设 T 中的唯一一点为 x_1，N(y)/(S∪{x})中的四点为 y_1，y_2，y_3，y_4。假设 x_1 与 y_1，y_2，y_3，y_4 中的 p 个点距离为 2，这 p 个点组成集合 P。那么，令

$$f(u)=\begin{cases}1 & u\in\{x\}\cup S\\ 2 & u\in\{y\}\cup P\\ 3 & u\in\{y_1,y_2,y_3,y_4\}/P\\ 0 & 其余情况.\end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)\ge\sum_{u\in V}f(u)\left[m_y^\alpha(u)-m_x^\alpha(u)\right]$$
$$=\frac{1-\alpha}{6}-\alpha+2\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{2}\right)+\frac{1-\alpha}{6}+2p\frac{1-\alpha}{6}+3(4-p)\frac{1-\alpha}{6}$$
$$=\alpha+\frac{4(1-\alpha)}{3}-p\frac{1-\alpha}{6}$$

$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\le1-\frac{4}{3}+\frac{p}{6}=-\frac{1}{3}+\frac{p}{6}$，因此若要$\kappa(x,y)=0$，$-\frac{1}{3}+\frac{p}{6}\ge0$，$\frac{p}{6}\ge\frac{1}{3}$，$p\ge2$。因此，当$d_x=k+1$，$d_y=k+5$，$k=1$，$\kappa(x,y)=0$的必要条件是$p\ge2$。这个必要条件也是充分的，因为只要$p\ge2$，不失一般性假设 P 中有两点 y_1，y_2，可以令

$$A(u,v)\begin{cases}\frac{1-\alpha}{6} & 当u\in T, v=N(u)\cap N(y)\\ \frac{1-\alpha}{6} & 当u=x_1, v\in\{y_1,y_2\}\\ \frac{1-\alpha}{6} & 当u=y, v\in\{y_3,y_4\}\\ \alpha-\frac{1-\alpha}{6} & 当u=x, v=y\\ 0 & 其余情况\end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \le \sum_{u,v\in V} A(u,v)\, d(u,v)$$

$$= A(x,y) + \sum_{u\in T} A(u, N(u)\cap N(y)) + 2\sum_{v\in\{y_1,y_2\}} A(x_1,v) + 2\sum_{v\in\{y_3,y_4\}} A(y,v)$$

$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{6} + \frac{1-\alpha}{6} + 2\frac{1-\alpha}{6} + 2\frac{1-\alpha}{6} + 2\frac{1-\alpha}{6}$$

$$= 1$$

所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \ge 0$。

又因为前面证明过明$\kappa(x,y) \le \frac{1}{d_x} + \frac{k+2}{d_y} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} - 1 = 0$，所以$\kappa(x,y) = 0$。

因此，当$d_x = k+1$，$d_y = k+5$，$k = 1$，$\kappa(x,y) = 0$的充分必要条件是 x_1 与 y_1，y_2，y_3，y_4 中的至少两点距离为 2。

情况八：$d_x = k+2$，$d_y = k+4$，$k = 0$。

假设 N(x)/{y}中的唯一一点为 x_1，N(y)/{x}中的三点为 y_1，y_2，y_3 。 假设 x_1 与 y_1，y_2，y_3中的 p 个点距离为 2，这 p 个点组成集合 P。那么，令

$$f(u) = \begin{cases} 1 & u\in\{x\}\cup S \\ 2 & u\in\{y\}\cup P \\ 3 & u\in\{y_1,y_2,y_3\}/P \\ 0 & \text{其余情况.} \end{cases}$$

显然，f(u)是一个 1-李普希茨的函数，所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \ge \sum_{u\in V} f(u)\,[m_y^\alpha(u) - m_x^\alpha(u)]$$

$$= \frac{1-\alpha}{4} - \alpha + 2\left(\alpha - \frac{1-\alpha}{2}\right) + 2p\frac{1-\alpha}{4} + 3(3-p)\frac{1-\alpha}{4}$$

$$= \alpha + \frac{3(1-\alpha)}{2} - p\frac{1-\alpha}{4}$$

$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \le 1 - \frac{3}{2} + \frac{p}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{p}{4}$，因此若要$\kappa(x,y) = 0$，$-\frac{1}{2} + \frac{p}{4} \ge 0$，$\frac{p}{4} \ge \frac{1}{2}$，$p \ge 2$。因此，当$d_x = k+2$，$d_y = k+4$，$k = 0$，$\kappa(x,y) = 0$的必要条件是$p \ge 2$。这个必要条件也是充分的，因为只要$p \ge 2$，不失一般性假设 P 中有两点 y_1，y_2，可以令

$$A(u,v)\begin{cases} \frac{1-\alpha}{4} & \text{当}u = x_1, v\in\{y_1,y_2\} \\ \frac{1-\alpha}{4} & \text{当}u = y, v = y_3 \\ \alpha - \frac{1-\alpha}{4} & \text{当}u = x, v = y \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$$

容易验证 A 是一个m_x^α和m_y^α间的 coupling。 所以：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \le \sum_{u,v\in V} A(u,v)\, d(u,v)$$

$$= A(x,y) + 2\sum_{v\in\{y_1,y_2\}} A(x_1,v) + A(y,y_3)$$

$$= \alpha - \frac{1-\alpha}{4} + 4\frac{1-\alpha}{4} + \frac{1-\alpha}{4}$$

$$= 1$$

所以$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha,m_y^\alpha)}{1-\alpha} \ge 0$。

又因为前面证明过明$\kappa(x,y) \le \frac{1}{d_x} + \frac{k+2}{d_y} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} - 1 = 0$，所以$\kappa(x,y) = 0$。

因此，当$d_x = k+2$，$d_y = k+4$，$k = 0$，$\kappa(x,y) = 0$的充分必要条件是 x_1与 N(y)/{x}中的至少两点距离为 2。

综上所述，$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件是引理 5~9。□

八. 附录 B：定理 1 和 2 的证明

我们将通过分类讨论合并一起证明定理 1&2。
定理 1：Ricci-平坦图G是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，并且$\rho(G)<2$，则G必定为有限个图类之一。
定理 2：Ricci-平坦图G是K_3-, $K_{2,3}$-free 的，并且$\rho(G)\geq 2$，则G必定为正则图。
证明：

一个非正则的 Ricci-Flat 图必定包含若干端点两端点度数不相等的边。假设该图所有两端点度数不相等的边中，k 的最小值为 k_{min}。若 $k_{min}\geq 2$：

情况一：存在一条边 xy 的 k 值为 k_{min}，且 $d_x=k_{min}+1$，$d_y=k_{min}+3$。

情况一.1：k_{min} 为偶数。

显然 $k_{min}\geq 2$。同时，不难证明 $k_{min}=2$ 是不可能的。若 $k_{min}=2$，如图所示，假设 T 中两点为 x_1，x_2，S 中两点为 y_1，y_2，N(y)/(S∪{x})中两点为 y_3，y_4。因为 $d_x=k_{min}+1=3$，所以根据已有的充要条件 xx_1，xx_2 的 k 值最多为 $d_x-1=2$。假如 xx_1 或 xx_2 的 k 值小于 2 定理二得证。假如 xx_1，xx_2 的 k 值均为 2，那么根据已有的充要条件 x_1，x_2 度数均为 5。另外，易知必定有一个四圈同时包含 xx_1 和 xx_2，假设该四圈除 x，x_1 和 x_2 外另一顶点为 x_3。假设 x_1 除 x，y_1，x_3 外的两邻居为 x_4，x_5，x_2 除 x，y_2，x_3 外的两邻居为 x_6，x_7。根据充要条件 1，x_1，x_2 中恰有一个与 y_3，y_4 中某点距离为 2。不失一般性假设只有 x_2 与 y_3，y_4 中某点距离为 2。不妨假设 x_2 与 y_3 距离为 2，则 y_3 必须与 x_2 的邻居——x，y_2，x_3，x_6，x_7——中的一个相连。容易验证 y_3 与 x 或 y_2 相连均会产生 3 圈，y_3 与 x_3 相连则 x_1，x_2 与 y_3 距离均为 2。因此，y_3 只能与 x_6 或 x_7 相连，不失一般性假设 y_3 与 x_6 相连。

现在考虑边 xx_1。根据充要条件 1，y，x_2 中恰有一点与 x_4，x_5 中的某点相连。若 x_4，x_5 中某点与 y 距离为 2，则该点必须与 y 的邻居——x，y_1，y_2，y_3，y_4——中的某点相连。该点与 x 或 y_1 相连会产生 3 圈，与 y_3 或 y_4 相连会导致 x_1 与 y_3 或 y_4 距离为 2 (如图所示)。该点与 y_2 相连会导致 y，x_2 均与该点距离为 2 (如图所示)。因此，只能是 x_4，x_5 中某点与 x_2 距离为 2。则该点必须与 x_2 的邻居——x，y_2，x_3，x_6，x_7——中的一个相连。可以验证该点只能与 x_6 或 x_7 相连，但如图所示，两种情况下都会导致 y 与 x_1 均和 x_6，x_7 中某点距离为 2，根据充要条件 1，xx_2 的曲率不能为 0。

综上，k_{min} 不能为 2。

情况一.2：k_{min} 为奇数。

情况二：存在一条边 xy 的 k 值为 k_{min}，且 $d_x=k_{min}+2$，$d_y=k_{min}+3$。

假设一个有限 Ricci-Flat 图 G 中所有边的 k 的最小值为 0：

情况一：G 中存在一条边 xy 满足 xy 的 k 值为 0 且 $d_x=d_y=2$。

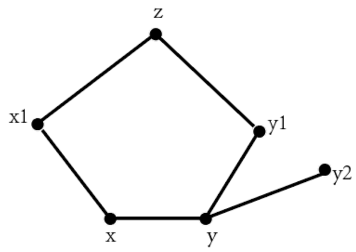
假设 x 除 y 外的唯一邻居为 x_1，y 除 x 外的唯一邻居为 y_1。首先不能有四圈经过 xx_1，否则仅有的两条以 x 为顶点的边 xy，x_1y_1 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 x_1y_1。也不能有五圈经过 xx_1，否则仅有的两条以 x 为顶点的边 xy，x_1y_1 都必须包含在该五圈内，故仅有的两条以 y 为顶点的边 xy，x_1y_1 都必须包含在该五圈内。假设该五圈除 x，x_1，y，y_1 外另一顶点为 p，则 x_1，y_1 有公共邻居 p，x_1y_1 距离为 2，根据充要条件 5，xy 曲率不能为 0。综上，不能有四圈或五圈经过 xx_1，根据已有的充要条件，x_1 度数为 2。同理 y_1 度数为 2。

由此可见图 G 无论怎样扩张都只能扩张出 k 值为 0，两端点度数均为 2 的边，G 是一个二正则图。再结合已有的充要条件，情况一下 G 只能为 C_n（n≥6）或无线路。

情况二：G 中存在一条边 xy 满足 xy 的 k 值为 0 且 $d_x=2$，$d_y=3$。

根据我们前面得出的$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件，N(x)/(T∪{y})中的唯一一点 x_1 只与 N(y)/(S∪{x})中的一点 y_1 距离为 2。设 N(y)/(S∪{x})中的另一点为 y_2，x_1，y_1 的一个公共邻居为 z，如下图所示。

现在考虑边 yy_1。因为 y 的度数为 3，所以 yy_1 最多有 3-1=2 个四圈经过。但 yy_1 不可能有 2 个四圈经过，否则必有一个经过 yy_1 的四圈包含边 xy，则 xy 的 k 值不为 0。因此，yy_1 最多有 1 个四圈经过。



情况二.1：对于所有满足情况二的边 xy，yy_1 都没有四圈经过。

现在考虑边 yy_2。因为 xy，yy_1 的 k 值均为 0，所以没有四圈经过 yy_2。又因为 y 度数为 3，所以根据已有的充要条件，y_2 度数为 2 或 3。假如 y_2 度数为 3，则 x 必须与 $N(y_2)/(S\cup\{y\})$中的某点 p 距离为 2。则 p 必须与 x 除 y 外的唯一邻居 x_1 相连，则 x_1 与 y_1，y_2 距离均为 2；根据充要条件 6，xy 的曲率不能为 0。因此，y_2 度数不能为 3，y_2 度数为 2。假设 y_2 除 y 外另一邻居为 y_3，容易验证 y_3 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 yy_1 的 k 值为 0，y 度数为 3，所以根据已有的充要条件 y_1 的度数为 2 或 3。假如 y_1 度数为 2，考虑边 yy_2。根据充要条件 6，y_3 必须与 x，y_1 中的一个距离为 2。若 y_3 与 x 距离为 2 则 y_3 必须与 x 除 y 外的唯一邻居 x_1 相连。此时 x_1 与 y_1，y_2 距离均为 2；根据充要条件 6，xy 的曲率不能为 0。若 y_3 与 y_1 距离为 2 则 y_3 必须与 y_1 除 y 外的唯一邻居 z 相连。此时 z 与 x，y_2 距离均为 2；根据充要条件 6，yz 的曲率不能为 0。综上，y_1 度数不能为 2，y_1 度数为 3。假设 y_1 除 y，z 外另一邻居为 y_4。容易验证 y_4 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_1。根据充要条件 8，y_4 必须与 x，y_2 中的一个距离为 2。若 y_4 与 x 距离为 2 则 y_4 必须与 x 除 y 外的唯一邻居 x_1 相连。若 y_4 与 y_2 距离为 2 则 y_4 必须与 y_2 除 y 外的唯一邻居 y_3 相连。

情况二.1.I：y_4 与 y_3 相连。

现在考虑边 y_2y_3。首先没有四圈经过 y_2y_3，否则仅有的两条以 y_2 为端点的边 yy_2，y_2y_3 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 yy_2。又因为 y_2 度数为 2，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 3 或 4。假如 y_3 度数为 4，根据充要条件 7，y 必须与至少两个 $N(y_3)/(S\cup\{y_2\})$中的点相连。可以验证除 y_4 外，只有 z 可以与 y_3 相连，所以 z 必须与 y_3 相连。同理可证 x_1 的度数为 3 或 4，且如果 x_1 度数为 4，x_1 必须与 y_4 相连。如果 z 与 y_3 相连的同时 x_1 与 y_4 相连，会有两个四圈共享两条边。所以 y_3，x_1 中至少有一个度数为 3。不失一般性假设 y_3 度数为 3。

情况二.1.I.i：x_1 度数为 3。

假设 y_3 除 y_2，y_4 外另一邻居为 y_5，容易验证 y_5 是一个新顶点。用证明 y_1 度数为 3 同样的方法可证 y_3y_4 的 k 值为 0 且 y_4 度数为 3。假设 y_4 除 y_1，y_3 外另一邻居为 y_6，容易验证 y_6 为新顶点。根据充要条件 8，y_6 必须与 y_2，y_5 中的一个距离为 2。又因为可以验证所有与 y_2 距离为 2 的点不包含 y_6，所以 y_6 只能与 y_5 距离为 2，则 y_6 与 y_5 有公共邻居 y_7，容易验证 y_7 是一个新顶点。现在考虑边 y_5y_7。y_3y_5 的 k 值为 0 且 y_5 度数仅为 2，所以 y_5y_7 的 k 值也必须为 0。又因为 y_5 度数为 0，所以根据已有的充要条件 y_7 的度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 y_3 距离为 2 的点中，只有 y_6 可以与 y_7 相连，所以根据充要条件 7，y_7 的度数不能为 4，y_7 度数为 3。假设 y_7 除 y_5，y_6 外另一邻居为 y_8。容易验证 y_8 为 x_1，z，或一个新顶点。若 $y_8=x_1$。xx_1 的 k 值为 0，又因为 xx_1 符合情况二，所以根据我们的假设，x_1z 的 k 值为 0。因此没有四圈经过 x_1y_7。又因为 x_1，y_7 度数均为 3，所以根据充要条件 8，x 必须与 y_7，y_3 中的一个距离为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点不包含 y_7 或 y_3，所以 y_8 不能为 x_1。类似可证 y_8 不能为 z，所以 y_8 为新顶点。

现在考虑边 y_6y_7。用证明 y_1 度数为 3 同样的方法可证 y_6y_7 的 k 值为 0 且 y_6 度数为 3。假设 y_6 除 y_4，y_7 外另一邻居为 y_9，容易验证 y_9 是一个新顶点。根据充要条件 8，y_9 必须与 y_5，y_8 中的一个距离为 2。又因为可以验证所有与 y_5 距离为 2 的点不包含 y_9，所以 y_9 只能与 y_8 距离为 2，则 y_9 与 y_8 有公共邻居 y_{10}。容易验证 y_{10} 是一个新顶点。现在考虑边 y_7y_8。因为 y_5y_7 符合情况二，所以根据我们的假设 y_7y_8 的 k 值为 2。又因为 y_7 度数为 3，所以根据已有的充要条件 y_8 的度数为 2 或 3。又因为可以验证所有与 y_5 距离为 2 的点都不能与 y_8 相连，所以根据充要条件 8，y_8 度数不能为 3，y_8 度数为 2。现在考虑边 y_4y_6。因为 y_4，y_6 度数均为 3，所以根据已有的充要条件 y_4y_6 的 k 值为 0 或 1。y_6y_7，y_3y_4 的 k 值为 0，所以 $y_7\in N(y_6)/(S\cup\{y_4\})$，$y_3\in N(y_4)/(T\cup\{y_6\})$。又因为 y_3，y_7 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_4y_6 的 k 值不能为 1，y_4y_6 的 k 值为 0。根据充要条件 8，y_9 必须与 y_1，y_3 中

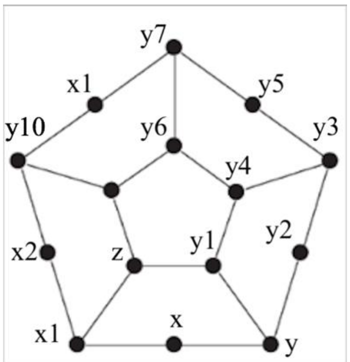
的一个距离为 2，则 y_9 必须与 y_1 或 y_3 的某个邻居相连。又因为可以验证所有与 y_1 或 y_3 相连的顶点中，只有 z 可以是 y_9 的邻居，所以 z 与 y_9 相连。

现在考虑边 y_6y_9。因为 y_6y_7，y_6y_4 的 k 值均为 0，所以 y_6y_9 的 k 值为 0。又因为 y_6 度数为 3，y_9 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件，y_9 度数为 3。

现在考虑边 x_1z。假设 x_1 除 x，z 外另一邻居为 x_2，容易验证 x_2 是一个新顶点。因为 xx_1 符合情况二，所以根据我们的假设，x_1x_2 的 k 值为 0。因为 xx_1，x_1x_2 的 k 值均为 0，所以 x_1z 的 k 值也为 0。又因为 x_1 度数为 3，z 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 z 度数为 3。根据充要条件 8，x_2 必须与 y_9，y_1 中的一个距离为 2，即 x_2 必须与 y_9 或 y_1 的一个邻居相连。又因为可以验证所有与 y_1 或 y_9 相连的顶点中，只有 y_{10} 可以是 x_2 的邻居，所以 x_2 与 y_{10} 相连。

现在考虑边 x_1x_2。因为 x_1x_2 的 k 值为 0，又因为 x_1 度数为 3，所以根据已有的充要条件，x_2 度数为 2 或 3。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以与 x_2 相连，所以根据充要条件 8，x_2 度数不能为 3，x_2 度数为 2。x_1x_2 的 k 值为 0，x_2 度数为 2 导致 x_2y_{10} 的 k 值为 0。又因为 x_2 度数为 2，所以根据已有的充要条件，y_{10} 的度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 x_1 距离为 2 的点中，只有 y_9 可以与 y_{10} 相连，所以根据充要条件 7，y_{10} 度数不能为 4，y_{10} 度数为 3。

此时，图 G 所以顶点度数均已达上限，已经不能扩张。所以，情况二.1.I.i 是只有一种 Ricci-Flat 图，可验证即为半正十二面体。

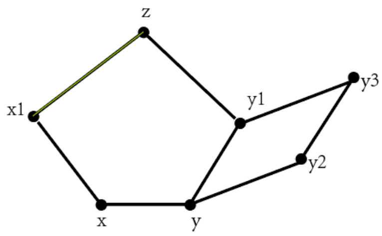


情况二.1.I.ii：x_1 度数为 4。

情况二.1.II：y_4 不与 y_3 相连。

情况二.2：存在一条满足情况二的边 xy，其中 yy_1 有 1 个四圈经过。

考虑经过 yy_1 的唯一一个四圈。该四圈必包含两条以 y 为端点的边。以 y 为端点的边只有 3 条：yx，yy_1，yy_2；又因为 yx 不能包含在该四圈中，所以该四圈必定包含边 yy_1，yy_2。现在我们已经知道该四圈 4 个端点中的 3 个为 y，y_1，y_2。假设该四圈除 y，y_1，y_2 外剩下一端点为 y_3。显然 y_3 不能为 x，同时 y_3 也不能为 x_1，否则四圈 xyy_1x_1 经过边 xy。y_3 也不能为 z，否则 x_1 与 y_1，y_2 距离均为 2，违反$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件。因此，y_3 是一个新顶点，如下图所示。

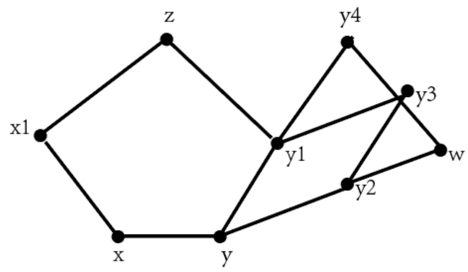


现在考虑 y_1 的度数。因为 yy_1 的 k 值为 1 且 d_y=3=k+2，所以 y_1 的度数只能为 k+2=3 或 k+3=4。同时 y_1 的度数不可能为 3，否则根据充分必要条件 5，z 和 x 的距离为 3，然而显然 z 和 x 的距离为 2，矛盾。因此 y_1 的度数只能为 4，y_1 除了 y，y_3 和 z 外还有一个邻居 y_4。容易验证 y_4 必须是一个新顶点，否则会出现三角形。

根据充分必要条件 6，有如下两种情况：

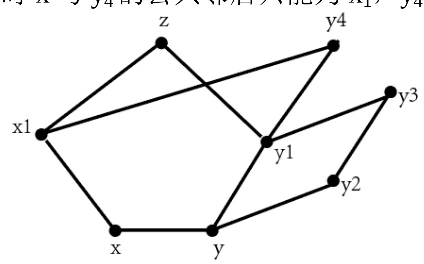
情况二.2.1：x 只与 z 距离为 2，y_2 与 y_4 距离为 2。

假设 y_2 与 y_4 的一个公共邻居为 w。容易验证 w 是一个新端点。



情况二.2.2：x 与 z，y_4 距离均为 2。

因为 x 只有邻居 x_1，所以此时 x 与 y_4 的公共邻居只能为 x_1，y_4 与 x_1 相连。



现在考虑边 xx_1。首先 xx_1 的 k 值必须为 0，因为假如有四圈经过 xx_1，仅有的两条以 x 为端点的边 xx_1 和 xy 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 xy。又因为 $d_x= 2$，所以根据我们已得到的充分必要条件 x_1 的度数只能为 3 或 4。同时，x_1 的度数不能为 3，否则根据充分必要条件 6，x_1 只能恰与 z 和 y_4 中的一个距离为 2，违反我们的假设。因此 x_1 的度数为 4。假设 x_1 除了 x，z，y_4 外的另一邻居为 x_2。容易验证 x_2 必须为一个新端点。

现在考虑边 x_1y_4。因为 x_1 度数为 4，所以它的 k 值最多为 4-1=3。而它的 k 值不能达到 3，否则必有一个 4 圈同时经过 x_1y_4 和 x_1x，与 x_1x 的 k 值为 0 矛盾。因此 x_1y_4 的 k 值最多为 2。又因为四圈 $x_1y_4y_1z$ 经过边 x_1y_4，x_1y_4 的 k 值至少为 1。所以 x_1y_4 的 k 值为 1 或 2。假设 x_1y_4 的 k 值为 1，因为 x_1 的度数为 k+3=4，所以根据已有的充分必要条件 y_4 的度数只能为 k+2=3 或 k+3=4。假设 x_1y_4 的 k 值为 2，因为 x_1 的度数为 k+2=4，所以根据已有的充分必要条件 y_4 的度数只能为 k+2=4 或 k+3=5。然而 y_4 的度数不能为 5，否则根据充分必要条件 6，x 至少要与 $N(y_4)/(S\cup\{x\})$ 中的一点距离为 2。然而与 x 距离为 2 的点只有 z，y_4，x_2，y_1 和 y_2。z，y_4，x_2 不可能属于 $N(y_4)$ 否则会出现三圈。y_1 属于 S。y_2 也不可能属于 $N(y_4)$ 否则四圈 $yy_1y_3y_2$ 和四圈 $yy_1y_4y_2$ 共享两条边：yy_1 和 yy_2。因此 x 不可能 $N(y_4)/(S\cup\{x\})$ 中的一点距离为 2，所以 x_1y_4 不符合曲率为零的充要条件。所以若 x_1y_4 的 k 值为 2，y_4 的度数为 4。

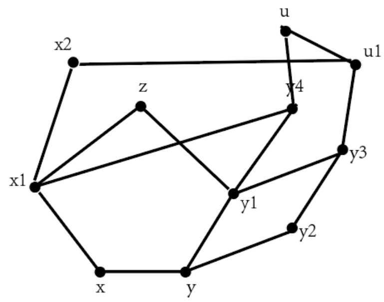
综上所述，y_4 的度数为 3 或 4。

情况二.2.2.I：y_4 的度数为 3。

假设 y_4 除了 x_1，y_1 外的另一个邻居为 u。容易验证 u 必须是一个新顶点。根据充分必要条件 6，u 只要与 y 和 y_3 中的一个距离为 2。同时，u 不可能与 y 距离为 2，否则 u 与 y 有公共邻居。该公共邻居只能为 x，y_1 或 y_2。u 不能与 x 相连，否则 x 度数超过 2；u 也不能与 y_1 相连，否则出现三圈。所以 u 只能与 y_2 相连。这时 y_2 与 y_4 距离为 2 而 x 与 z，y_4 距离均为 2，边 yy_1 违反了充要条件 6。综上，u 不可能与 y 距离为 2。因此 u 与 y_3 距离为 2。假设 u 与 y_3 的一个公共邻居为 u_1，容易验证 u_1 是一个新顶点。

继续考虑边 x_1y_4。根据充要条件 6，u 必须与 x_2 和 x 中的至少一个距离为 2。同时，如下图所示与 x 距离为 2 的点只有 x_2，z，y_4，y_1，y_2，所以 u 不可能与 x 距离为 2。因此 u 与 x_2 距离为 2。那么假设 u 与 x_2 有一公共邻居 u_2。容易验证要么 $u_2= u_1$ 或者 u_2 是一个新顶点。

情况二.2.2.I.i：$u_2= u_1$。



考虑边 x_1x_2。已经证明过 x_1x 的 k 值为 0，所以一个经过 x_1x_2 的四圈不能经过 x_1x。又因为已经有一个四圈 $x_1zy_1y_4$ 经过边 x_1y_4，且 x_1 度数为 4，y_4 度数为 3，所以根据前面得到的充分条件不能再有其他四圈经过 x_1y_4；因此，一个四圈不能同时经过 x_1x 和 x_1y_4。因此，在一个经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_2 和 z。根据两四圈最多共享一条边的假设，xx_1 的 k 值最大为 1。

情况二.2.2.I.i.i：xx_1 的 k 值为 0。

考虑边 x_1z。x_1x_2，x_1x 的 k 值均为 0，所以在一个经过 x_1z 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 y_4 和 z，因此 $x_1zy_1y_4$ 是唯一一个经过 x_1z 的四圈，x_1z 的 k 值为 1。又因为 x_1 度数为 4，所以根据前面的充要条件，z 的度数为 2，3，或 4。y_1 与 x 距离为 2，所以根据充要条件 1.1，z 的度数不可能为 2。容易验证与 x 距离为 2 的点都不可能与 z 相邻，所以根据充要条件 8，z 的度数不能为 4。因此 z 的度数为 3。假设 z 除 x_1 和 y_1 外另一邻居为 z_1，容易验证 z_1 是一个新顶点。根据充要条件 6，z_1 必须与 x 和 x_2 中的至少一个距离为 2。又因为与 x 距离为 2 的点只有 x_2，z，y_4，y_1，y_2，z_1 只能与 x_2 距离为 2；同时，x_2 的邻居只有 x_1 和 u_1，显然 z_1 不能与 x_1 相连，所以 z_1 与 u_1 相连。

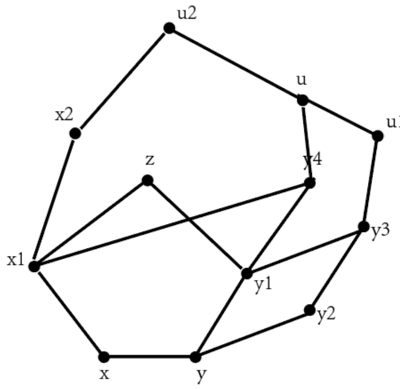
再考虑边 zz_1。一个经过 zz_1 的四圈必须经过 zx_1 或 zy_1；然而这两条边都是两端点度数分别为 3、4 且已被不经过 zz_1 的四圈 $x_1zy_1y_4$ 包含，所以根据前面的充要条件，不能再有经过 zz_1 的四圈包含它们。因此，没有四圈经过 zz_1，zz_1 的 k 值为 0。又因为 z 的度数为 3，所以根据前面的充要条件 z_1 度数为 2 或 3。又因为 u_1 与 x_1，y_1 距离均为 2，所以根据充要条件 6，z_1 度数不能为 2，所以 z_1 度数为 3。假设 z_1 除 z 和 u_1 外另一邻居为 z_2。容易验证 z_2 是一个新顶点。根据充要条件 8，z_2 必须与 x_1，y_1 中的一个距离为 2。容易验证与 x_1 距离为 2 的点中没有 z_2，所以 z_2 必须与 y_1 距离为 2。即，z_2 必须与 y_1 的邻居——z，y，y_3，y_4——相连。容易验证 z_2 只能与 y_3 相连。

再考虑边 z_1u_1。因为 zz_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 z_1u_1 的四圈中，z_1 的两邻居只能为 u_1 和 z，因此 $z_1u_1y_3z_2$ 是唯一一个经过 z_1u_1 的四圈。又因为 z_1 度数为 3，u_1 已经有 4 个邻居，所以根据已有的充要条件 u_1 度数为 4。同时，容易验证 z 与 x_2 距离为 2 而与 u 距离为 3，所以根据充要条件 6，z_2 与 u 距离为 2。那么，假设 z_2 与 u 的一个公共邻居为 z_3。容易验证 z_3 是一个新顶点。

现在考虑 uu_1。因为 u_1 度数为 4，u 已经有 3 个邻居，所以至少有 1 个四圈经过 uu_1。$z_1u_1y_3z_2$ 是唯一一个经过 z_1u_1 的四圈，所以一个经过 uu_1 的四圈不能包含 z_1u_1。如果一个四圈同时包含 uu_1 和 u_1x_2，因为 x_2 的邻居只有 x_1 和 u_1，所以该四圈只能为 $uu_1x_2x_1$，则会出现三圈 ux_1y_4。因此，一个一个经过 uu_1 的四圈也不能包含 x_2u_1。因此 1 经过 uu_1 的四圈中，u_1 的两邻居只能为 u 和 y_3。那么，该四圈除 u_1，u，y_3 外剩下一顶点只能为 y_3 除 u_1 外剩下三个邻居：y_1，y_2，z_2 中的一个。容易验证该顶点只能为 y_2。

情况二.2.2.I.i.i：xx_1 的 k 值为 1。

情况二.2.2.I.ii：u_2 是一个新顶点。

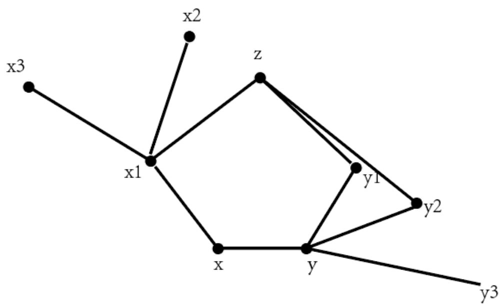


情况二.2.2.II：y_4的度数为 4。

情况三：G 中存在一条边 xy 满足 xy 的 k 值为 0 且 $d_x=2$， $d_y=4$，且不存在一条两端点度数分别为 2、3 的边。

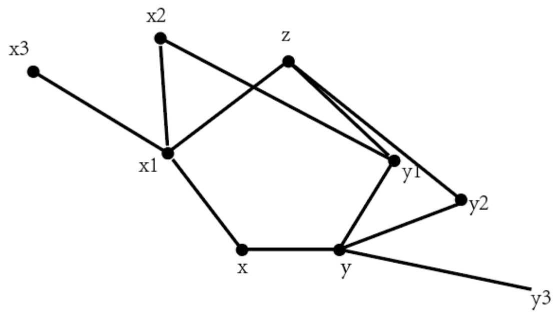
根据我们前面得出的$\kappa(x,y)=0$的充分必要条件，N(x)/(T∪{y})中的唯一一点 x_1 至少与 N(y)/(S∪{x})中的两点 y_1，y_2距离为 2。设 N(y)/(S∪{x})中的另一点为 y_3， x_1与 y_1的一个公共邻居为 z，x_1与 y_2的一个公共邻居为 w。有以下两种情况：

情况三.1：存在一条符合情况三的边 xy，使 x_1，y_1， y_2的有公共邻居为 z。



因为不存在一条两端点度数分别为 2、3 的边，所以根据前面的充要条件 x_1的度数必定为 4。假设 x_1除 z 和 x 外的两邻居为 x_2，x_3。现在考虑边 xx_1。xx_1的 k 值必须为 0，因为假如有四圈经过 xx_1，仅有的两条以 x 为端点的边 xx_1和 xy 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 xy。根据充要条件 7，y 必须与 x_2，x_3和 z 中的至少两点距离为 2。y 已经与 z 距离为 2，只需再与 x_2，x_3中的一点距离为 2。x_2，x_3地位对称，所以不失一般性假设 y 与 x_2距离为 2。也就是说 x_2必须与 y 除的邻居——x，y_1， y_2， y_3——中的某一个相连。x_2与 x 相连会产生三圈 xx_1x_2，y_1， y_2地位对称，所以只有两种不同情况：

情况三.1.1：x_2与 y_1相连。



考虑边 yy_3。因为没有四圈经过 xy，所以一个包含 yy_3的四圈中，y 的两邻居只能为 y_1，y_3或 y_1，y_3，再根据两四圈最多共享一条边的假设，yy_3的 k 值最多为 2。

情况三.1.1.I：yy_3的 k 值为 0。

考虑边 yy_1。因为 xy，yy_3的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2是经过 yy_1的唯一四圈。又因为 y 的度数为 4，y_1已有三个邻居，所以根据已有的充要条件 y_1的度数为 3 或 4。

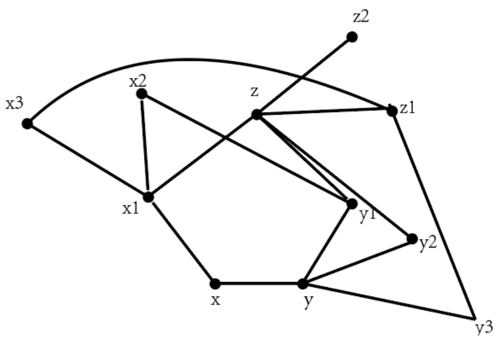
情况三.1.1.I.i：y_1的度数为 3。

继续考虑 yy_1。因为 z 与 x 距离为 2，y_1 与 x 距离为 2，所以根据充要条件 6，z 必须与 y_3 距离为 2。假设 z 与 y_3 的一个公共邻居为 z_1。容易验证 z_1 是一个新顶点。

再考虑边 y_1z。因为 y_1 的度数为 3 且已有两个四圈 yy_1zy_2 和 $y_1x_2x_1z$ 经过 y_1z，所以根据已有的充要条件 z 度数为 5。假设 z 除 x_1，y_1，y_2，z_1 外另一邻居为 z_2。容易验证 z_2 是一个新顶点。

考虑边 x_1z。因为 x_1 度数为 4，z 度数为 5，所以根据已有的充要条件有两个四圈经过 x_1z。已有四圈 $y_1x_2x_1z$ 经过 x_1z 和 x_1x_2，又因为 xx_1 的 k 值为 0，所以第二个经过 x_1z 的四圈必定同时经过 x_1z 和 x_1x_3。假设该四圈除 x_1，z 和 x_3 剩下一顶点为 u。u 必定为 z 除 x_1 外的四个邻居 y_1，y_2，z_1，z_2 中的一个。同时 u 不能为 y_1，否则 y_1 超过 3。根据充要条件 6，x 必须至少与 N(z)/({x_1，y_1，u}) 中的一个距离为 2，又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中只有 y_2 属于 N(z)/({x_1，y_1})，所以 u 也不能为 y_2。因此，u 只能为 z_1 或 z_2。

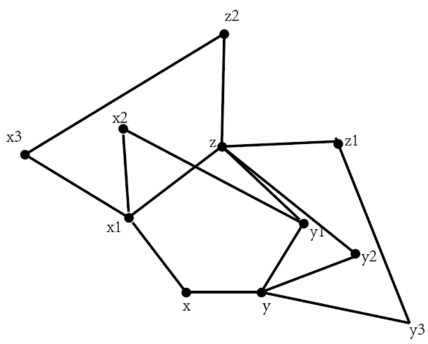
情况三.1.1.I.i.i：u 为 z_1。



继续考虑 x_1z。因为 x 只与 y_2 距离为 2，所以根据充要条件 6，x_2，x_3 都必须与 z_2 距离为 2。假设 x_2 与 z_2 的公共邻居为 v。容易验证 v 是一个新顶点。

现在考虑边 zy_1。z 度数为 5，y_1 度数为 3，有两个四圈 zy_1yy_2 和 $zy_1x_2x_1$ 经过 zy_1，但如图所示 y 与 z_1 距离为 2，x_2 与 z_2 距离为 2，所以根据充要条件 1，zy_1 的曲率不能为 0。情况三.1.1.I.i.i 不成立。

情况三.1.1.I.i.ii：u 为 z_2。



继续考虑 x_1z。因为 x 只与 y_2 距离为 2，所以根据充要条件 6，x_2，x_3 都必须与 z_1 距离为 2。假设 x_2 与 z_1 的公共邻居为 v。容易验证 v 是一个新顶点。

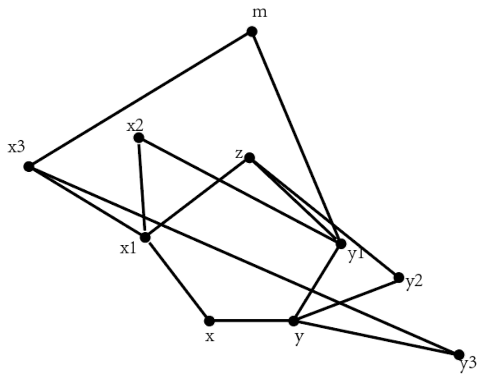
现在考虑边 zy_1。z 度数为 5，y_1 度数为 3，有两个四圈 zy_1yy_2 和 $zy_1x_2x_1$ 经过 zy_1，但如图所示 y，x_2 与 z_1 距离均为 2，所以根据充要条件 1，zy_1 的曲率不能为 0。情况三.1.1.I.i.ii 不成立。

综上情况情况三.1.1.I.i 不成立。

情况三.1.1.I.ii：y_1 的度数为 4。

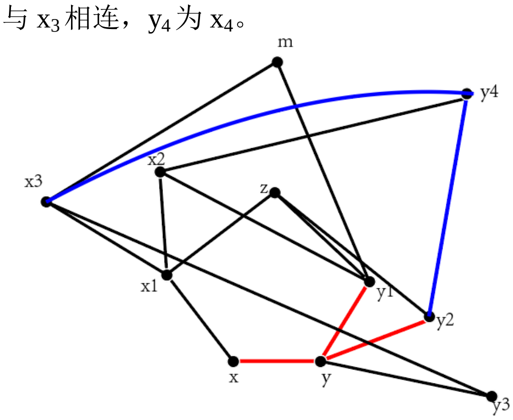
假设 y_1 除 y，z，x_2 之外另一邻居为 m。容易验证 m 是一个新顶点。因为 yy_1 的 k 值为 1 且 y 和 y_1 度数均为 4，所以根据充要条件 8，m 必须与 x 和 y_3 中的至少一个距离为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中不包含 m，所以 m 必须与 y_3 距离为 2 。假设 m 和 y_3 的公共邻居为 n。容易验证要么 n=x_3 或 n 为新顶点。

情况三.1.1.I.ii.i：n=x_3。



因为 yy_3 的 k 值为 0 且 y 度数为 4，所以 y_3 度数为 2。考虑边 x_3y_3。x_3y_3 的 k 值必须为 0，因为假如有四圈经过 x_3y_3，仅有的两条以 y_3 为端点的边 x_3y_3 和 yy_3 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 yy_3。又因为 y_3 度数为 2 且我们假设不存在两端点度数分别为 2 和 3 的点，所以 x_3 度数为 4。假设 x_3 除 x_1，y_3，m 外的另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。

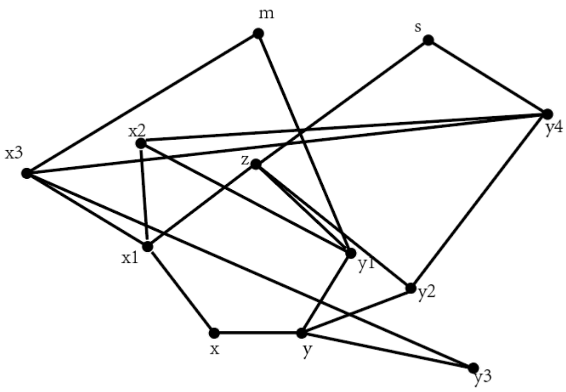
现在考虑边 yy_2。因为 xy，yy_3 的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2 是经过 yy_2 的唯一四圈。又因为 y 的度数为 4，所以根据已有的充要条件 y_2 的度数为 2，3 或 4。因为如图所示 z 与 x 距离为 2，所以根据充要条件 1，y_2 的度数不能为 2。又因为可以验证与 x 距离为 2 的所有点中，没有一个可以属于 $N(y_2)/\{z, y\}$，所以根据充要条件 8，y_2 的度数也不能为 4。因此 y_2 的度数必须为 3。假设 y_2 除了 y 和 z 外另一邻居为 y_4。容易验证 y_4 是一个新顶点。根据充要条件 6，y_4 必须与 x 和 y_3 中的至少一个距离为 2。又因为与 x 距离为 2 的所有点中，没有一个可以属于 $N(y_2)/\{z, y\}$，因此 y_4 只能与 y_3 距离为 2，即 y_4 与 y_3 有公共邻居。又因为 y_3 的邻居只有 y 和 x_3，所以 y_4 与 y 或 x_3 相连。y_4 与 y 相连会形成三圈 yy_2y_4，因此 y_4 与 x_3 相连，y_4 为 x_4。



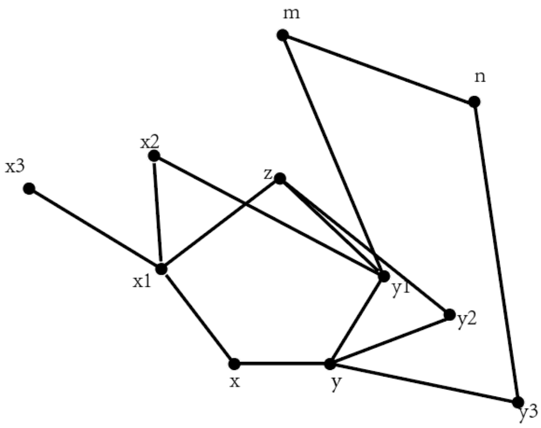
现在考虑边 x_1x_3。因为 x_1，x_3 度数均为 4，所以至少有一个四圈经过 x_1x_3。因为 y_3x_3 的 k 值为 0，所以一个包含 x_1x_3 的四圈中，x_3 的两邻居只能为 x_1，y_4 或 x_1，m。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以一个包含 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，z 或 x_3，x_2。假如该四圈中 x_1 的两邻居为 x_3，z，那么如图所示无论该四圈中 x_3 的两邻居为 x_1，y_4 还是 x_1，m，都会产生三角形。所以该四圈中 x_1 的两邻居只能为 x_3，x_2。假设该四圈除了 x_1，x_3，x_2 外剩下一顶点为 r，显然 r 必须为 y_4 和 m 中的一个。若 r=m 会产生三圈 ry_1m，所以 $r=y_4$。

现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，而我们又已证明一个四圈不能同时包含 x_1z 和 x_1x_3，所以四圈 $x_1zy_1x_2$ 是唯一一个经过 x_1z 的的四圈。因为 x_1 度数为 4，z 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件，z 的度数为 3 或 4。如果 z 的度数为 3，因为如图所示 y_2 与 x_3，x 距离均为 2，而 y_1 与 x 距离为 2，所以根据充要条件 6，x_1z 的曲率不能为 0。因此 z 的度数为 4。设 z 除了 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 s。容易验证 s 是一个新顶点。根据充要条件 8，s 必须与 x_3，x 中至少一个距离为 2。又因为容易验证所有与 x 距离为 2 的点中不包含 s，因此 s 只能与 x_3 距离为 2，即 s 与 x_3 有公共邻居。那么，s 必须与 x_3 的邻居 x_1，y_3，m，y_4 中的一个相连。s 不能与 y_3 相连否则 y_3 度数超过 2；s 也不能与 x_1 相连否则 x_1 度数超过 4。如果 s 与 m 相连，那么考虑边 zy_1。有三个四圈——$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y，szy_1m ——经过 zy_1 而 z，y_1 度数均为 4，不符合已有的充要条件。因此 s 与 y_4 相连。

现在考虑边 zy_2。有两个四圈——y_2zy_1y，y_2zsy_4——经过 zy_2，而 z 度数为 4，y_2 度数为 3，不符合已有的充要条件。所以情况三.1.1.I.ii.i 不成立。



情况三.1.1.I.ii.ii：n 为新顶点。



考虑边 yy_3。因为 yy_3 的 k 值为 0 且 y 度数为 4，所以 y_3 的度数为 2。根据充要条件 7，n 必须与 x，y_1，y_2 中的至少两个距离为 2。如图所示 n 已经与 y_1 距离为 2，所以 n 还必须与 x，y_2 中的一点距离为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中不包含 n，所以 n 与 y_2 距离为 2，即 n 与 y_2 有公共邻居。假设 n 与 y_2 的一个公共邻居为 n_1。容易验证要么 $n_1=x_3$，要么 n_1 为新顶点。

情况三.1.1.I.ii.ii.i：$n_1=x_3$。

先考虑边 yy_2。因为 xy，yy_3 的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2 是经过 yy_2 的唯一四圈。又因为 y 的度数为 4，y_2 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 y_2 的度数为 3 或 4。因为如图所示 z 与 x 距离为 2，而 x_3 与 x，y_3 距离均为 2，所以根据充要条件 6，y_2 的度数不能为 3。因此 y_2 的度数必须为 4。假设 y_2 除了 y，x_3 和 z 外另一邻居为 y_4。容易验证 y_4 是一个新顶点。根据充要条件 8，y_4 必须与 x 和 y_3 中的至少一个距离为 2。又因为与 x 距离为 2 的所有点中不包含 y_4，因此 y_4 只能与 y_3 距离为 2，即 y_4 与 y_3 有公共邻居。又因为 y_3 的邻居只有 y 和 n，所以 y_4 与 y 或 n 相连。y_4 与 y 相连会形成三圈 yy_2y_4，因此 y_4 与 n 相连。

此时 n 已有四个邻居：y_3，x_3，y_4，m。这也是 n 的全部邻居，原因是 ny_3 的 k 值必须为 0，因为假如有四圈经过 ny_3，仅有的两条以 x 为端点的边 ny_3 和 yy_3 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 yy_3。又因为 y_3 的度数为 2，所以根据已有的充要条件 n 的度数为 4。

现在考虑边 nx_3。因为 ny_3 的 k 值为 0，所以一个经过 nx_3 的四圈中，n 的两邻居只能为 x_3，y_4 或 x_3，m。因此最多有两个四圈经过 nx_3。又因为已经有一个四圈 $nx_3y_2y_4$ 经过 nx_3，所以 nx_3 的 k 值为 1 或 2。假设 nx_3 的 k 值为 1，则 $nx_3y_2y_4$ 是经过 nx_3 的唯一四圈。因为 n 的度数为 4，x_3 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 x_3 的度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 y_3 距离为 2 的点中没有一个与 n 相连，所以根据充要条件 8，x_3 的度数不能为 4。因此 x_3 的度数为 3。现在考虑边 y_2x_3。x_3 度数为 3，y_2 度数为 4，而有两个四圈——$x_1x_3y_2z$，$x_3y_2y_4n$——经过 y_2x_3，根据已有的充要条件 y_2x_3 的曲率不能为 0。

因此，nx_3 的 k 值为 2。又因为一个经过 nx_3 的四圈不能包含 ny_3，所以除 $nx_3y_2y_4$ 外另一经过 nx_3 的四圈必定同时包含 ny_3，nm。假设该四圈中除 n，x_3，m 外另一顶点为 m_1。m_1 必定同时与 x_3，m 相连，容易验证 m_1 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_3x_1zy_2$，$x_2x_1zy_1$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件，z 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为

2 的点中，没有一个可以属于 $N(z)/\{x_1, y_1, y_2\}$，因此根据充要条件 6，z 的度数不能为 5。因此 z 的度数为 4。假设 z 除 x_1, y_1, y_2 外另一邻居为 z_1，容易验证 z_1 是一个新顶点。

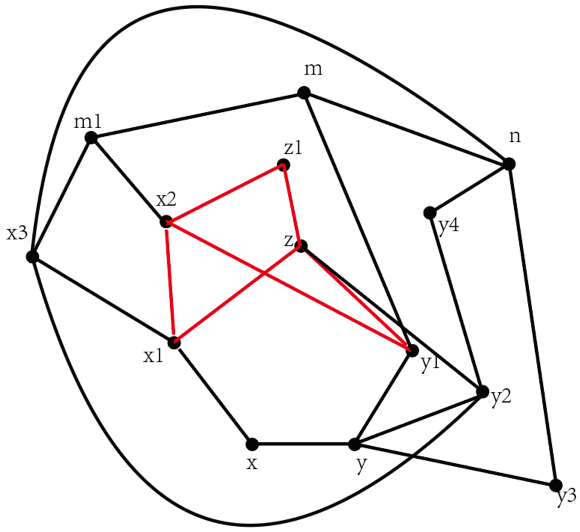
现在考虑边 y_1m。因为 y_1 度数为 4，m 已经有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件至少有一个四圈经过 y_1m。一个经过 y_1m 的四圈不能包含 yy_1，原因是 xy 和 yy_3 的 k 值均为 0，因此四圈 yy_1zy_2 是经过 yy_1 的唯一四圈。一个经过 y_1m 的四圈也不能包含 zy_1，否则如图所示有 3 个四圈经过 zy_1 而 z 和 y_1 的度数均为 4，不符合已有的充要条件。因此，在一个包含 y_1m 的四圈中，y_1 的两邻居只能为 m 和 x_2，所以最多只有一个四圈经过 y_1m。又因为至少有一个四圈经过 y_1m，所以 y_1m 的 k 值为 1。y_1 度数为 4，m 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件，m 的度数为 3 或 4。

情况三.1.1.I.ii.ii.i.i：m 的度数为 3。

假设经过 y_1m 的唯一四圈除了 y_1，m，x_2 外另一顶点为 t。显然 t 必须为 m 除 y_1 外剩下 2 个邻居——m_1 和 n——中的一个。t 不能为 n，否则 x_2 也要与 n 相连，n 的度数超过 4。因此 t 只能为 m_1。

因为可以验证 n 的所有邻居都不能与 z 相连，所以根据充要条件 6，要使 y_1m 曲率为 0，x_2 必须与 z 距离为 2，即 x_2 必须与 z 的邻居——x_1，y_1，y_2，z_1——中的一个相连。容易验证 x_2 只能与 z_1 相连。

现在考虑边 y_1z。因为 z 和 y_1 度数均为 4，所以根据已有的充要条件，yy_1zy_2 和 $x_2x_1zy_1$ 是仅有的两个经过 zy_1 的四圈。然而如图所示，z_1 与 m 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_1z 的曲率不能为 0。情况三.1.1.I.ii.ii.i.i 不成立。

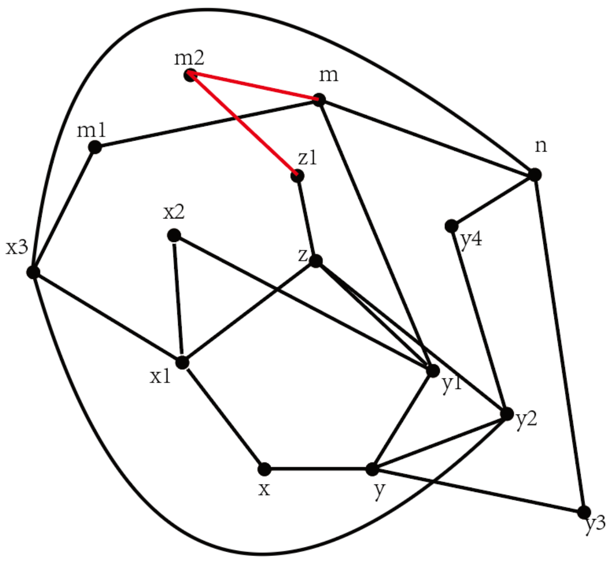


情况三.1.1.I.ii.ii.i.i：m 的度数为 4。

假设 m 除 m_1，y_1，n 外剩下一邻居为 m_2。容易验证 m_2 是一个新顶点。假设经过 y_1m 的唯一四圈除了 y_1，m，x_2 外另一顶点为 t。然 t 必须为 m 除 y_1 外剩下 3 个邻居——m_1，n，m_2——中的一个。因为可以验证所有与 y 距离为 2 的点中，只有 n 与 m 相连，所以根据充要条件 8，n 不能属于该四圈，因此 t 不能为 n，t 只能为 m_1，或 m_2。所以假设 m 除了它在该四圈中的 2 邻居外的其余邻居组成集合 A。$A=\{n, m_1\}$或$\{n, m_2\}$。根据充要条件 8，$A/\{n\}$中的点必须与 y 或 z 距离为 2。又因为 m 的邻居中只有 n 与 y 距离为 2，所以该点只能与 z 距离为 2，也就是说该点与 z 的邻居——x_1，y_1，y_2，z_1——中的一个相连。容易验证 x_1，y_1，y_2 都既不与 m_1 相连也不与 m_2 相连，因此该点只能与 z_1 相连。所以，z_1 与 m_1 或 m_2 相连。

现在考虑边 y_1z。因为 z 和 y_1 度数均为 4，所以根据已有的充要条件，yy_1zy_2 和 $x_2x_1zy_1$ 是仅有的两个经过 zy_1 的四圈。然而如图所示，无论 z_1 与 m_1 还是 m_2 相连，z_1 与 m 距离都为 2，所以根据充要条件 5，y_1z 的曲率不能为 0。情况三.1.1.I.ii.ii.i.ii 不成立。

综上，情况情况三.1.1.I.ii.ii.i 不成立。



情况三.1.1.I.ii.ii.ii：n_1为新顶点。

现在考虑边 yy_2。因为 xy，yy_3的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2是经过 yy_2的唯一四圈。又因为 y 的度数为 4，y_2已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 y_2的度数为 3 或 4。

情况三.1.1.I.ii.ii.ii.i：y_2的度数为 3。

现在考虑边 y_2n_1。因为 xy，yy_3的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2是经过 yy_2的唯一四圈。因此，一个经过 y_2n_1的四圈不能包含 yy_2。因此在一个经过 y_2n_1的四圈中，y_2的两邻居只能为 z，n_1。因此 y_2n_1的 k 值最多为 1。

情况三.1.1.I.ii.ii.ii.i.i：y_2n_1的 k 值为 0。

因为 y_2n_1的 k 值为 0，所以 yy_1zy_2是经过 y_2z的唯一四圈。又因为 y_2度数为 3，所以根据已有的充要条件，z 的度数为 3 或 4。同时，z 的度数不能为 3，否则 z 度数为 3，y_1度数为 4，而已有两个四圈——yy_1zy_2，$yy_1x_1x_2$——经过 zy_1，所以根据已有的充要条件 zy_1的曲率不能为 0。因此 z 度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，y_2，n_1外另一邻居为 z_1，容易验证 z_1是一个新顶点。

继续考虑边 y_2z。根据充要条件 6，z_1必须与 y 或 n_1中的一个距离为 2。又因为可以验证所有与 y 距离为 2 的点中不包含 z_1，因此 z_1必须与 n_1距离为 2。假设 z_1与 n_1的一个公共邻居为 n_2。容易验证要么 n_2为新顶点，要么 n_2=x_3。假如 n_2=x_3，考虑边 x_1z。因为 x_1，z 度数均为 4，所以根据已有的充要条件最多有两个四圈经过 x_1z。又因为已有两个四圈——$x_1zz_1x_3$，$x_1zy_1x_2$——经过 x_1z，所以 x_1z的 k 值为 2。根据充要条件 5，x 和 y_3距离为 3，然而如图所示 x 和 y_3距离为 2，矛盾。因此 n_2不能为 x_3，n_2为新顶点。

进一步考虑边 x_1z。因为 x_1，z 度数均为 4，所以根据已有的充要条件最多有两个四圈经过 x_1z。如果有两个四圈经过 x_1z，那么因为 xx_1的 k 值为 0，yy_1zy_2是经过 y_2z的唯一四圈，所以在除了 $x_1zy_1x_2$外另一个经过 x_1z的四圈中，x_1的两邻居只能为 z，x_3，z 的两邻居只能为 x_1，z_1；也就是说该四圈只能为 $x_1zz_1x_3$。因此，根据充要条件 5，x 和 y_3距离为 3，然而如图所示 x 和 y_3距离为 2，矛盾。所以不能有两个四圈经过 x_1z，$x_1zy_1x_2$是经过 x_1z的唯一四圈。

现在考虑边 zz_1。假如有四圈经过 zz_1，那么该四圈必定包含除 zz_1外剩下三条与 z 相连的边——x_1z，y_1z ，y_2z ——中的一条。又因为 yy_1zy_2是经过 y_2z的唯一四圈，$x_1zy_1x_2$是经过 x_1z的唯一四圈，所以该四圈不能包含 x_1z，或 y_2z，因此该四圈只能包含 y_1z 。那么，如图所示，z 和 y_1度数均为 4 而有 3 个四圈经过 y_1z，根据已有的充要条件 y_1z的曲率不能为 0。综上，不能有四圈经过 zz_1，zz_1的 k 值为 0。又因为 z 度数为 4，所以根据已有的充要条件 z_1度数为 2。

现在继续考虑边 x_1z。根据充要条件 8，z_1必须与 x 和 x_3中的一个距离为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中不包含 z_1，因此 z_1只能与 x_3距离为 2，即 x_3必须与 z_1的两邻居——z，n_2——中的一个相连。x_3与 z 相连会产生三圈 x_3zx_1，因此 x_3必须与 n_2相连。

现在考虑边 y_1m。因为 xy，yy_3的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2是经过 yy_1的唯一四圈。因此一个经过 y_1m的四圈不能包含 yy_1。假如一个经过 y_1m的四圈包含 y_1z，那么，如图所示，z 和 y_1度数均为 4 而有 3 个四圈经过 y_1z，根据已有的充要条件 y_1z的曲率不能为 0。因此，一个经过 y_1m的四圈中，y_1的两邻居只能为 m 和 x_2，因此，最多有一个四圈经过 y_1m，y_1m的 k 值为 0 或 1。

假如 y_1m 的 k 值为 0，考虑边 nn_1。因为 y_1m 的 k 值为 0 且 y_1 的度数为 4，所以根据已有的充要条件 m 的度数为 2。y_3n 的 k 值必须为 0，因为假如有四圈经过 y_3n，仅有的两条以 y_3 为端点的边 y_3n 和 yy_3 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 yy_3。又因为 y_3 度数为 2 且我们假设不存在两端点度数分别为 2，3 的边，因此 n 度数为 4。因为 n 度数为 4 且 n_1 度数为 3，所以根据已有的充要条件，nn_1 的 k 值为 1。同时，经过 nn_1 的唯一四圈不能包含 mn，因为 mn 的 k 值必须为 0，否则仅有的两条以 m 为端点的边 y_1m 和 mn 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 y_1m。那么，根据充要条件 6，m 必须与 y_2 和 n_2 中的一个距离为 2。然而，可以验证所有与 m 距离为 2 的点中不包含 y_2 或 n_2。

因此，y_1m 的 k 值不能为 0，y_1m 的 k 值为 1，且经过 y_1m 的唯一四圈中，y_1 的两邻居为 m 和 x_2。又因为 y_1 的度数为 4，所以根据已有的充要条件，m 的度数为 2，3 或 4。又因为如图所示 n 与 y_3 距离为 2，所以根据充要条件 1，m 的度数不能为 2。因此 m 的度数为 3 或 4。那么综合考虑充要条件 6 和 8，可知 z 必须与 m 除 y_1 外的一个邻居距离为 2。又因为可以验证除 y_1 外所有与 z 距离为 2 的点中，只有 x_3 可以与 m 相连。因此，x_3 必须与 m 相连。

现在考虑边 x_1x_3。因为 xx_1 的 k 值为 0，$x_1zy_1x_2$ 是经过 x_1z 的唯一四圈，因此一个经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，x_2，最多只有一个四圈经过 x_1x_3。又因为 x_1 度数为 4，x_3 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件必定恰有一个四圈经过 x_1x_3。那么综合考虑充要条件 6 和 8，可知 x 必须与 x_3 除 x_1 外的一个邻居距离为 2。又因为可以验证除 x_1 外所有与 x 距离为 2 的点都不能与 x_3 相连，因此 x_1x_3 的曲率不能为 0。情况三.1.1.I.ii.ii.ii.i.i 不成立。

情况三.1.1.I.ii.ii.ii.i.ii：y_2n_1 的 k 值为 1。

假设经过 y_2n_1 的唯一四圈除 y_2，z，n_1 外另一顶点为 n_2。容易验证 n_2 是一个新顶点。现在考虑边 zy_2。因为 y_2 度数为 3 且已有两个四圈——yy_1zy_2，$n_1n_2zy_2$——经过 zy_2，所以根据已有的充要条件，z 的度数为 5。假设 z 除 x_1，y_1，y_2，n_2 外另一邻居为 z_1，容易验证 z_1 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2n_1。因为 y_2n_1 的 k 值为 1 且 y_2 度数为 3，所以根据已有的充要条件 n_1 的度数为 3 或 4。假如 n_1 的度数为 3，根据充要条件 5，x 和 n 的距离为 3。但如图所示 x 和 n 的距离为 2，矛盾。因此 n_1 的度数为 4。假设 n_1 除 n，y_2，n_2 外另一邻居为 n_3。根据充要条件 6，n_3 必须与 y 和 z 中的一个距离为 2。

假设 n_3 与 y 距离为 2。容易验证所有与 y 距离为 2 的点中，除 n，n_1 外只有 x_2 可以与 n_1 相连，因此 n_3 只能为 x_2。但若 $n_3=x_2$，则如图所示 n_1，y 与 x_1 距离均为 2，y_2 度数为 3，且有两个四圈——yy_1zy_2，$n_1n_2zy_2$——经过 zy_2，根据充要条件 1，zy_2 的曲率不能为 0。

因此 n_3 只能与 z 距离为 2。即 n_3 必须与 z 的邻居——x_1，y_1，y_2，n_2，z_1——中的一个相连。n_3 与 n_2 相连会产生三圈 $n_3n_1n_2$，n_3 与 y_2 相连会产生三圈 $n_3y_2n_1$。假如 n_3 与 z_1 相连，则 n_1 与 z_1 有公共邻居 n_3，n_1 与 z_1 距离为 2。那么，y 与 x_1 距离均为 2，n_1 与 z_1 距离为 2，且有两个四圈——yy_1zy_2，$n_1n_2zy_2$——经过 zy_2，根据充要条件 1，zy_2 的曲率不能为 0。同理 n_3 不能与 x_1 相连 。因此 n_3 只能与 y_1 相连，n_3 为 y_1 的四个邻居——z，x_2，n，y——中的一个。容易验证只有 x_2 可以与 n_1 相连，但前面已证明 n_3 不能为 x_2。

综上，n_3 不能与 y 和 z 中的一个距离为 2，y_2n_1 的曲率不能为 0。情况三.1.1.I.ii.ii.ii.i.ii 不成立。

综上情况三.1.1.I.ii.ii.ii.i 不成立。

情况三.1.1.I.ii.ii.ii.ii：y_2 的度数为 4。

根据充要条件 8，x 必须与 $N(y_2)/\{z, y\}$ 中的至少一点距离为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中，只有 x_3 可以属于 $N(y_2)/\{z, y\}$，所以根据充要条件 8，x_3 必须与 y_2 相连。现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_3x_1zy_2$，$x_2x_1zy_1$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件，z 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中，没有一个可以属于 $N(z)/\{x_1, y_1, y_2\}$，因此根据充要条件 6，z 的度数不能为 5。因此 z 的度数为 4。假设 z 除 x_1, y_1, y_2 外另一邻居为 z_1，容易验证 z_1 是一个新顶点。假设有四圈经过 zz_1，那么该四圈必定包含除 zz_1 外剩余 3 条与 z 相连的边——x_1z，y_1z，y_2z——中的一条。而如图所示这三条边都是两端点度数均为 4 且已有两四圈经过，所以根据已有的充要条件不能再被其他四圈包含。因此，没有四圈经过 zz_1；又因为 z 度数为 4，所以根据已有的充要条件 z_1 度数为 2。假设 z_1 除 z 外另一邻居为 z_2，容易验证 z_2 是一个新顶点。

现在考虑边 z_1z_2。z_1z_2 的 k 值必须为 0，因为假如有四圈经过 z_1z_2，仅有的两条以 z_1 为端点的边 z_1z_2 和 zz_1 都必须包含在该四圈内，则有四圈经过 zz_1。因此，根据已有的充要条件，z_2 的度数为 3 或 4。又因为我们假设不存在两端点度数分别为 2 和 3 的边，所以 z_2 的度数为 4。根据充要条件 7，z 必须与至少两个 $N(z_2)/\{z_1\}$ 中的点距离为 2；又因为可以验证所有与 z 距离为 2 的点中，只有 x_3 和 x_2 可以属于 $N(z_2)/\{z_1\}$，所以 x_3 和 x_2 必须与 z_2 相连。假设 z_2 除 z_1，x_2，x_3 外另一邻居为 z_3，容易验证 z_3 是一个新顶点。

现在考虑边 x_2y_1。因为 xy，yy_3 的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2 是经过 yy_1 的唯一四圈。因此，一个经过 x_2y_1 的四圈不能包含 yy_1。因此在一个经过 x_2y_1 的四圈中，y_1 的两邻居只能为 x_2，z 或 x_2，m。因此 x_2y_1 的 k 值最多为 2。又因为已有一个四圈 $x_2y_1zx_1$ 经过 x_2y_1，所以 x_2y_1 的 k 值为 1 或 2。

情况三.1.1.I.ii.ii.ii.ii.i：x_2y_1 的 k 值为 1。

先考虑 x_2 的度数。为此，先考虑边 x_1x_2。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1x_2z_2x_3$，$x_2x_1zy_1$ 是仅有的两个经过 x_1x_2 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件，x_2 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中，没有一个可以属于 $N(x_2)/\{x_1, y_1, z_2\}$，因此根据充要条件 6，x_2 的度数不能为 5。因此 x_2 的度数为 4。假设 x_2 除 x_1, y_1, z_2 外另一邻居为 p。

继续考虑边 x_2y_1。根据充要条件 8，y 必须与 $N(x_2)/\{x_1, y_1\}$ 中的至少一个距离为 2。又因为可以验证所有与 y 距离为 2 的点中，只有 n_1 可以属于 $N(x_2)/\{x_1, y_1\}$。因此 n_1 与 x_2 相连，$p=n_1$。

现在考虑边 y_1m。因为 $x_2y_1zx_1$ 是经过 x_2y_1 的唯一四圈，所以一个经过 y_1m 的四圈不能包含 x_2y_1。因为 xy，yy_3 的 k 值均为 0，所以 yy_1zy_2 是经过 yy_1 的唯一四圈。因此一个经过 y_1m 的四圈也不能包含 yy_1。因为 z，y_1 的度数均为 4，所以根据已有的充要条件，yy_1zy_2 和 $x_2y_1zx_1$ 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈；因此一个经过 y_1m 的四圈也不能包含 yy_1。综上，不能有四圈经过 y_1m。又因为 y_1 度数为 4，所以 m 度数为 2。

继续考虑边 x_2y_1。根据充要条件 8，z_2 必须与 y 和 m 中的一个距离为 2。又因为 $N(x_2)/\{x_1, y_1\}$ 只有 n_1 与 y 距离为 2，所以 z_2 只能与 m 中距离为 2，即 z_2 与 m 有公共邻居。但可以验证 m 的两邻居——y_1，n——均不能与 z_2 相连，所以 x_2y_1 的曲率不能为 0，情况三.1.1.I.ii.ii.ii.ii.i 不成立。

情况三.1.1.I.ii.ii.ii.ii.ii：x_2y_1 的 k 值为 2。

先考虑 x_2 的度数。为此，先考虑边 x_1x_2。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1x_2z_2x_3$，$x_2x_1zy_1$ 是仅有的两个经过 x_1x_2 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件，x_2 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中，没有一个可以属于 $N(x_2)/\{x_1, y_1, z_2\}$，因此根据充要条件 6，x_2 的度数不能为 5。因此 x_2 的度数为 4。假设 x_2 除 x_1, y_1, z_2 外另一邻居为 p。

继续考虑边 x_2y_1。除 $x_2y_1zx_1$ 外另一个经过 x_2y_1 的四圈必定同时包含 x_2y_1 和 y_1m。假设该四圈除 x_2，y_2，m 外另一顶点为 q。显然 q 必须为 x_2 除 y_1 外剩下三个邻居——x_1, z_2，p——中的一个。容易验证 q 只能为 p。那么，p 必须是 x_2，m 的公共邻居，容易验证 p 是一个新顶点。

现在考虑边 y_1m。因为 yy_1zy_2 是经过 yy_1 的唯一四圈，所以一个经过 y_1m 的四圈不能包含 yy_1。因为 z 和 y_1 度数均为 4 且已经有两个四圈——yy_1zy_2，$yy_1x_1x_2$——经过 zy_1，所以根据已有的充要条件不能再有其它四圈经过 zy_1。因此，一个经过 y_1m 的四圈也不能包含 zy_1。因此 y_1mpx_2 是经过 y_1m 的唯一四圈。又因为 y_1 度数为 4，m 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 m 的度数为 3 或 4。假如 m 的度数为 3，因为可以验证 n 与所有 z 的邻居都不能相连，所以 n 和 z 距离不能为 2；因此，根据充要条件 6，p 必须与 z 距离为 2。但是可以验证 z 的所有邻居都不能与 p 相连，所以 p 与 z 的距离也不能为 2。因此，m 的度数不能为 3，m 的度数为 4。根据充要条件 8，z 必须与某个 $N(m)/\{p, y_1\}$ 中的点相连。又因为可以验证所有与 z 距离为 2 的点中，只有 x_3 可以属于 $N(m)/\{p, y_1\}$，因此 x_3 与 m 相连。

现在考虑边 x_1x_3。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1x_3y_2z$，$x_1x_3z_2x_2$ 是仅有的连个经过 x_1x_3 的四圈。又因为 x_1 的度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_3 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点中，没有一个可以属于 $N(x_3)/\{x_1, y_2, z_2\}$，因此根据充要条件 6，x_3 的度数不能为 5。因此 x_3 的度数为 4。

现在考虑边 x_3m。因为 x_3 的度数为 4，m 的度数为 4，所以根据已有的充要条件至少有一个四圈经过 x_3m。该四圈必定包含除 x_3m 外剩下三条以 x_3 为端点的边——x_3x_1，x_3y_2，x_3z_2——中的一条。因为 $x_1x_3y_2z$，$x_1x_3z_2x_2$ 是仅有的连个经过 x_1x_3 的四圈，所以该四圈不能包含 x_3x_1。假如该四圈包含 x_3y_2，则 y_2 与 m 距离为 2，但可以验证 y_2 与 m 没有公共邻居，所以该四圈不能包含 x_3y_2。同

理可证该四圈不能包含 x_3z_2。因此，不能有四圈经过 x_3m，与至少有一个四圈经过 x_3m 矛盾。因此，情况三.1.1.I.ii.ii.ii.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.I.ii.ii.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.I.ii.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.I.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.I.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.I 不成立。

情况三.1.1.II：yy_3 的 k 值为 1。

因为 xy 的 k 值为 0，所以在经过 yy_3 的唯一四圈中，y 的两邻居只能为 y_3，y_1 或 y_3，y_2。

情况三.1.1.II.i：y 的两邻居只能为 y_3，y_1。

情况三.1.1.II.ii：y 的两邻居只能为 y_3，y_2。

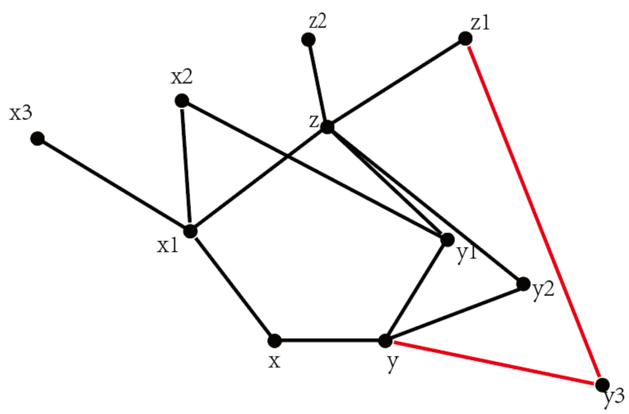
这种情况下，显然 yy_1zy_2 是经过 yy_1 的唯一四圈。又因为 y 的度数为 4，y_1 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 y_1 的度数为 3 或 4。

情况三.1.1.II.ii.i：y_1 的度数为 3。

因为 y_1 度数为 3 且已有两个四圈——yy_1zy_2，$x_1x_2y_1z$——经过 y_1z，所以根据已有的充要条件 z 的度数为 5。假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另外 2 邻居为 z_1，z_2。容易验证 z_1，z_2 都是新端点。

现在考虑边 yy_1。因为 y 度数为 4，y_1 度数为 3，又因为如图所示 z 与 x 距离为 2，所以根据充要条件 6，x_2 只能与 x，y_3 中的一个距离为 2。同时，如图所示 x_2 已与 x 距离为 2，所以 x_2 与 x 距离为 2 与 y_3 距离为 3。根据充要条件 6，z 必须与 y_3 距离为 2，即 y_3 必须与 z 的邻居——x_1，y_1，y_2，z_1，z_2——中的一个相连。容易验证 y_3 只能与 z_1 或 z_2 相连。不失一般性假设 y_3 与 z_1 相连。

现在考虑边 x_1z。因为 x_1 度数为 4 而 z 度数为 5，因为 xx_1 的 k 值为 0，所以一个经过 x_1z 的四圈不包含 xx_1；又因为 x_1 度数为 4 而 z 度数为 5，且可以验证所有与 x 距离为 2 的点中只有 y_2 可以属于 N(z)/(S∪{x_1})，所以根据充要条件 6，x_2，x_3 必须均与 N(z)/(S∪{x_1, y_2})中的唯一一点距离为 2；因为 $x_1zy_1x_2$ 是一经过 x_1z 的四圈，所以该点必为 z_1，z_2 中的一个。然而，这意味着 x_2 与 z_1，z_2 中的一个距离为 2，同时如图所示 y 与 z_1 距离为 2，所以根据充要条件 1，x_1z 的曲率不能为 0。



综上情况三.1.1.II.ii.i 不成立。

情况三.1.1.II.ii.ii：y_1 的度数为 4。

综上情况三.1.1.II.ii.ii 不成立。

综上情况三.1.1.II.ii 不成立。

情况三.1.1.III：yy_3 的 k 值为 2。

情况三.1.1.III.i：y_2 与 x_3 相连。

情况三.1.1.III.i.i：y_3 与 x_3 相连。

因为 xy 的 k 值为 0，所以除 $yy_3x_3y_2$ 外另一个经过 yy_3 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_3，y_1。假设该四圈除 y，y_3，y_1 外另一顶点为 y_4。容易验证要么 y_4=x_2，要么 y_4 为新顶点。

情况三.1.1.III.i.i：y_4=x_2。

因为 yy_3 的 k 值为 2，y 的度数为 4，所以根据已有的充要条件 y_3 的度数为 4 或 5。又因为容易验证所有与 x 距离为 2 的点都不可能属于 N(y_3)/({y}∪S)，因此 y_3 的度数为 4。假设 y_3 除 y，x_2，x_3

外另一邻居为 y_5。容易验证 y_5 是一个新顶点。类似的可知 x_2 的度数为 4。假设 x_2 除 x，y_3，y_1 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。同理 x_3 的度数为 4。假设 x_3 除 x，y_3，y_2 外另一邻居为 x_5。容易验证 x_5 是一个新顶点。同理 z 的度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1。

现在考虑边 x_3x_5。因为 x_3，y_3 度数均为 4，又因为已有两个四圈经过 x_3y_3，所以根据已有的充要条件不能再有四圈经过 x_3y_3，一个包含 x_3x_5 的四圈不能经过 x_3y_3。同理一个包含 x_3x_5 的四圈不能经过 x_3x，x_3y_2。因此，不能有四圈经过 x_3x_5，x_3x_5 的 k 值为 0。又因为 x_3 度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_5 的度数为 2。假设 x_5 除 x_3 外另一邻居为 x_6。根据充要条件 7，x_6 必须与 x，y_3，y_2 中的至少两点距离为 2。又因为可以验证假如 $x_6 \neq y_1$，x_6 必须与 x，y_3 都不可能距离为 2，所以 $x_6=y_1$。此时由于 x_5y_1 的 k 值也必须为 0，因为假如有四圈经过 x_5y_1，唯一包含 x_5 的两边 x_3x_5，x_5y_1 都必须包含在该四圈中，则有四圈经过 x_3x_5。又因为 x_5 度数为 2，所以 y_1 度数为 4。

考虑边 x_2x_4。与 x_3x_5 类似的可以证明 x_2x_4 的 k 值为 0，x_2 度数为 2。类似的可以验证要使 x_2x_4 满足充要条件 7，x_4 除 x_2 外另一邻居只能为 y_2，也导致 y_2 度数为 4。

最后考虑边 y_3y_5。与 x_3x_5 类似的可以证明 y_3y_5 的 k 值为 0，y_5 度数为 2。类似的可以验证要使 y_3y_5 满足充要条件 7，y_5 除 y_3 外另一邻居只能为 z，也导致 z 度数为 4。

此时该图中所有顶点度数均已达上限，不能再扩张。所以情况三.1.1.III.i.i 时，只有一个 Ricci-Flat 图，如下图所示。

情况三.1.1.III.i.i：y_4 为新顶点。

考虑边 yy_1。因为 xy 的 k 值为 0，所以 yy_1zy_2，$yy_1y_4y_3$ 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈。又因为 y 的度数为 4，所以 y_1 的度数为 4 或 5。同时，因为如图所示 x，x_2 的距离为 2，所以根据充要条件 5，y_1 的度数不能为 4，所以 y_1 的度数为 5。假设 y_1 除 x_1，z，y，y_4 外另一邻居为 y_5。容易验证 y_5 是一个新顶点。

因为 yy_3 的 k 值为 2，y 的度数为 4，所以根据已有的充要条件 y_3 的度数为 4 或 5。又因为容易验证所有与 x 距离为 2 的点都不可能属于 $N(y_3)/\{y\}\cup S$，因此 y_3 的度数为 4。假设 y_3 除 y，x_2，x_1 外另一邻居为 y_6。容易验证 y_6 是一个新顶点。

类似的可以证明 y_2 的度数为 4。假设 y_2 除 y，x_3，z 外另一邻居为 y_7。容易验证 y_7 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_1。根据充要条件 6，因为 x 只与 x_2 距离为 2 而与 y_5 距离大于 2，所以 y_5 必须与 y_2 和 y_3 距离均为 2。那么，y_5 必须与 y_2 除了其在经过 yy_1 的四圈中邻居外剩下两邻居——x_3，y_7——中的一个相连。

情况三.1.1.III.i.i.i：y_5 与 x_3 相连。

考虑边 x_1x_3。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，x_2 或，x_3，z，因此 x_1x_3 的 k 值最多为 2。又因为已有一个四圈 $x_1x_3y_2z$ 经过 x_1x_3，所以 x_1x_3 的 k 值为 1 或 2。假如 x_1x_3 的 k 值为 1，因为 x_1 度数为 4，所以 x_3 度数为 3 或 4。又因为 x_3 已有 4 个邻居，所以 x_3 度数为 4。假如 x_1x_3 的 k 值为 2，因为 x_1 度数为 4，所以 x_3 度数为 4 或 5。综上，x_3 度数为 4 或 5。

情况三.1.1.III.i.i.i.i：x_3 度数为 4。

考虑边 x_1x_3。因为 x_1，x_3 度数均为 4，所以根据已有的充要条件 x_1x_3 的 k 值为 1 或 2。假如 x_1x_3 的 k 值为 2，因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在除 $x_1x_3y_2z$ 外另一经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，x_2。假设该四圈除 x_1，x_3，x_2 外另一顶点为 p。显然 p 只能为 x_3 除 x_1，y_2 外两邻居——y_5，y_3——中的一个。然而可以验证 p 为 y_5 或 y_3 都会产生三圈或导致两四圈共享两条边。因此，x_1x_3 的 k 值不能为 2，$x_1x_3y_2z$ 是经过 x_1x_3 的唯一四圈。

现在考虑边 x_1x_2。因为 xx_1 的 k 值为 0，$x_1x_3y_2z$ 是经过 x_1x_3 的唯一四圈，所以 $x_1x_2y_1z$ 是经过 x_1x_2 的唯一四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以 x_2 度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点均不能属于 $N(x_2)/(S\cup\{x_1\})$，所以 x_2 度数不能为 4。因此 x_2 度数为 3。假设 x_2 除 x_1，y_1 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。根据充要条件 6，x_4 必须与 x，x_3 中的一个距离为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点不包含 x_4，因此 x_4 必须与 x_3 距离为 2。则 x_4 必须与 x_3 除了 x_1 外的三个邻居——y_5，y_2，y_3——中的一个相连。容易验证 x_4 只能与 y_5 相连。

现在考虑边 x_3y_5。因为 $x_1x_3y_2z$ 是经过 x_1x_3 的唯一四圈，所以一个经过 x_3y_5 的四圈不能包含 x_1x_3。因为 x_3，y_2 度数均为 4，所以 $x_1x_3y_2z$，$x_3y_2yy_3$ 是仅有的两个经过 x_3y_2 的四圈，故一个经过 x_3y_5 的四圈不能包含 x_3y_2。因此，一个经过 x_3y_5 的四圈中，x_3 的两邻居只能为 y_5，y_3，x_3y_5 的 k 值最多为 1。又因为 x_3 度数为 4，y_5 已有 3 个邻居，所以 x_3y_5 的 k 值至少为 1。故恰有一个四圈经过

x_3y_5。假设该四圈除 x_3，y_5，y_3 外另一顶点为 q。显然 q 只能为 y_3 除 x_3 外 3 邻居——y，y_6，x_2——中的一个。容易验证 q 只能为 y_6。

现在考虑边 y_2y_5。因为 x_3y_5 的 k 值为 1，x_3 度数为 4，y_5 已有 5 个邻居，所以 y_5 度数为 4。因为 y_5 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 y_2y_5 的 k 值为 2。因为 $x_3y_5y_6y$ 是经过 x_3y_5 的唯一四圈，所以在除 $y_2y_5x_4x_2$ 外另一经过 y_2y_5 的四圈中，y_5 的两邻居只能为 y_2，y_6。假设该四圈除 y_2，y_5，y_6 外另一顶点为 r。显然 r 只能为 y_2 除 x_2，y_5 外 3 邻居——y，z，y_4——中的一个。容易验证 r 无论为 3 者中的哪一个都会产生矛盾。

综上，情况三.1.1.III.i.i.i.i 不成立。

情况三.1.1.III.i.i.i.ii：x_3 度数为 5。

假设 x_3 除 y_5，y_2，y_3，x_1 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。考虑边 x_1x_3。因为 x_1 度数为 4，x_3 度数为 5，所以根据已有的充要条件 x_1x_3 的 k 值为 2。 因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在除 $x_1x_3y_2z$ 外另一经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，x_2。假设该四圈除 x_1，x_3，x_2 外另一顶点为 p。显然 p 只能为 x_3 除 x_1，y_2 外 3 邻居——y_5，y_3，x_4——中的一个。容易验证 p 只能为 x_5。

现在考虑边 x_3y_5。因为 x_3 度数为 5，所以根据已有的充要条件至少有一个四圈经过 x_3y_5。现在 y_5 已有 2 个邻居。假如 y_5 度数仅为 2，那么在一个包含 x_3y_5 的四圈中 y_5 的两邻居只能为 x_3，y_1。假设该四圈除 y_5，x_3，y_1 外另一顶点为 q。显然 q 只能为 x_3 除 y_5 外 4 邻居——x_4，x，y_3，y_2——中的一个。容易验证无论 q 为 4 者中的哪一个均会产生 3 圈。因此，y_5 度数必须大于 2。x_3 度数为 5，y_5 度数大于 2，那么，根据已有的充要条件，x_3y_5 的 k 值至少为 2。因为 x_1x_3 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1x_3，所以一个经过 x_3y_5 的四圈不能包含 x_1x_3。类似的一个经过 x_3y_5 的四圈不能包含 y_2x_3。因此，一个经过 x_3y_5 的四圈中，x_3 的两邻居只能为 x_4，y_5 或 y_3，y_5。又因为 x_3y_5 的 k 值至少为 2，所以必定有这样一个经过 x_3y_5 的四圈，其中 x_3 的两邻居为 y_3，y_5。假设该四圈除 x_3，y_3，y_5 外另一顶点为 r。显然 r 必须为 y_3 除 x_3 外 3 邻居——y，y_4，y_6——中的一个。容易验证 r 只能为 y_6。

现在考虑边 x_3y_3。因为容易验证所有 x_1 的邻居一旦与 y_4 相连，则要么产生三圈要么导致有两个四圈共享两条边，因此 x_1 与 y_4 距离不能为 2。所有，根据充要条件 6，y_6 必须与 x_1 距离为 2。则 y_6 必须与 x_1 除 x_3 外另外 3 邻居——x_2，z，x——中的一个相连。y_6 与 x 相连会导致 x 度数超过 2。若 y_6 与 z 相连，则有 3 个四圈————经过 y_1z。又因为 y_1 度数为 5，所以根据已有的充要条件 z 的度数为 5 或 6。再考虑 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1x_3y_2z$，$x_1x_2y_1z$ 是仅有的 2 个经过 x_1z 的四圈。所以 z 的度数为 4 或 5。但因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以属于 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$，所以根据充要条件 6，x_1z 的度数不能为 5，所以 z 的度数为 4，与 z 的度数为 5 或 6 矛盾。综上，y_6 只能与 x_2 相连。

继续考虑边 x_3y_3。因为 x_1 与 y_4 距离不能为 2，所以根据充要条件 6，y_4 必须与 x_4 距离为 2。那么，假设 y_4 与 x_4 的一个公共邻居是 x_5。容易验证 x_5 是一个新顶点。

因为 z 度数为 4，假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1。容易验证 z_1 是一个新顶点。

现在考虑边 y_3y_6。因为 yy_3 的 k 值为 2 而已有两个四圈————经过 yy_3，所以在一个经过 y_3y_6 的四圈中，y_3 的两邻居只能为 y_6，x_3 或 y_6，y_4。因此 y_3y_6 的 k 值最多为 2。又因为已有一个四圈 $y_3y_6y_5x_3$ 经过 y_3y_6，所以 y_3y_6 的 k 值为 1 或 2。

情况三.1.1.III.i.i.i.ii.i：y_3y_6 的 k 值为 1。

情况三.1.1.III.i.i.i.ii.ii：y_3y_6 的 k 值为 2。

情况三.1.1.III.i.i.ii：y_5 与 y_7 相连。

情况三.1.1.III.i.ii：y_3 与 x_3 不相连。

因为 xy 的 k 值为 0，所以在一个经过 yy_3 的四圈中，y_3 的两邻居只能为 y，y_1 或 y，y_2。又因为 yy_3 的 k 值为 2，所以必定有这样一个经过 yy_3 的四圈，其中 y_3 的两邻居为 y，y_2。假设该四圈除 y_3， y，y_2 外另一邻居为 y_4，容易验证 y_4 是一个新顶点。现在考虑边 yy_2。因为 xy 的 k 值为 0，所以 yy_1zy_2，$yy_3y_4y_2$ 是仅有的两个经过 yy_2 的四圈，又因为 y 度数为 4，所以 y_2 的度数为 4 或 5；同时，如图所示 x 与 x_3 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_2 的度数不能为 4，y_2 的度数为 5。假设 y_2 除 y，z，x_3，y_4 外另一邻居为 y_5。容易验证 y_5 是一个新顶点。

继续考虑边 yy_3。因为 yy_3 的 k 值为 2，所以必定有这样一个经过 yy_3 的四圈，其中 y_3 的两邻居为 y，y_1。假设该四圈假设该四圈除 y_3， y，y_2 外另一邻居为 y_6。容易验证要么 $y_6=x_2$，要么 y_6 是一个新顶点。

情况三.1.1.III.ii.i：$y_6=x_2$。

现在考虑边 yy_1。因为 xy 的 k 值为 0，所以 yy_1zy_2，$yy_3x_2y_1$ 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈，又因为 y 度数为 4，所以 y_1 的度数为 4 或 5；同时，可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能属于 $N(y_1)/(\{y\}\cup S)$，所以根据充要条件 6，y_1 的度数不能为 5，y_1 的度数为 4。假设 y_1 除 y，z，x_2 外另一邻居为 y_7。容易验证 y_7 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_3。因为 yy_3 的 k 值为 2，y 的度数为 4，所以 y_3 的度数为 4 或 5；同时，可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能属于 $N(y_3)/(\{y\}\cup S)$，所以根据充要条件 6，y_3 的度数不能为 5，y_3 的度数为 4。假设 y_3 除 y，y_4，x_2 外另一邻居为 y_8。容易验证 y_8 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_2。因为 x 只与 x_3 距离为 2 而与 y_5 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_5 必须与 y_3，y_1 距离均为 2。也就是说 y_5 必须与 y_3 除了其在四圈 $yy_3y_4y_2$ 中两邻居外剩下两邻居——y_8，x_2——中的至少一个相连。

情况三.1.1.III.ii.i.i：y_5 与 x_2 相连。

现在考虑边 y_2y_5。因为 y_2 度数为 5，所以根据已有的充要条件，至少有一个四圈经过 y_2y_5。y_5 已有两个邻居。 假设 y_5 度数仅为 2，则一个经过 y_2y_5 的四圈必须包含 y_5 及 y_5 仅有的两邻居 y_2，x_2。假设该四圈除 y_5，y_2，x_2 外另一顶点为 q。显然 q 必须为 y_2 除 y_5 外剩下 4 邻居——z，y，x_3，y_4——中的一个。容易验证 q 无论为 4 者中的哪一个都会产生 3 圈。因此 y_5 度数不能为 2，y_5 度数大于 2。y_2 度数为 5，y_5 度数大于 2，所以根据已有的充要条件，y_2y_5 的 k 值至少为 2。因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2，所以一个经过 y_2y_5 的四圈不能包含 yy_2。一个经过 y_2y_5 的四圈也不能包含 zy_2。这是因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_2x_3$，$x_1zy_1x_2$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，故根据已有的充要条件 z 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点多不可以属于 $N(z)/(\{x_1\}\cup S)$，所以根据充要条件 6，z 的度数不能为 5，z 的度数为 4。z 的度数为 4，y_2 度数为 5，所以 zy_2 的 k 值为 2；又因为已有两个四圈————经过 zy_2，所以一个经过 y_2y_5 的四圈也不能包含 zy_2。综上，一个经过 y_2y_5 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 y_5，x_3 或 y_5，y_4。又因为 y_2y_5 的 k 值至少为 2，所以必定有这样一个经过 y_2y_5 的四圈，其中 y_2 的两邻居为 y_5，y_4。假设该四圈除 y_2，y_5，y_4 外另一顶点为 y_9，容易验证 y_9 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1x_2。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，x_2 或 z，x_2，因此 x_1x_2 的 k 值最多为 2。又因为已有一个四圈 $x_1x_2y_1z$ 经过 x_1x_2，所以 x_1x_2 的 k 值为 1 或 2。假如 x_1x_2 的 k 值为 1，因为 x_1 的度数为 4，x_2 已有 4 个邻居，所以根据已有的充要条件 x_2 的度数为 4。假如 x_1x_2 的 k 值为 2，因为 x_1 的度数为 4， 所以根据已有的充要条件 x_2 的度数为 4 或 5。综上，x_2 的度数为 4 或 5。

情况三.1.1.III.ii.i.i.i：x_2 的度数为 4。

先考虑边 x_1x_2。因为 x_1，x_2 度数均为 4，所以根据已有的充要条件，x_1x_2 的 k 值为 1 或 2。假如 x_1x_2 的 k 值为 2，因为 xx_1 的 k 值为 0，所以除 $x_1x_2y_1z$ 外另一经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_2，x_3。假设该四圈除 x_1，x_2，x_3 外另一顶点为 t。显然 t 必须为 x_2 除其在 $x_1x_2y_1z$ 中两邻居外余下两邻居——y_5，y_3——中的一个。容易验证无论 t 为二者中的哪个都会产生矛盾。因此，x_1x_2 的 k 值不能为 2，$x_1x_2y_1z$ 是经过 x_1x_2 的唯一四圈。

现在考虑边 x_1x_3。因为 xx_1 的 k 值为 0，$x_1x_2y_1z$ 是经过 x_1x_2 的唯一四圈，所以 $x_1x_3y_2z$ 是经过 x_1x_3 的唯一四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_3 度数为 2，3 或 4。因为 x 与 y_1 距离为 2，所以根据充要条件 1，x_3 度数不能为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能属于 $N(x_3)/(\{x_1\}\cup S)$，所以根据充要条件 8，x_3 度数不能为 4。因此 x_3 度数为 3。假设 x_3 除 y_2，x_1 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。

继续考虑边 x_1x_3。根据充要条件 6，x_4 必须与 x，x_2 中的至少一个距离为 2，又因为容易验证所有与 x 距离为 2 的点不包含 x_4，因此 x_4 与 x_2 距离为 2。则 x_4 必须与 x_2 除 x_1 外的剩下三邻居——y_3，y_1，y_5——中的一个相连。容易验证 x_4 只能与 y_5 相连。

现在考虑边 x_2y_5。因为 x_2 度数为 4，y_5 已有四个邻居，所以根据已有的充要条件 x_2y_5 的 k 值至少为 1。因为 $x_1x_2y_1z$ 是经过 x_1x_2 的唯一四圈，所以一个经过 x_2y_5 的四圈不能包含 x_1x_2。一个经过 x_2y_5 的四圈也不能包含 y_1x_2，这是因为 y_1，x_2 度数均为 4，所以 y_1x_2 的 k 值不能超过 2，$x_1x_2y_1z$，$y_3x_2y_1y$ 是仅有的 2 个经过 y_1x_2 的四圈。因此，一个经过 x_2y_5 的四圈中，x_2 两邻居只能为 y_5，y_3。

综上，一定恰好有一个四圈经过 x_2y_5，并且该四圈中 x_2 两邻居只能为 y_5，y_3。假设该四圈除 x_2，y_5，y_3 外另一顶点为 u。显然 u 只能为 y_3 除 x_2 外剩下 3 邻居——y，y_4，y_8——中的一个。容易验证 u 只能为 y_8。但假如 u 为 y_8，则如图所示 y_5 已经有了 5 个邻居，根据已有的充要条件至少有 2 个四圈经过 x_2y_5，与只有一个四圈经过 x_2y_5 矛盾。

综上，情况三.1.1.III.ii.i.i.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.i.i.ii：x_2 的度数为 5。

假设 x_2 除 x_1，y_3，y_1，y_5 外剩下一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。因为 x_1 度数为 4，x_2 度数为 5，所以 x_1x_2 的 k 值为 2。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在除 $x_1x_2y_1z$ 外另一经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居必须为 x_2，x_3。假设该四圈除 x_1，x_2，x_3 外另一顶点为 v。显然 v 必须为 x_2 除 x_1 外剩下四邻居——y_3，y_1，y_5，x_4——中的一个。容易验证 v 只能为 x_4。

现在考虑边 x_2y_5。因为 x_2 度数为 5，y_5 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 x_2y_5 的 k 值至少为 2。因为 x_1x_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈——$x_1x_2y_1z$，$x_1x_2x_4x_3$——经过 x_1x_2，所以一个经过 x_2y_5 的四圈不能包含 x_1x_2。一个经过 x_2y_5 的四圈也不能包含 y_1x_2，这是因为 y_1 度数均为 4，x_2 度数为 5，所以 y_1x_2 的 k 值为 2，$x_1x_2y_1z$，$y_3x_2y_1y$ 是仅有的 2 个经过 y_1x_2 的四圈。因此，一个经过 x_2y_5 的四圈中，x_2 两邻居只能为 y_5，y_3。综上，一定有这样一个四圈经过 x_2y_5，该四圈中 x_2 两邻居只能为 y_5，y_3。假设该四圈除 x_2，y_5，y_3 外另一顶点为 w。显然 w 只能为 y_3 除 x_2 外剩下 3 邻居——y，y_4，y_8——中的一个。容易验证 w 只能为 y_8。

现在考虑边 y_3x_2。因为 y_3 度数为 4，x_2 度数为 5，$y_3x_2y_5y_8$，$y_3x_2y_1y$，是仅有的两个经过 y_3x_2 的四圈，同时容易验证 x_1 的所有邻居都不可以与 y_4 相连，所以根据充要条件 6，x_1 必须与 y_8 距离为 2。即 y_8 必须与 x_1 除 x_2 外剩下 3 邻居——x，x_3，z——中的一个相连。容易验证 y_8 只能与 x_3 相连。

现在考虑边 y_1x_2。因为 y_1 度数为 4，x_2 度数为 5，所以 $y_1x_2y_3y$，$y_1x_2x_1z$ 是仅有的两个经过 y_1x_2 的四圈。同时，因为容易验证 y 的邻居都不能与 x_4 相连，所以根据充要条件 6，x_4 必须与 y_7 距离为 2，即 x_4 与 y_7 有公共邻居。另外，由于 y，z 与 y_5 距离均为 2，所以 y_7 不能与 y_5 距离为 2。那么，假设 x_4 与 y_7 的一个公共邻居是 x_5，容易验证 x_5 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以 z 度数为 4 或 5。可以验证所有与 x 距离为 2 的顶点均不属于 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$，所以根据充要条件 6，z 度数不能为 5，z 度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1，容易验证 z_1 是一个新顶点。

现在考虑边 y_1y_7。因为 yy_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈不能包含 yy_1。因为 x_2 度数为 5，y_1 度数为 4，所以 x_2y_1 的 k 值为 2。又因为已有两个四圈————经过 x_2y_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈不能包含 x_2y_1。因为 z，y_1 度数均为 4，所以 zy_1 的 k 值为 2。又因为已有两个四圈————经过 zy_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈不能包含 zy_1。综上，不能有四圈经过 y_1y_7。又因为 y_1 度数为 4，所以 y_7 度数为 2。根据充要条件 7，x_5 必须与 z，x_2，y 中的至少两个距离为 2。因为容易验证 x_5 与 y 的所有邻居都不能相连，所以 x_5 与 y 距离不能为 2。因此，x_5 必须与 z，x_2 距离均为 2。则 x_5 必须与 z 除 y_1 外剩下三邻居——x_1，y_2，z_1——相连。容易验证 x_5 只能与 z_1 相连。然而，x_5 与 z_1 相连则 y_7 与 z 距离为 2，根据充要条件 5，zy_1 的曲率不能为 0。

综上，情况三.1.1.III.ii.i.i.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.i.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.i.ii：y_5 不与 x_2 相连。

此时 y_5 必须与 y_8 相连。又因为 y_5 必须与 y_1 距离为 2，所以 y_5 必须与 y_3 除了其在四圈 yy_1zy_2 中两邻居外剩下两邻居——y_7，x_2——中的至少一个相连。y_5 不与 x_2 相连，所以 y_5 必须与 y_7 相连。

现在考虑边 y_1y_7。因为 yy_1 的 k 值为 2 而已有两个四圈————经过 yy_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈不能包含 yy_1。因为 z 度数为 4，y_1 度数为 5，所以 zy_1 的 k 值为 2，又因为已有两个四圈————经过 zy_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈不能包含 zy_1。一个经过 y_1y_7 的四圈也不能包含 x_2y_1，否则如图所示会有 3 个四圈经过 x_2y_1，又因为 y_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_2 度数为 6；然而，因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_2，z 或 x_2，x_3，x_1x_2 的 k 值最多为 2，可是从 x_2 度数为 6，x_1 度数为 4 可以推出 x_1x_2 的 k 值为 3，矛盾。综上，不能有四圈经过 y_1y_7，y_1y_7 的 k 值为 0，又因为 y_1 度数为 4，所以 y_7 度数为 2。

现在考虑边 y_2y_5。y_5 已有三个邻居。y_2 度数为 5，y_5 度数大于 2，所以根据已有的充要条件，y_2y_5 的 k 值至少为 2。因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2，所以一个经过 y_2y_5 的四圈不能包含 yy_2。一个经过 y_2y_5 的四圈也不能包含 zy_2。这是因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_2x_3$，$x_1zy_1x_2$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，故根据已有的充要条件 z 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点多不可以属于 $N(z)/(\{x_1\}\cup S)$，所以根据充要条件 6，z 的度数不能为 5，z 的度数为 4。z 的度数为 4，y_2 度数为 5，所以 zy_2 的 k 值为 2；又因为已有两个四圈————经过 zy_2，所以一个经过 y_2y_5 的四圈也不能包含 zy_2。综上，一个经过 y_2y_5 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 y_5，x_3 或 y_5，y_4。又因为 y_2y_5 的 k 值至少为 2，所以必定有这样一个经过 y_2y_5 的四圈，其中 y_2 的两邻居为 y_5，y_4。假设该四圈除 y_2，y_5，y_4 外另一顶点为 y_9，容易验证 y_9 是一个新顶点。

继续考虑边 y_2y_5。首先 y_7y_5 的 k 值为 0，因为假如有四圈经过 y_7y_5，仅有的两条以 y_7 为端点的边 y_7y_5，y_1y_7 都必须包含在该四圈中，则有四圈经过 y_1y_7。又因为 y_7 度数为 2，所以 y_5 度数为 3 或 4。y_5 已有四个邻居，所以 y_5 度数为 4。y_5 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 y_2y_5 的 k 值为 2。又因为 y_7y_5 的 k 值为 0，所以在除 $y_2y_5y_9y_4$ 外另一经过 y_2y_5 的四圈中，y_5 的两邻居只能为 y_2，y_8。假设该四圈除 y_5，y_2，y_8 外另一顶点为 r。因为前面已证明一个经过 y_2y_5 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 y_5，x_3 或 y_5，y_4，因此 r 只能为 x_3。

现在考虑边 y_7y_5。根据充要条件 7，y_1 必须与 y_2，y_8，y_9 中的至少两个距离为 2。y_1 已经与 y_2 距离为 2，所以 y_8，y_9 中还必须有一个与 y_1 距离为 2。假设 y_8 与 y_1 距离为 2，则 y_8 必须与 y_1 除 y_7 外剩下 3 邻居——z，y，x_2——中的至少一个相连。容易验证 y_8 与三者中的任一个相连都会产生 3 圈或导致两四圈共享两条边。因此，y_8 不能与 y_1 距离为 2，只能 y_9 与 y_1 距离为 2。则 y_9 必须与 y_1 除 y_7 外剩下 3 邻居——z，y，x_2——中的至少一个相连。容易验证 y_9 只能与 x_2 相连。

现在考虑边 y_3x_2。因为 y_3 度数为 4，所以 y_3x_2 的 k 值最多为 3。但 y_3x_2 的 k 值不能为 3，否则根据已有的充要条件，x_2 的度数为 6；然而，因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_2，z 或 x_2，x_3，x_1x_2 的 k 值最多为 2，可是从 x_2 度数为 6，x_1 度数为 4 可以推出 x_1x_2 的 k 值为 3，矛盾。因此，$y_3x_2y_9y_4$，$y_3x_2y_1y$ 是仅有的经过 y_3x_2 的两个四圈。又因为 y_3 度数为 4，所以 x_2 的度数为 4 或 5。同时，如图所示 y_8 与 x_1 的距离为 2，所以根据充要条件 5，x_2 的度数不能为 4，x_2 的度数为 5。假设 x_2 除 x_1，y_3，y_1，y_9 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1x_2。因为 x_1 度数为 4，x_2 度数为 5，所以 x_1x_2 的 k 值为 2。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以除 $x_1x_2y_1z$ 外另一经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_2，x_3。假设该四圈除 x_1，x_2，x_3 外另一顶点为 s。显然 s 只能为 x_2 除 x_1 外剩下四邻居——y_1，y_3，y_9，x_4——中的一个。容易验证 s 只能为 x_4。

继续考虑边 x_1x_2。首先 x_3 度数为 4，这是因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1x_3y_2z$，$x_1x_3x_2x_4$ 是仅有的两个经过 x_1x_2 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以 x_3 的度数为 4 或 5；又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以属于 $N(x_3)/(S\cup\{x_1\})$，所以根据充要条件 6，x_3 的度数不能为 5，x_3 度数为 4。然后，因为 x 只与 y_3 而不与 y_9 距离为 2，所以根据充要条件 6，x_3 必须与 y_9 距离为 2，则 y_9 必须与 x_3 除其在 $x_1x_3x_2x_4$ 中的两邻居外的余下两邻居——y_2，y_8——中的一个相连。容易验证无论 y_9 与二者中的哪一个相连都会产生三圈或导致有两个四圈共享两条边。

综上，情况三.1.1.III.ii.i.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii：y_6 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 xy 的 k 值为 0，所以 yy_1zy_2，$yy_3y_6y_1$ 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈，又因为 y 度数为 4，所以 y_1 的度数为 4 或 5；同时，如图所示 x 与 x_2 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_1 的度数不能为 4，y_1 的度数为 5。假设 y_1 除 y，z，x_2，y_6 外另一邻居为 y_7。容易验证 y_7 是一个新顶点。现在考虑边 yy_3。因为 yy_3 的 k 值为 2，y 的度数为 4，所以 y_3 的度数为 4 或 5；同时，可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能属于 $N(y_3)/(\{y\}\cup S)$，所以根据充要条件 6，y_3 的度数不能为 5，y_3 的度数为 4。假设 y_3 除 y，y_4，x_2 外另一邻居为 y_8。容易验证 y_8 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_2。因为 y_2 度数为 3，y 度数为 4，所以 yy_2 的 k 值为 2，$yy_2y_4y_3$，yy_2zy_1 是仅有的两个经过 yy_2 的四圈。又因为可以验证 x 只与 x_3 距离为 2 而与 y_5 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_5 必须与 y_1，y_3 距离均为 2。则 y_5 必须与 y_1 除其在四圈 yy_2zy_1 中两邻居外剩下 3 邻居——y_6，x_2，y_7——中的一个相连。

情况三.1.1.III.ii.ii.i：y_5 与 y_7 相连。

现在考虑边 x_1x_3。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，z 或 x_3，x_2，x_1x_3 的 k 值最多为 2。又因为已有一个四圈 $x_1x_3y_2z$ 经过 x_1x_3，所以 x_1x_3 的 k 值为 1 或 2。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.i：x_1x_3 的 k 值为 1。

x_1x_3 的 k 值为 1，又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_3 度数为 2，3 或 4。因为 x 与 y_2 距离为 2，所以根据充要条件 1，x_3 度数不能为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能属于 $N(x_3)/(\{x_1\}\cup S)$，所以根据充要条件 8，x_3 度数不能为 4。因此 x_3 度数为 3。假设 x_3 除 y_2，x_1 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2y_5。y_2 度数为 5，所以根据已有的充要条件至少有一个四圈经过 y_2y_5。假如 y_5 的度数仅为 2，那么只有一个四圈经过 y_2y_5。因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2，所以一个经过 y_2y_5 的四圈不能包含 yy_2。一个经过 y_2y_5 的四圈也不能包含 zy_2。这是因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_2x_3$，$x_1zy_1x_2$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，故根据已有的充要条件 z 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点多不可以属于 $N(z)/(\{x_1\}\cup S)$，所以根据充要条件 6，z 的度数不能为 5，z 的度数为 4。z 的度数为 4，y_2 度数为 5，所以 zy_2 的 k 值为 2；又因为已有两个四圈————经过 zy_2，所以一个经过 y_2y_5 的四圈也不能包含 zy_2。然而如图所示 y_7 与 z，y 距离均为 2，根据充要条件 2，y_2y_5 的曲率不能为 0。因此，y_5 的度数大于 2。y_2 的度数为 5，y_5 的度数大于 2，因此 y_2y_5 的 k 值至少为 2。又因为一个经过 y_2y_5 的四圈不能包含 zy_2，yy_2，所以一个经过 y_2y_5 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 x_3，y_5 或 y_4，y_5。综上，必定有这样一个经过 y_2y_5 的四圈，其中 y_2 的两邻居为 x_3，y_5。假设该四圈除 y_2，x_3，y_5 外剩下一顶点为 q。显然 q 必须为 x_3 除 y_2 外剩下两邻居——x_1，x_4——中的一个。容易验证 q 只能为 x_4。

现在考虑边 x_1x_2。因为 xx_1 的 k 值为 0，$x_1x_3y_2z$ 是经过 x_1x_3 的唯一四圈，所以 $x_1x_2y_1z$ 是经过 x_1x_2 的唯一四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_2 度数为 2，3 或 4。因为 x 与 y_1 距离为 2，所以根据充要条件 1，x_3 度数不能为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能属于 $N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$，所以根据充要条件 8，x_2 度数不能为 4。因此 x_2 度数为 3。假设 x_2 除 y_1，x_1 外另一邻居为 x_5。容易验证 x_5 是一个新顶点。根据充要条件 6，x_5 必须与 x，x_3 中的至少一个距离为 2。又因为可以验证 x 的所有邻居都不能与 x_5 相连，所以 x_5 只能与 x_3 距离为 2。则 x_5 必须与 x_3 除 x_1 外剩下两邻居——x_4，y_2——中的一个相连。容易验证 x_5 只能与 x_4 相连。

现在考虑边 y_1y_7。y_1 度数为 5，所以根据已有的充要条件至少有一个四圈经过 y_1y_7。假如 y_7 的度数仅为 2，那么只有一个四圈经过 y_1y_7。因为 yy_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈不能包含 yy_1。一个经过 y_1y_7 的四圈也不能包含 zy_1。这是因为前面已证明 z 的度数为 4，而 y_1 度数为 5，所以 zy_1 的 k 值为 2；又因为已有两个四圈————经过 zy_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈也不能包含 zy_1。然而如图所示 y_7 与 z，y 距离均为 2，根据充要条件 2，y_1y_7 的曲率不能为 0。因此，y_7 的度数大于 2。y_1 的度数为 5，y_7 的度数大于 2，因此 y_1y_7 的 k 值至少为 2。又因为一个经过 y_1y_7 的四圈不能包含 zy_1，yy_1，所以一个经过 y_1y_7 的四圈中，y_1 的两邻居只能为 x_2，y_7 或 y_6，y_7。综上，必定有这样一个经过 y_1y_7 的四圈，其中 y_1 的两邻居为 x_2，y_7。假设该四圈除 y_1，x_2，y_7 外剩下一顶点为 r。显然 r 必须为 x_2 除 y_1 外剩下两邻居——x_1，x_5——中的一个。容易验证 q 只能为 x_5。

现在考虑点 z。前面已经证明 z 度数为 4，所以假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1。可以验证 z_1 是一个新顶点。继续考虑边 x_3x_4。因为 $x_1x_3y_2z$ 是经过 x_1x_3 的唯一四圈，所以 $x_3x_4y_5y_2$ 是经过 x_3x_4 的唯一四圈。又因为 x_3 度数为 3，所以根据已有的充要条件 x_4 度数为 3 或 4。又因为如图所示 x_1，x_5 距离为 2，因此根据充要条件 5，x_4 度数不能为 3，x_4 度数为或 4。假设 x_4 除 x_3，y_5，x_5 外另一邻居为 x_6。根据充要条件 6，x_6 必须与 x_1 或 y_2 距离为 2。可以验证所有与 x_1 距离为 2 的点中，除 x_5 外只有 z_1 可以与 x_4 相连。但是假如 x_6 为 x_4，则如图所示 x_1 与 x_5，x_6 距离均为 2 而 y_2 与 x_6 距离也为 2，根据充要条件 6，x_3x_4 的曲率不能为 0。因此，x_6 不能与 x_1 距离为 2。因此 x_6 只能与 y_2 距离为 2。也就是说 x_6 必须与 y_2 除其在四圈 $x_3x_4y_5y_2$ 中的两邻居外剩余外两邻居——z，y，y_4——中的一个相连。容易验证所有与 z 或 y 相连的点都不能为 x_4 邻居，因此 x_6 只能与 y_4 相连。但倘若 x_6 与 y_4 相连，则如图所示 x_4 与 y_4 距离为 2，然而 x_1 与 y 距离也为 2；那么，根据充要条件 1，y_2x_3 的曲率不能为 0。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii：x_1x_3 的 k 值为 2。

因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在除 $x_1zy_2x_3$ 外另一经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，x_2。假设该四圈除 x_1，x_3，x_2 外另一顶点为 p。容易验证要么 $p=y_8$，要么 p 是一个新顶点。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i：$p=y_8$。

现在考虑边 yy_2。因为 y 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 yy_2 的 k 值为 2，$yy_2y_4y_3$，yy_2zy_1 是仅有的两个经过 yy_2 的四圈；同时，可以验证 x 只与 x_3 距离为 2 而与 y_5 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_5 必须与 y_3 距离为 2。则 y_5 必须与 y_3 除其在四圈 $yy_2y_4y_3$ 中两邻居外剩余两邻居——y_8，y_6——中的一个相连。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.i：y_5 与 y_8 相连。

现在考虑边 yy_1。因为 y 度数为 4，y_1 度数为 5，所以 yy_2 的 k 值为 2，$yy_2y_6y_3$，yy_2zy_1 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈；同时，可以验证 x 只与 x_2 距离为 2 而与 y_7 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 y_3 距离为 2。则 y_7 必须与 y_3 除其在四圈 $yy_2y_6y_3$ 中两邻居外剩余两邻居——y_8，y_4——中的一个相连。容易验证 y_7 只能与 y_4 相连。

现在考虑边 x_1x_3。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1x_3y_2z$，$x_1x_3y_8x_2$ 是仅有的两个经过 x_1x_3 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件，x_3 度数为 4 或 5。因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以属于 $N(x_3)/(S\cup\{x_1\})$，所以根据充要条件 6，x_3 度数不能为 5，x_3 度数为 4。假设 x_3 除 y_8，x_1，y_2 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。

现在考虑边 y_3y_8。因为 yy_3 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_3，所以一个经过 y_3y_8 的四圈不能包含 yy_3。因此，在一个经过 y_3y_8 的四圈中，y_3 的两邻居只能为 y_4，y_8 或 y_6，y_8， y_3y_8 的 k 值最多为 2。又因为 y_3 度数为 4，y_8 已有 4 个邻居，所以 y_3y_8 的 k 值不能为 0，y_3y_8 的 k 值为 1 或 2。假设 y_3y_8 的 k 值为 1，显然 y_8 的度数为 4；假设 y_3y_8 的 k 值为 2，则 y_8 的度数为 4 或 5。综上，y_8 的度数为 4 或 5。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.i.i：y_8 的度数为 4。

现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 z 的的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以属于 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$，所以根据充要条件 6，z 的度数不能为 5，z 的度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1。容易验证 z_1 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2z。因为 z 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 y_2z 的 k 值为 2，$x_1zy_2x_3$，y_1zy_2y 是仅有的两个经过 y_2z 的四圈。因为可以验证所以 x_1 的邻居都不能与 y_5 相连，所以根据充要条件 6，y_5 必须与 z_1 距离为 2。则 y_5 与 z_1 有一公共邻居。假设 y_5 与 z_1 的一公共邻居为 z_2。容易验证 z_2 是一个新顶点。

现在考虑边 zz_1。因为 y_2z 的 k 值为 2 且已有两个四圈——$x_1zy_2x_3$，y_1zy_2y——经过 y_2z。所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 y_2z。因为 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 x_1z。一个经过 zz_1 的四圈也不能包含 y_1z，这是因为 z 的度数为 4，y_1 度数为 5，所以 y_1z 的 k 值为 2，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈。综上，不能有 4 圈经过 zz_1。又因为 z 度数为 4，所以 z_1 度数为 2。

现在考虑边 zy_1。因为可以验证 x_1 所有邻居与 y_7 均不能相连，因此根据充要条件 6，y_7 必须与 z_1 距离为 2。也就是说 y_7 必须与 z_1 除 z 外仅有的邻居 z_2 相连。但如图所示这样一来就产生三圈 $y_7z_2y_5$。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.i.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.i.ii：y_8 的度数为 5。

假设 y_8 除 y_5，x_2，x_3，x_1 外另一邻居为 y_9。容易验证 y_9 是一个新顶点。

现在考虑边 x_3y_2。因为 x_3 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 x_3y_2 的 k 值为 2，$x_3y_2y_5y_3$，$x_3y_2zx_1$ 是仅有的两个经过 x_3y_2 的四圈；根据充要条件 6，x_4 必须与 y，y_4 中的至少一个距离为 2。又因为可以验证 y 的所有邻居均不能与 x_4 相连，所以 x_4 只能与 y_4 距离为 2。则 x_4 与 y_4 有公共邻居。假设 x_4 与 y_4 的一个公共邻居为 x_5。容易验证要么 $x_5=y_7$，要么 x_5 是一个新顶点。

假如 $x_5=y_7$，考虑边 x_3x_4。因为 $x_3y_2y_5y_3$，$x_3y_2zx_1$ 是仅有的两个经过 x_3y_2 的四圈，所以一个经过 x_3x_4 的四圈不能包含 x_3y_2。因为 x_1x_3 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1x_3，所以一个经过 x_3x_4 的四圈不能包含 x_1x_3。一个经过 x_3x_4 的四圈也不能包含 y_3x_3，这是因为 x_3 度数为 4，y_3 度数为 5，所以 y_3x_3 的 k 值为 2，而已有两个四圈——$x_3y_3y_5y_2$，$x_3y_3x_2x_1$——经过 y_3x_3。综上，不能有四圈经过 x_3x_4。又因为 x_3 度数为 4，所以 x_4 度数为 2。这也导致 x_4y_7 的 k 值为 0，因为假如有四圈经过 x_4y_7，仅有的两条以 x_4 为端点的边——x_4x_3，x_4y_7——都必须包含在内，则有四圈经过 x_4x_3。

又因为 y_7 已有 4 个邻居，所以 y_7 度数为 4。现在考虑边 x_3y_3。因为 x_3 度数为 4，y_3 度数为 5，$x_3y_3y_5y_2$，$x_3y_3x_2x_1$ 是仅有的两个经过 x_3y_3 的四圈，所以根据充要条件 6，x_4 必须与 y，y_9 中的一个距离为 2。则 y，y_9 中至少一个必须与 x_4 除 x_3 外仅有的邻居 y_7 相连。然而二者中任何一个与 y_7 相连都会导致 y_7 度数超过 4，矛盾。

因此，x_5 是一个新顶点。现在继续考虑边 x_3y_3。 因为前面已证明 x_4 度数为 2，所以 x_5 是 x_4 除 x_3 外仅有的邻居 x_5 相连。y 不能与 x_5 相连，所以 y 不能与 x_4 距离为 2。根据充要条件 6，y 必须与 x_1，y_2 距离均为 2。则 y 必须与 x_1 除其在 4 圈 $x_3y_3x_2x_1$ 中两邻居外剩余两邻居——x，z——中的一个相连。然而可以验证 y 无论与 2 这种的那个相连都会产生三圈或导致两四圈共享一条边。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.i.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.ii：y_5 不与 y_8 相连。

此时 y_5 必须与 y_6 相连。

现在考虑边 yy_1。因为 y 度数为 4，y_1 度数为 5，$yy_1y_6y_3$，yy_1zy_2 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈，又因为可以验证 x 只与 x_2 距离为 2 而与 y_7 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 y_3，y_2 距离均为 2。那么，y_7 必须与 y_3 除其在四圈 $yy_1y_6y_3$ 中的两邻居外剩下两邻居——y_4，y_8——中的一个相连。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.ii.i：y_7 与 y_4 相连。

现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 z 的的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以属于 N(z)/(S∪{x_1})，所以根据充要条件 6，z 的度数不能为 5，z 的度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1。容易验证 z_1 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2z。因为 z 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 y_2z 的 k 值为 2，yy_1zy_2，$x_3x_1zy_2$ 是仅有的两个经过 y_2z 的四圈。又因为可以验证 x_1 的所有邻居都不能与 y_5 相连，所以根据充要条件 6，y_5 必须与 z_1 距离为 2。则 y_5 和 z_1 有公共邻居。假设 y_5 和 z_1 的一个公共邻居为 z_2，容易验证 z_2 是一个新顶点。

现在考虑边 zz_1。因为 y_2z 的 k 值为 2 且已有两个四圈——$x_1zy_2x_3$，y_1zy_2y——经过 y_2z。所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 y_2z。因为 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 x_1z。一个经过 zz_1 的四圈也不能包含 y_1z，这是因为 z 的度数为 4，y_1 度数为 5，所以 y_1z 的 k 值为 2，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈。综上，不能有 4 圈经过 zz_1。又因为 z 度数为 4，所以 z_1 度数为 2。

现在考虑边 zy_1。因为 z 度数为 4，y_1 度数为 5，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈，又因为可以验证 x_1 的所有邻居都不可以与 y_7 相连，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 z_1 距离为 2。又因为前面已证明 z_1 度数为 2，所以 y_7 必须与 z_1 除 z 外的唯一邻居 z_2 相连，然而如图所示这样会产生三圈 $y_7z_2y_5$。

综上情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.ii.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.ii.ii：y_7 不与 y_4 相连。

此时 y_7 必须与 y_8 相连。

现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 z 的的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以属于 N(z)/(S∪{x_1})，所以根据充要条件 6，z 的度数不能为 5，z 的度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1。容易验证 z_1 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2z。因为 z 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 y_2z 的 k 值为 2，yy_1zy_2，$x_3x_1zy_2$ 是仅有的两个经过 y_2z 的四圈。又因为可以验证 x_1 的所有邻居都不能与 y_5 相连，所以根据充要条件 6，y_5 必须与 z_1 距离为 2。则 y_5 和 z_1 有公共邻居。假设 y_5 和 z_1 的一个公共邻居为 z_2，容易验证 z_2 是一个新顶点。

现在考虑边 zz_1。因为 y_2z 的 k 值为 2 且已有两个四圈——$x_1zy_2x_3$，y_1zy_2y——经过 y_2z。所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 y_2z。因为 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 x_1z。一个经过 zz_1 的四圈也不能包含 y_1z，这是因为 z 的度数为 4，y_1 度数为 5，所以 y_1z 的 k 值为 2，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈。综上，不能有 4 圈经过 zz_1。又因为 z 度数为 4，所以 z_1 度数为 2。

现在考虑边 zy_1。因为 z 度数为 4，y_1 度数为 5，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈，又因为可以验证 x_1 的所有邻居都不可以与 y_7 相连，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 z_1 距离为 2。又因为前面已证明 z_1 度数为 2，所以 y_7 必须与 z_1 除 z 外的唯一邻居 z_2 相连，然而如图所示这样会产生三圈 $y_7z_2y_5$。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii：p 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1z。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件 z 的的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以属于 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$，所以根据充要条件 6，z 的度数不能为 5，z 的度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，y_2 外另一邻居为 z_1。容易验证要么 $z_1=y_8$，要么 z_1 是一个新顶点。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.i：$z_1=y_8$。

现在考虑边 zy_8。因为 y_2z 的 k 值为 2 且已有两个四圈——$x_1zy_2x_3$，y_1zy_2y——经过 y_2z。所以一个经过 zy_8 的四圈不能包含 y_2z。因为 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，所以一个经过 zy_8 的四圈不能包含 x_1z。一个经过 zy_8 的四圈也不能包含 y_1z，这是因为 z 的度数为 4，y_1 度数为 5，所以 y_1z 的 k 值为 2，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈。综上，不能有 4 圈经过 zz_1。又因为 z 度数为 4，所以 y_8 度数为 2。

现在考虑边 zy_1。因为 z 度数为 4，y_1 度数为 5，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈，又因为容易验证 y_8 只与 y_6 距离为 2 而与 y_7 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 x_1，y_2 距离均为 2。则 y_7 必须与 x_1 除其在四圈 $x_1zy_1x_2$ 中的两邻居外剩余两邻居——x_3，x——中的一个相连。容易验证 y_7 只能与 x_3 相连。

现在考虑边 yy_2。因为 y 度数为 4，y_2 度数为 5，$yy_2y_4y_3$，yy_1zy_2 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈，又因为可以验证 x 只与 x_3 距离为 2 而与 y_5 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 y_3，y_1 距离均为 2。那么，y_7 必须与 y_3 除其在四圈 $yy_2y_4y_3$ 中的两邻居外剩下两邻居——y_6，y_8——中的一个相连。而可以验证 y_7 与 y_6 相连会导致两四圈共享两条边；y_7 与 y_8 相连会导致 zy_2 的 k 值超过 2。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.ii：z_1 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_2。因为 y 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 yy_2 的 k 值为 2，$yy_2y_4y_3$，yy_2zy_1 是仅有的两个经过 yy_2 的四圈；同时，可以验证 x 只与 x_3 距离为 2 而与 y_5 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_5 必须与 y_3 距离为 2。则 y_5 必须与 y_3 除其在四圈 $yy_2y_4y_3$ 中两邻居外剩余两邻居——y_8，y_6——中的一个相连。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.ii.i：y_5 与 y_8 相连。

现在考虑边 yy_1。因为 y 度数为 4，y_1 度数为 5，所以 yy_1 的 k 值为 2，$yy_1y_6y_3$，yy_2zy_1 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈；同时，可以验证 x 只与 x_2 距离为 2 而与 y_7 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 y_3 距离为 2。则 y_7 必须与 y_3 除其在四圈 $yy_1y_6y_3$ 中两邻居外剩余两邻居——y_8，y_4——中的一个相连。容易验证 y_7 只能与 y_4 相连。

现在考虑边 zy_1。因为 z 度数为 4，y_1 度数为 5，zy_1yy_2，$zy_1x_2x_3$ 是仅有的两个经过 zy_1 的四圈，又因为可以验证 x_1 的所有邻居都不可以与 y_7 相连，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 z_1 距离为 2。则 y_7 与 z_1 有公共邻居。假设 y_7 与 x_1 的一个公共邻居为 z_2。容易验证要么 $z_2=p$，要么 z_2 为新顶点。

现在考虑边 zz_1。因为 y_2z 的 k 值为 2 且已有两个四圈——$x_1zy_2x_3$，y_1zy_2y——经过 y_2z。所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 y_2z。因为 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 x_1z。一个经过 zz_1 的四圈也不能包含 y_1z，这是因为 z 的度数为 4，y_1 度数为 5，所以 y_1z 的 k 值为 2，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈。综上，不能有 4 圈经过 zz_1。又因为 z 度数为 4，所以 z_1 度数为 2。

假如 $z_2=p$，则 z_1p 的 k 值为 0，因为假如有四圈经过 z_1p，仅有的两条以 z_1 为端点的边——z_1p，z_1z——都必须包含在该四圈中，则有四圈经过 z_1z。又因为 p 已有四个邻居，所以 p 度数为 4。现在考虑边 zy_2。因为 z 度数为 4，y_2 度数为 5，$x_1zy_2x_3$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 zy_2 的四圈，所以

根据充要条件 6，z_1 必须与 y_5，y_4 中的至少一个距离为 2。则 y_5，y_4 中至少有一个要与 z_1 除 z 外的唯一邻居 p 相连。但二者中任一个与 p 相连都会导致 p 度数超过 4。

因此，z_2 是一个新顶点。仍然考虑边 zy_2。因为 z 度数为 4，y_2 度数为 5，$x_1zy_2x_3$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 zy_2 的四圈，所以根据充要条件 6，z_1 必须与 y_5，y_4 中的至少一个距离为 2。则 y_5，y_4 中至少有一个要与 z_1 除 z 外的唯一邻居 z_2 相连。但如图所示二者中任一个与 z_2 相连都会产生三圈。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.ii.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.ii.ii：y_5 不与 y_8 相连。

此时 y_5 必须与 y_6 相连。

现在考虑边 zy_2。因为 z 度数为 4，y_2 度数为 5，$x_1zy_2x_3$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 zy_2 的四圈，又因为可以验证 x_1 的所有邻居都不能与 y_5 相连，所以根据充要条件 6，z_1 必须与 y_5 距离为 2。则 z_1 与 y_5 有公共邻居。假设 z_1 与 y_5 的公共邻居为 z_2。

现在考虑边 zz_1。因为 y_2z 的 k 值为 2 且已有两个四圈——$x_1zy_2x_3$，y_1zy_2y——经过 y_2z。所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 y_2z。因为 $x_1zy_1x_2$，$x_1zy_2x_3$ 是仅有的两个经过 x_1z 的四圈，所以一个经过 zz_1 的四圈不能包含 x_1z。一个经过 zz_1 的四圈也不能包含 y_1z，这是因为 z 的度数为 4，y_1 度数为 5，所以 y_1z 的 k 值为 2，$x_1zy_1x_2$，y_2zy_1y 是仅有的两个经过 y_1z 的四圈。综上，不能有 4 圈经过 zz_1。又因为 z 度数为 4，所以 z_1 度数为 2。

现在考虑边 zy_1。因为 z 度数为 4，y_1 度数为 5，zy_1yy_2，$zy_1x_2x_3$ 是仅有的两个经过 zy_1 的四圈，所以根据充要条件 6，z_1 必须与 y_7，y_6 中的至少一个距离为 2。则 y_7，y_6 中至少有一个要与 z_1 除 z 外的唯一邻居 z_2 相连。但如图所示二者中任一个与 z_2 相连都会产生三圈。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i.ii 不成立。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.ii：y_5 不与 y_7 相连。

考虑边 yy_1。因为 y 度数为 4，y_1 度数为 5，所以 yy_1 的 k 值为 2，$yy_1y_6y_3$，yy_2zy_1 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈；同时，可以验证 x 只与 x_2 距离为 2 而与 y_7 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 y_3，y_2 距离均为 2。则 y_7 必须与 y_2 除其在四圈 yy_2zy_1 中两邻居外剩余三邻居——y_5，x_3，y_4——中的一个相连。又因为 y_5 不与 y_7 相连，所以 y_7 只能与 x_3 或 y_4 相连。

情况三.1.1.III.ii.ii.ii.i：y_7 与 x_3 相连。

现在考虑边 x_1x_3。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_3，z 或 x_3，x_2。因此 x_1x_3 的 k 值最多为 2。又因为已有一个四圈 $x_1x_3y_2z$ 经过 x_1x_3，所以 x_1x_3 的 k 值为 1 或 2。

情况三.1.1.III.ii.ii.ii.i.i：x_1x_3 的 k 值为 1。

因为 x_1x_3 的 k 值为 1，x_1 度数为 4，x_3 已有三个邻居，所以根据已有的充要条件，x_3 度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不属于 $N(x_3)/(S\cup\{x_1\})$，所以根据充要条件 8，x_3 度数不能为 4，x_3 度数为 3。

现在考虑边 y_2x_3。因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2，所以一个经过 y_2x_3 的边不能包含 yy_2。然而，如图所示，y_7，x_1 与 y 的距离均为 2，又因为 x_3 度数为 3，y_2 度数为 5，所以根据充要条件 1，x_3y_2 的曲率不能为 0。

综上，情况三.1.1.III.ii.ii.ii.i.i 不成立。

情况三.1.1.III.ii.ii.ii.i.i：x_1x_3 的 k 值为 2。

因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在除 $x_1x_3y_2z$ 外另一经过 x_1x_3 的四圈中，x_1 的两邻居必定为 x_3，x_2。假设该四圈除 x_1，x_3，x_2 外另一顶点为 x_4。容易验证要么 $x_4=y_8$，要么 x_4 是一个新顶点。

情况三.1.1.III.ii.ii.ii.i.i.i：$x_4=y_8$。

考虑边 y_2x_3。因为 x_3 度数为 4，y_2 度数为 5，所以 y_2x_3 的 k 值为 2。除 $y_2x_3x_1z$ 外另一经过 y_2x_3 的四圈中，x_3 的两邻居只能为 y_2，y_7 或 y_2，y_8。同时，该四圈中 x_3 的两邻居不能为 y_2，y_7，否则假设该四圈除 x_3，y_2，y_7 外另一顶点为 q。显然 q 必须为 y_2 除 x_3 外剩下 4 邻居——y_4，z，y，y_5—

一中的一个。容易验证 q 只能为 y_4。因为 x_3 度数为 4，y_2 度数为 5，$y_2x_3x_1z$，$y_2x_3y_7x_4$ 是仅有的两个经过 y_2x_3 的四圈，又因为如图所示 x_1，y_7 与 y 距离均为 2，所以根据充要条件 6，y_8 只能与 y，y_5 中的一个距离为 2。又因为 y_8 已经与 y 距离为 2，所以 y_8 不能跟 y_5 距离为 2，故根据充要条件 6，y_5 必须与 x_1，y_7 距离均为 2。则 y_5 必须与 x_1 除其在四圈 $y_2x_3x_1z$ 中的邻居外剩下两邻居——x，x_2——中的一个相连。容易验证 y_5 只能与 x_2 相连。但假如 y_5 与 x_2 相连，则如图所示 y_8 与 y_5 距离为 2，矛盾。

因此，该四圈中 x_3 的两邻居只能为 y_2，y_8。假设该四圈除 x_3，y_2，y_7 外另一顶点为 q。显然 q 必须为 y_2 除 x_3 外剩下 4 邻居——y_4，z，y，y_5——中的一个。容易验证 q 只能为 y_5。

考虑边 yy_1。因为 y 度数为 4，y_1 度数为 5，所以 yy_1 的 k 值为 2，$yy_1y_6y_3$，yy_2zy_1 是仅有的两个经过 yy_1 的四圈；同时，可以验证 x 只与 x_2 距离为 2 而与 y_7 距离大于 2，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 y_3，y_2 距离均为 2。则 y_7 必须与 y_3 除其在四圈 $yy_1y_6y_3$ 中两邻居外剩余三邻居——y_8，y_4——中的一个相连。然而 y_7 与 y_4 相连会导致 y_2x_3 的 k 值超过 2，y_7 与 y_8 相连会产生三圈 $y_7y_8x_3$。

情况三.1.1.III.ii.ii.ii.i.i.ii：x_4 是一个新顶点。

情况三.1.1.III.ii.ii.ii.ii：y_7 与 y_4 相连。

情况三.1.1.III.ii：y_2 与 x_3 不相连。

情况三.1.2：x_2 与 y_3 相连。

情况三.2：对所有符合情况三的边 xy，x_1 与 y_1 的公共邻居为 z，和 x_1 与 y_2 的公共邻居为 w 一定是两个不同的顶点。

首先，xx_1 的 k 值一定为 0，因为假如有四圈经过 xx_1，仅有的两条以 x 为端点的边 xx_1，xy 都必须包含在其中，则有四圈经过 xy。又因为 x 的度数为 2 且我们假设不存在两端点度数分别为 2，3 的边，所以 x_1 度数为 4。假设 x_1 除 x，z，w 外剩下一邻居为 x_2。容易验证 x_2 是一个新顶点。

可以发现 yy_1，yy_2，x_1w，x_1z 的地位对称且它们均暂无四圈经过，因此，可以分两种情况：

情况三.2.1：yy_1，yy_2，x_1w，x_1z 有一个 k 值为 0。

不妨假设 yy_1 的 k 值为 0。因为 y 的度数为 4，所以 y_1 度数为 2。同时，y_1z 的 k 值也必须为 0，因为假如有四圈经过 y_1z，仅有的两条以 y_1 为端点的边 yy_1，y_1z 都必须包含在其中，则有四圈经过 yy_1。那么，又因为我们假设不存在两端点度数分别为 2，3 的边，所以 z 度数为 4。则 x_1，z 度数均为 4，根据已有的充要条件 x_1z 的 k 值为 1 或 2。同时，x_1z 的 k 值不能为 2，这是因为 xx_1 的 k 值为 0，所以 x 属于 $N(x_1)/(T\cup\{z\})$，同理 y_1 属于 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$，而如图所示 x，y_1 的距离为 2，故根据充要条件 5，x_1z 的曲率不能为 0。因此，x_1z 的 k 值为 1。因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在经过 x_1z 的唯一四圈中，x_1 的两邻居只能为 z，x_2 或 z，w。

情况三.2.1.I：经过 x_1z 的唯一四圈中，x_1 的两邻居为 z，x_2。

假设该四圈除 x_1，z，x_2 外另一顶点为 x_3。容易验证 x_3 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1w。因为 xx_1 的 k 值为 0，$x_1zx_3x_2$ 是经过 x_1z 的唯一四圈，所以在一个经过 x_1w 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 w，x_2，x_1w 的 k 值最多为 1。

情况三.2.1.I.i：x_1w 的 k 值为 0。

因为 x_1 度数为 4，所以 w 度数为 2。同时，wy_2 的 k 值必须为 0，因为假如有四圈经过 wy_2，那么仅有的两条以 w 为端点的边 wy_2，x_1w 都必须包含其中，则有四圈经过 x_1w。那么，又因为我们假设不存在两端点度数分别为 2，3 的边，所以 y_2 度数为 4。则 y，y_2 度数均为 4，根据已有的充要条件 yy_2 的 k 值为 1 或 2。又因为 xy，yy_1 的 k 值均为 0，所以仅有一个四圈经过 yy_2，且在该四圈中 y 两邻居为 y_2，y_3。假设该四圈除 y，y_2，y_3 外剩下一顶点为 y_4，容易验证 y_4 是一个新顶点。

因为 xy，yy_1 的 k 值均为 0，所以 $yy_2y_4y_3$ 是经过 yy_3 的唯一四圈。又因为 y_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 2，3 或 4。

情况三. 2. 1. I. i. i：y_3 的度数为 2。

前面已证明 z 度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，x_3 外另一邻居为 z_1。现在考虑边 x_1z。因为 x_1，z 度数均为 4，$x_1zx_3x_2$ 是经过 x_1z 的唯一四圈，所以根据充要条件 8，w 必须与 y_1，z_1 中的一个距离为 2。又因为 y_1 显然不能与 w 除 x_1 外的唯一邻居 y_2 相连，所以 w 只能与 z_1 距离为 2，z_1 与 y_2 相连。

现在考虑边 x_1x_2。因为 xx_1，x_1w 的 k 值均为 0，所以 $x_1zx_3x_2$ 是经过 x_1x_2 的唯一四圈。又因为 x_1 度数为 4，所以根据已有的充要条件，x_2 度数为 2，3 或 4。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点均不能与 x_2 相连，所以根据充要条件 6 和 8，x_2 的度数不能为 3 或 4，x_2 度数为 2。

现在考虑边 y_3y_4。因为 y_3 度数为 2，有一四圈 $yy_2y_4y_3$ 经过 y_3y_4，且可以验证所有与 y 距离为 2 的点均不能与 y_4 相连，所以根据已有的充要条件 y_4 度数为 4。考虑边 y_2y_4。因为 y_2，y_4 度数均为 4，所以根据已有的充要条件 y_2y_4 的 k 值为 1 或 2。同时 y_2y_4 的 k 值不能为 1，这是因为 wy_2 的 k 值为 0，所以显然 w 属于 $N(y_2)/(S\cup\{y_4\})$。又因为可以验证所有与 w 距离为 2 的点均不能与 y_4 相连，所以根据充要条件 8，y_2y_4 的 k 值不能为 1。

继续考虑边 y_2y_4。因为 y_2w 的 k 值为 0，所以在除 $yy_2y_4y_3$ 外另一经过 y_2y_4 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 y_4，z_1。假设该四圈除 y_2，y_4，z_1 外另一顶点为 y_5，容易验证 y_5 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2z_1。因为 wy_2 的 k 值为 0，$yy_2y_4y_3$ 是经过 yy_2 的唯一四圈，所以 $y_2y_4y_5z_1$ 是经过 y_1z_1 的唯一四圈。又因为 y_2 度数为 4，z_1 已有三个邻居，所以根据已有的充要条件，z_1 度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 w 或 y 距离为 2 的点中，只有 z 可以与 z_1 相连，所以根据充要条件 8，z_1 度数不能为 4，z_1 度数为 3。

现在考虑边 zz_1。因为 z 度数为 4，z_1 度数为 3，所以根据已有的充要条件 zz_1 的 k 值为 1。因为 $y_2y_4y_5z_1$ 是经过 y_1z_1 的唯一四圈，所以经过 zz_1 的唯一四圈中，z_1 的两邻居只能为 z，y_5。假设该四圈除 z_1，z，y_5 外另一顶点为 p。显然 p 必须为 z 除 z_1 外剩下三邻居——x_1，y_1，x_3——中的一个。容易验证 p 只能为 x_3。

现在考虑边 z_1，y_5。因为 z_1 度数为 3，有两个四圈 $y_2y_4y_5z_1$，$zx_3y_5z_1$ 经过 z_1y_5，所以根据已有的充要条件 y_5 度数为 5。考虑边 y_4y_5。y_4 度数为 4，y_5 度数为 5，$yy_2y_4y_3$ 是经过 y_3y_4 的唯一四圈故 y_3 就是 $N(y_4)/(T\cup\{y_5\})$ 中的唯一一点。然而可以验证所有与 y_3 距离为 2 的点均不能与 y_5 相连，所以根据充要条件 6，y_4y_5 的曲率不能为 0。

综上，情况三.2.1.I.i.i 不成立。

情况三.2.1.I.i.ii：y_3 的度数大于 2。

考虑边 yy_3。此时，综合充要条件 6 和 8，可知 x 必须与 y_3 的某邻居距离为 2。可以验证所有与 x 距离为 2 的点中，只有 x_2 可以与 y_3 相连。故 x_2 与 y_3 相连。

前面已证明 y_2 度数为 4。假设 y_2 除 y，z，y_4 外另一邻居为 y_5。容易验证要么 $y_5=x_3$，要么 y_5 为新顶点。

情况三.2.1.I.i.ii.i：$y_5=x_3$。

考虑边 x_1z。因为 $x_1zx_3x_2$ 是经过 x_1z 的唯一四圈，x_1，z 度数均为 4，所以根据充要条件 8，w 必须与 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$ 中的某点距离为 2。又因为可以验证所有与 w 距离为 2 的点中，只有 y_4 可以属于 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$，所以 y_4 与 z 相连。然而考虑边 wy_2。此时 x_1 与 x_3，y_4 都有公共邻居 z，违反了我们的假设：对所有 k 值为 0，两端点度数为 2 和 4 的边 mn，$N(m)/(\{n\}\cup T)$ 中的点 m_1 与 $N(n)/(\{m\}\cup S)$ 中的点 n_1，n_2 的公共邻居分别为 z，w，则 z，w 一定是两个不同的顶点。

情况三.2.1.I.i.ii.ii：y_5 为新顶点。

考虑边 x_1x_2。因为 xx_1，x_1z 的 k 值均为 0，所以 $x_1x_2x_3z$ 是经过 x_1x_2 的唯一四圈。又因为 x_1 度数为 4，x_2 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件 x_2 的度数为 3 或 4。综合考虑充要条件 6 和 8，可知 w 必须与 x_2 的某邻居相连。又因为可以验证所有与 w 距离为 2 的点中，只有 y_5 可以与 x_2 相连，所以 y_5 与 x_2 相连。

考虑边 x_1z。因为 $x_1zx_3x_2$ 是经过 x_1z 的唯一四圈，x_1，z 度数均为 4，所以根据充要条件 8，w 必须与 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$ 中的某点距离为 2。又因为可以验证所有与 w 距离为 2 的点中，只有 y_4 可以属于 $N(z)/(S\cup\{x_1\})$，所以 y_4 与 z 相连。

考虑边 yy_3。因为 $yy_2y_4y_3$ 是经过 yy_3 的唯一四圈，又因为 y 度数为 4，y_3 已有三个邻居，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 y_1 距离为 2 的点都不可以属于 $N(y_3)/(S\cup\{y\})$，所以 y_3 的度数不能为 4，y_3 度数为 3。

考虑边 y_3x_2。因为 y_3 度数为 3，x_2 度数为 4，所以根据已有的充要条件 y_3x_2 的 k 值为 1。因为 $yy_3y_4y_2$ 是经过 yy_3 的唯一四圈，所以在经过 y_3x_2 的唯一四圈中，y_3 的两邻居只能为 x_2，y_4。假设该四圈除 y_3，x_2，y_4 外另一顶点为 q。显然 q 必须为 x_2 除 y_3 外剩余 3 邻居——y_5，x_3，x_1——中的一个。可以验证无论 q 为三者中的哪一个的会产生三圈。

综上，情况三.2.1.I.i.ii 不成立。

综上，情况三. 2. 1. I. i 不成立。

情况三. 2. 1. I. ii：x_1w 的 k 值为 1。

情况三. 2. 1. II：经过 x_1z 的唯一四圈中，x_1 的两邻居为 z，w。

假设该四圈除 x_1，z，x_2 外另一顶点为 x_3。容易验证 x_3 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1x_2。因为 xx_1 的 k 值为 0，x_1zx_3w 是经过 x_1z 的唯一四圈，所以在一个经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 w，x_2，x_1x_2 的 k 值最多为 1。

情况三.2.1.II.i：x_1x_2 的 k 值为 0。

现在考虑边 yy_3。因为 xy，yy_1 的 k 值均为 0，所以在一个经过 yy_3 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_3，y_2，yy_3 的 k 值最多为 1。

情况三.2.1.II.i.i：yy_3 的 k 值为 0。

现在考虑边 yy_2。因为 xy，yy_1，yy_3 的 k 值均为 0，所以没有四圈经过 yy_2。又因为 y 度数为 4，所以 y_2 度数为 2。这也导致 y_2w 的 k 值为 0，因为假如有四圈经过 y_2w，仅有的两条以 y_2 为端点的边 yy_2，y_2w 都必须包含其中，则有四圈经过 yy_2。又因为我们假设不存在两端点度数分别为 2，3 的边，所以 w 度数为 4。假设 w 除 x_1，y_2，x_3 外另一邻居为 w_1，容易验证 w_1 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1x_2。因为 x_1x_2 的 k 值为 0，又因为 x_1 度数为 4，所以 x_2 度数为 2。假设 x_2 除 x_1 外另一邻居为 x_4。容易验证 x_4 是一个新顶点。

前面已证明 z 的度数为 4。假设 z 除 x_1，y_1，x_3 外另一邻居为 z_1。容易验证 z_1 是一个新顶点。考虑边 x_1z。因为 x_1zx_3w 是经过 x_1z 的唯一四圈，x_1，z 度数均为 4，所以根据充要条件 8，z_1 必须与 x_2，x 中的一个距离为 2。容易验证 x 的所有邻居都不能与 z_1 相连，所以 z_1 只能与 x_2 距离为 2，z_1 与 x_2 除 x_1 外唯一一邻居 x_4 相连。

现在考虑边 x_1w。因为 xx_1，x_1x_2 的 k 值均为 0，所以 x_1zx_3w 是经过 x_1w 的唯一四圈。又因为 x_1，w 度数均为 4，所以根据充要条件 8，w_1 必须与 x_2，x 中的一个距离为 2。容易验证 x 的所有邻居都不能与 z_1 相连，所以 w_1 只能与 x_2 距离为 2，w_1 与 x_2 除 x_1 外唯一一邻居 x_4 相连。

现在考虑边 zz_1。因为 y_1z_1 的 k 值为 0，x_1zx_3w 是经过 x_1z 的唯一四圈，所以在一个经过 zz_1 的四圈中，z 的两邻居只能为 y_1，z_1。zz_1 的 k 值最多为 1。

情况三.2.1.II.i.i.i：zz_1 的 k 值为 0。

此时由于 z 度数为 4，z_1 度数为 2。

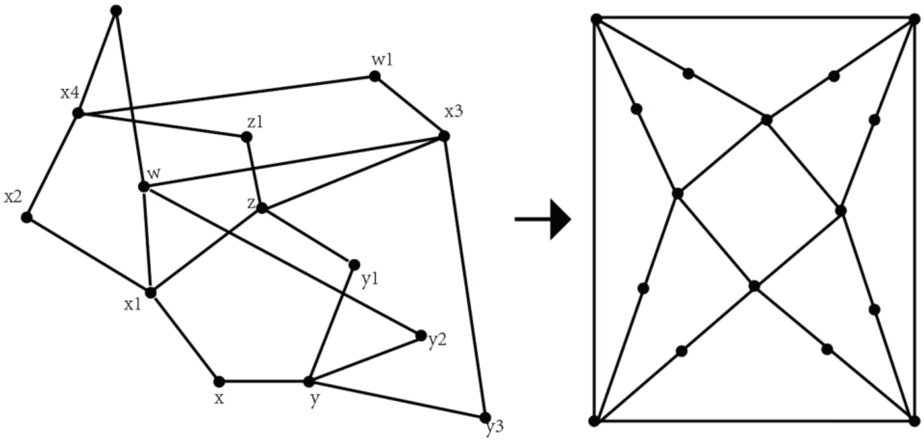
现在考虑边 zx_3。因为 zz_1，zy_1 的 k 值均为 0，所以 x_1zx_3w 是经过 zx_3 的唯一四圈。又因为 z 度数为 4，所以根据已有的充要条件，x_3 度数为 2，3 或 4。假如 x_3 度数为 2，容易验证 x_4 与 y_1，x_3 都不能有公共邻居，所以根据充要条件 7，zz_1 的曲率不能为 0。因此，x_3 度数大于 2。那么，综合考虑充要条件 6 和 8，可知 y_1 必须与 x_3 的某邻居距离为 2，又因为可以验证所有与 y_1 距离为 2 的点中，只有 y_3 可以与 x_3 相连，所以 y_3 与 x_3 相连。

现在考虑边 y_3x_3。y_3x_3 的 k 值为 0，因为假如有四圈经过 y_3x_3，则仅有的两条以 y_3 为端点的边 yy_3，y_3x_3 都必须包含在内，则有四圈经过 yy_3。又因为 y_3 度数为 2，且我们假设不存在两端点度数分别 2，3 的边，所以 x_3 度数为 4。假设 x_3 除 w，z，y_3 外另一邻居为 x_5。容易验证 x_5 是一个新顶点。根据充要条件 8，x_5 必须和 y_1，z_1 中的一个距离为 2。又因为可以验证 y_1 的所有邻居都不能与 x_5 相连，所以 x_5 只能与 z_1 距离为 2，x_5 与 z_1 除 z 外的唯一邻居 x_4 相连。

现在考虑边 x_3x_5。因为 y_3x_3，的 k 值为 0，x_1zx_3w 是经过 zx_3 的唯一四圈，所以在一个经过 x_3x_5 的四圈中，x_3 的两邻居只能为 x_5，w。因此，假如有四圈经过 x_3x_5，设该四圈除 x_3，x_5，w 外另一顶点为 r。显然 r 只能为 w 除 x_3 外剩余三邻居——x_1，y_2，w_1——中的一个。容易验证 r 为这三者中的任何一个都会产生三圈或导致某顶点度数超过上限。因此，没有四圈经过 x_3x_5。又因为 x_3 度数为 4，所以 x_5 度数为 2。同时，因为 x_3x_5，x_3y_3 的 k 值均为 0，所以 x_1zx_3w 是经过 wx_3 的唯一四圈。

最后考虑边 ww_1，因为 y_2w 的 k 值为 0，x_1zx_3w 是经过 wx_3 或 x_1x_3 的唯一四圈，因此没有四圈经过 ww_1。又因为 w 度数为 4，所以 w_1 度数为 2。

那么，此时该图中所以顶点度数均已达上限，不能再扩张。综上，情况三.2.1.II.i.i.i 时，只有一种 Ricci-Flat 图，如下图所示。



情况三.2.1.II.i.i.ii：zz_1 的 k 值为 1。

情况三.2.1.II.i.ii：yy_3 的 k 值为 1。
情况三.2.1.II.ii：x_1x_2 的 k 值为 1。

情况三.2.2：yy_1，yy_2，x_1w，x_1z 的 k 值均大于 0。

因为 xx_1 的 k 值为 0，所以在一个经过 x_1z 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 z，x_2 或 z，w。同理在一个经过 x_1w 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 w，x_2 或 z，w。类似的，在一个经过 yy_1 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_1，y_2 或 y_1，y_3；在一个经过 yy_2 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_1，y_2 或 y_2，y_3。

情况三.2.2.I：有四圈同时包含 yy_1，y_1y_3（yy_2，y_1y_3）或有四圈同时包含 x_1w，x_1x_2（x_1z，x_1x_2）。

情况三.2.2.II：没有四圈同时包含 yy_1，y_1y_3（yy_2，y_1y_3）或同时包含 x_1w，x_1x_2（x_1z，x_1x_2）。

这种情况下，只有一个四圈经过 yy_1，且该四圈中 y 的两邻居为 y_1，y_2。假设该四圈除 y，y_1，y_2 为另一顶点为 y_4。容易验证 y_4 是一个新顶点。根据我们的假设 $yy_1y_4y_2$ 也是经过 yy_2 的唯一四圈。

同时，也只有一个四圈经过 x_1z，且该四圈中 x_1 的两邻居为 w，z。假设该四圈除 x_1，w，z 为另一顶点为 x_3。容易验证 x_3 是一个新顶点。根据我们的假设 x_1wx_3z 也是经过 x_1w 的唯一四圈。

现在考虑边 yy_1。因为 $yy_1y_4y_2$ 是经过 yy_1 的唯一四圈，又因为 y 度数为 4，y_1 已有 3 个邻居，所以 y_1 的度数为 3 或 4。同理，y_2，w，z 的度数都为 3 或 4。

情况三.2.2.II.i：y_1，y_2，w，z 中有一个度数为 3。

四个顶点地位对称，所以不失一般性假设 y_1 度数为 3。

现在考虑边 y_1z。因为 $yy_1y_4y_2$ 是经过 yy_1 的唯一四圈，所以在一个经过 y_1z 的四圈中，y_3 的两邻居只能为 z，y_4。y_1z 的 k 值最多为 1。

情况三.2.2.II.i.i：y_1z 的 k 值为 0。

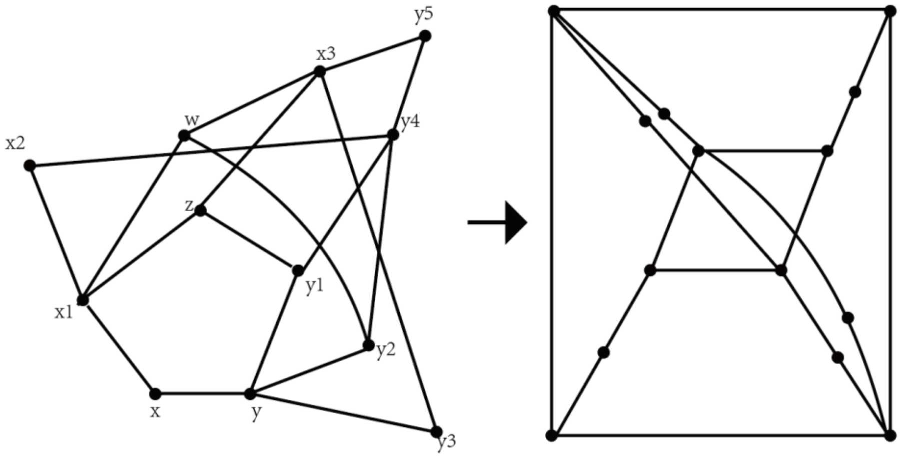
因为 y_1 度数为 3，且 z 已有三个邻居，所以 z 度数为 3。
现在考虑边 yy_3。因为 xy 的 k 值为 0，$yy_1y_4y_2$ 是经过 yy_1 或 yy_2 的唯一四圈，所以没有四圈经过 yy_3。又因为 y 度数为 4，所以 y_3 度数为 2。假设 y_3 除 y 外另一邻居为 p。现在考虑边 yy_1。根据充要条件 6，p 必须与 y_4，z 中的一个相连。假如 p 与 y_4 相连，则 p 与 y_1，y_2 都有公共邻居 y_4，违反了我们的假设：对所有 k 值为 0，两端点度数为 2 和 4 的边 mn，$N(m)/(\{n\}\cup T)$ 中的点 m_1 与 $N(n)/(\{m\}\cup S)$ 中的点 n_1，n_2 的公共邻居分别为 z，w，则 z，w 一定是两个不同的顶点。因此，p 与 z 相连。p 为 z 三邻居——x_1，x_3，y_1——中的一个。容易验证 p 只能为 x_3。同理可证 x_1x_2 的 k 值为 0，x_2 度数为 2，且 x_2 除 x_1 外另一邻居为 y_4。同理可证 y_3x_3 的 k 值为 0，x_3 的度数为 4。

现在考虑边 x_2y_4。x_2y_4 的 k 值为 0，因为假如有四圈经过 x_2y_4，则仅有的两条以 x_2 为端点的边 x_1x_2，x_2y_4 都必须包含在内，则有四圈经过 x_1x_2。又因为 x_2 的度数为 2，且我们假设不存在两端点度数分别为 2，3 的边，所以 y_4 的度数为 4。假设 y_4 除 y_1，y_2，x_2 外另一邻居为 y_5，容易验证 y_5 是一个新顶点。现在考虑边 y_1y_4。因为 y_1 的度数为 3，y_4 度数为 4，所以 $yy_1y_4y_2$ 是经过 y_1y_4 的唯一四圈。根据充要条件 6，y_5 必须与 y，z 中的一个距离为 2。又因为容易验证所有 z 的邻居都不能与 y_5 相连，所以 y_5 只能与 z 的距离为 2。则 y_5 必须与 z 的邻居——x_1，x_3，y_1——中的一个相连。容易验证 y_5 只能与 x_3 相连。

现在考虑边 yy_2。因为 $yy_1y_4y_2$ 是经过 yy_2 的唯一四圈，又 y 度数为 4，y_2 已有 3 个邻居，所以根据已有的充要条件，y_2 度数为 3 或 4。又因为可以验证所有与 x 或 y_3 距离为 2 的点中，只有 w 可以属于 $N(y_2)/(y\cup S)$，所以根据充要条件 8，y_2 度数不能为 4，y_2 度数为 3。同理 w 度数为 3。

最后考虑边 y_4y_5。因为 y_2 度数为 3，y_4 度数为 4，所以 $yy_1y_4y_2$ 是经过 y_2y_4 的唯一四圈，又因为 $yy_1y_4y_2$ 是经过 y_1y_4 的唯一四圈，x_2y_4 的 k 值为 0，所以没有四圈经过 y_4y_5，又因为 y_4 度数为 4，所以 y_5 度数为 2。

那么，此时该图中所以顶点度数均已达上限，不能再扩张。综上，情况三.2.2.II.i.i 时，只有一种 Ricci-Flat 图，如下图所示。



情况三.2.2.II.i.ii：y_1z 的 k 值为 1。

情况三.2.2.II.ii：y_1，y_2，w，z 的度数都为 4。

假设一个有限 Ricci-Flat 图 G 中所有边的 k 的最小值为 1：

情况一：存在一条边 xy，d_x=d_y=3 且 xy 的 k 值为 1。

情况二：不存在满足情况一，二的边，但存在一条边 xy，d_x=3，d_y=4 且 xy 的 k 值为 1。

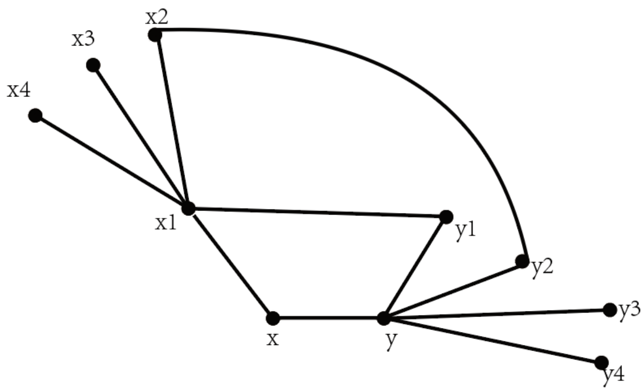
情况三：不存在满足情况一，二的边，但存在一条边 xy，d_x=d_y=4 且 xy 的 k 值为 1。

情况四：不存在满足情况一，二，三的边，但存在一条边 xy，d_x=2，d_y=4 且 xy 的 k 值为 1。

情况五：不存在满足情况一，二，三，四的边，但存在一条边 xy，d_x=2，d_y=5 且 xy 的 k 值为 1。

假设 T 中的唯一一点为 x_1，S 中唯一一点为 y_1，$N(y)/(S\cup\{x\})$中的三点为 y_2，y_3，y_4。现在考虑边 xx_1。因为 x 度数为 2 且有一四圈 xx_1y_1y 经过 xx_1，又因为我们假设不存在满足情况一，二，三的边，所以根据已有的充要条件，x_1 的度数为 5 或 6。

情况四.1：x_1 的度数为 5。



假设 x_1 除 x，y_1 外其余三邻居为 x_2，x_3，x_4。根据充要条件 2，x_1 恰与 y_2，y_3，y_4。中的一个距离为 2，也就是 y_2，y_3，y_4 中恰有一个与 x_2，x_3，x_4 中的某个相连。不失一般性假设 x_2 与 y_2 相连。

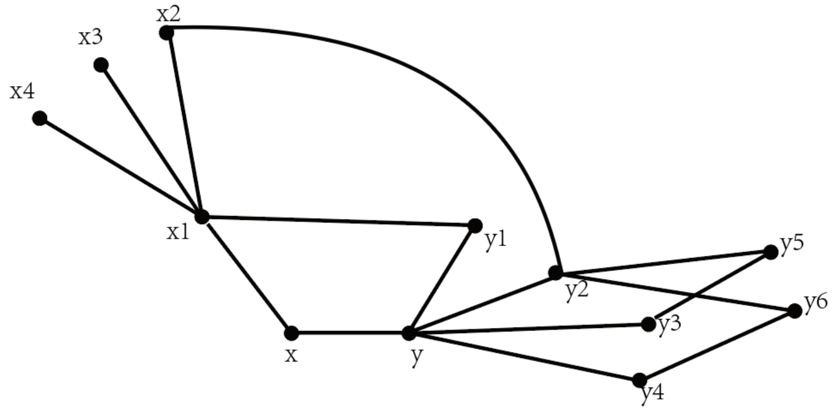
现在考虑边 yy_2。因为 xx_1y_1y 是经过 xy 的唯一四圈，所以在一个经过 yy_2 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_2，y_1、y_2，y_3 或 y_2，y_4，yy_2 的 k 值最多为 3。同时，yy_2 的 k 值不能小于 2。否则 yy_2 的 k 值为 0 或 1。因为 y 度数为 5，yy_2 的 k 值显然不能为 0。假如 yy_2 的 k 值为 1，因为 y 度数为 5，

根据已有的充要条件 y_2 的度数为 2。那么，在经过 yy_2 的唯一四圈中，y_2 的两邻居只能为 y，x_2。假设该四圈除 y_2，y，x_2 外另一顶点为 p。显然 p 必须为 y 除 y_2 外剩下四邻居——x，y_1，y_3，y_4——中的一个。p 为 x 或 y_1 都会产生三圈，p 为 y_3 或 y_4 都会导致 y_2，y_3，y_4 中有超过一个顶点与 x_1 距离为 2。综上，yy_2 的 k 值也不能为 1。

因此，yy_2 的 k 值为 2 或 3。

情况五.1.I：yy_2 的 k 值为 2。

情况五.1.I.i：yy_2 分别与 yy_3，yy_4 构成四圈。



假设 yy_2 与 yy_3 构成的四圈除 y，y_2，y_3 外另一顶点为 y_5，yy_2 与 yy_4 构成的四圈除 y，y_2，y_4 外另一顶点为 y_6。容易验证 y_5，y_6 都是新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2，所以在一个经过 yy_1 的四圈中，y 的两邻居只能为 x，y_1、y_3，y_1 或 y_4，y_1，yy_1 的 k 值最多为 3。又因为已有一个四圈 xx_1y_1y 经过 yy_1，所以 yy_1 的 k 值为 1，2 或 3。同时，yy_1 的 k 值不能为 1。否则，考虑边 yy_2。因为 yy_2 的 k 值为 2，y 度数为 5，y_2 已有四个邻居，所以根据已有的充要条件，y_2 的度数为 4 或 5。又因为可以验证所有与 x 或 y_1 距离为 2 的点中，只有 x_2 可以与 y_2 相连，所以根据充要条件 8，y_2 的度数不能为 5，y_2 的度数为 4。那么，根据充要条件 6，y_5，y_6 中至少有一个与 x 或 y_1 距离为 2。然而，可以验证所有与 x 或 y_1 距离为 2 的点不包含 y_5 或 y_6。因此，yy_1 的 k 值不能为 1，yy_1 的 k 值为 2 或 3。

情况五.1.I.i.i：yy_1 的 k 值为 2。

不失一般性假设在除 xx_1y_1y 外另一经过 yy_1 的四圈中，y 的两邻居为 y_1，y_3。设该四圈除 y，y_1，y_3 外另一顶点为 y_7。容易验证 y_7 是一个新顶点。

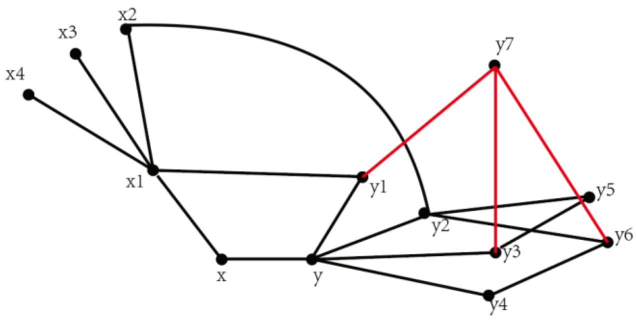
现在考虑边 yy_4。因为 xx_1y_1y 是经过 xy 的唯一四圈，yy_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_1，所以在一个经过 yy_4 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_2，y_4 或 y_3，y_4，yy_4 的 k 值最多为 2。又因为已有一个四圈 $yy_4y_6y_2$ 经过 yy_4，所以 yy_4 的 k 值为 1 或 2。

情况五.1.I.i.i.i：yy_4 的 k 值为 1。

这时，因为 y 的度数为 4，所以 y_4 的度数为 2。

现在考虑边 yy_3。因为 $yy_4y_6y_2$ 是经过 yy_4 的唯一四圈，所以 $yy_3y_7y_1$，$yy_3y_5y_2$ 是仅有的两个经过 yy_3 的四圈。又因为 y 度数为 2，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 3，4 或 5。同时，假如 y_3 度数大于 3，综合考虑充要条件 6 和 8 可知 x 必须与 y_3 的某邻居距离为 2，然而可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能与 y_3 相连。因此，y_3 度数不能大于 3，y_3 度数为 3。那么，根据充要条件 1，y_7，y_5 中恰有一个与 x，y_4 中的一个距离为 2。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能与 y_3 相连，所以该点只能与 y_4 距离为 2，即 y_4 与 y_7，y_5 中的某个距离为 2，y_4 除 y 外的唯一邻居 y_6 与 y_7，y_5 中的某个相连。y_6 与 y_5 相连会产生三圈 $y_2y_6y_5$，所以 y_6 与 y_7 相连。

现在考虑边 yy_4。 $yy_4y_6y_2$ 是经过 yy_4 的唯一四圈，y 度数为 5，y_4 度数为 2，而如图所示 y_6 与 y_3，与 y_1 距离均为 2，所以根据充要条件 2，已有 yy_4 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.I.i.i.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii：yy_4 的 k 值为 2。

考虑边 yy_4。因为 xy 的 k 值为 0，yy_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_1，所以在除 $yy_4y_6y_2$ 外另一经过 yy_4 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_4，y_3。假设该四圈除 y，y_4，y_3 外剩下一邻居为 y_8。容易验证 y_8 是一个新顶点。因为 $yy_4y_6y_2$，$yy_4y_8y_3$ 是仅有的两个经过 yy_4 的四圈，又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_4 的度数为 3，4 或 5；同时，可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以与 y_4 相连，所以综合考虑充要条件 6 和 8，y_4 的度数不能大于 3，y_4 的度数为 3。

现在考虑边 yy_1。因为 yy_1 的 k 值为 2 且 y 的度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_1 的度数为 3，4 或 5。假如 y_1 的度数为 3，考虑边 yy_4。根据充要条件 1，y_8，y_6 中恰有一点 p 与 x，y_1 中的某个距离为 2。又因为所有与 x 距离为 2 的点都不可以与 y_4 相连，所以 p 只能与 y_1 距离为 2。即 p 与 y_1 除 y 外剩下两邻居——x_1，y_7——中的某个相连。又因为 x_1 度数已达上限，所以 p 只能与 y_7 相连。如果 p 为 y_8 会产生三圈 $y_8y_3y_7$，所以 p 为 y_6。此时，如图所示 y_7，x_1 均与 y_2 距离为 2，所以根据充要条件 1，yy_1 的曲率不能为 0。

因此 y_1 的度数不能为 3，y_1 的度数为 4 或 5。两种情况下 y_4 都必须与 $N(y_1)/(T\cup y)$ 中的某点距离为 2。这是因为若 y_1 的度数为 5，根据充要条件 8，y_4 都必须与 $N(y_1)/(T\cup y)$ 中的某点距离为 2。若 y_1 的度数为 4，因为可以验证 y_4 与 x_1 的所有邻居都不能相连，所以 y_4 与 x_1 距离不能为 2，根据充要条件 6，y_4 都必须与 $N(y_1)/(T\cup y)$ 中的唯一一点距离为 2。假设 $N(y_1)/(T\cup y)$ 中的一点 y_9 与 y_4 距离为 2。容易验证 y_9 是一个新顶点。 y_9 与 y_4 有公共邻居，该公共邻居为 y_8 或 y_6。

情况五.1.I.i.i.ii.i：y_6 是 y_9 与 y_4 的公共邻居。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i：y_1 度数为 4。

现在考虑边 x_1y_1。因为 y_1 度数为 4，x_1 度数为 5，所以根据充要条件，x_1y_1 的 k 值为 2。假设在除 xyy_1x_1 外另一经过 x_1y_1 的四圈中，y_1 的两邻居为 x_1，y_7。设该四圈除 y_1，x_1，y_7 外另一顶点为 p。显然 p 只能为 x_1 除其在四圈 xyy_1x_1 中两邻居为剩余三邻居——x_2，x_3，x_4——中的一个。容易验证无论 p 为三者中的哪一个都会产生矛盾。所以，在除 xyy_1x_1 外另一经过 x_1y_1 的四圈中，y_1 的两邻居为 x_1，y_9。设该四圈除 y_1，x_1，y_9 外另一顶点为 q。显然 q 只能为 x_1 除其在四圈 xyy_1x_1 中两邻居为剩余三邻居——x_2，x_3，x_4——中的一个。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i.i：q 为 x_2。

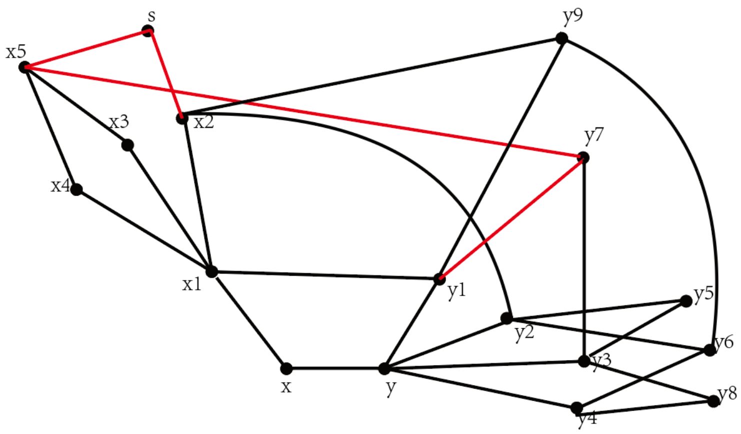
现在考虑边 x_2y_2。因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2。所以一个经过 x_2y_2 的四圈不能包含 yy_2。因此，所以一个经过 x_2y_2 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 x_2，y_5 或 x_2，y_6，x_2y_2 的 k 值最多为 2。又因为 y_2 度数为 4，所以综合已有的充要条件和我们的假设，x_2y_2 的 k 值大于 1。因此，x_2y_2 的 k 值为 2，又因为 y_2 度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_2 的度数为 4 或 5。

现在考虑边 x_1x_2。假如 x_1x_3，x_1x_4 都与 x_1x_2 构成四圈，又因为已有一个四圈 $x_1y_1y_9x_2$ 经过 x_1x_2，所以已有三个四圈经过 x_1x_2。又因为 xyy_1x_1 是经过 xx_1 的唯一四圈，所以一个经过 x_1x_2 的四圈不能包含 xx_1，x_1x_2 的 k 值为 3。又因为 x_1 度数为 5，所以根据已有的充要条件，x_2 的度数为 5 或 6，又因为已证明 x_2 的度数为 4 或 5，所以 x_2 的度数为 5。同时，一个经过 x_1x_2 的四圈不能包含 x_2y_2，否则假设该四圈除 x_1，x_2，y_2 外另一顶点为 r。显然 r 只能为 y_2 除 x_2 外剩余三邻居——y_5，y，y_6——中的一个。容易验证无论 r 为三者中的哪一个都会导致某些顶点度数超过上限。因此，$y_2\in N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$。又因为 $x\in N(x_1)/(\{x_2\}\cup T)$ 且如图所示 x 与 y_2 的距离为 2，所以根据充要条件 5，x_1x_2 的曲率不能为 0。

综上，x_1x_3，x_1x_4 中至少有一个不与 x_1x_2 构成四圈，不失一般性假设 x_1x_3 不与 x_1x_2 构成四圈。现在考虑边 x_1x_3。因为 xyy_1x_1 是唯一一个经过 xx_1 的四圈，x_1y_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈———

一经过 x_1y_1，又因为 x_1x_3 不与 x_1x_2 构成四圈，所以只有一个四圈经过 x_1x_3，且该四圈中 x_1 两邻居为 x_3，x_4。假设该四圈除 x_1，x_3，x_4 外另一顶点为 x_5。因为 x_1x_3 的 k 值为 1 且 x_1 度数为 5，所以根据已有的充要条件 x_3 度数为 2。现在考虑边边 x_1y_1。因为 y_1 度数为 4，x_1 度数为 5，xyy_1x_1，$x_2y_9y_1x_1$ 是仅有的两个经过 x_1y_1 的四圈，又因为可以验证 y 的所有邻居都不与 x_3 或 x_4 相连，所以根据充要条件 6，y_7 必须与 x_3，x_4 距离均为 2。那么，y_7 必须与 x_3 除 x_1 外的唯一邻居 x_5 相连。结合这点考虑可知 x_5 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1x_2。因为 x_1x_3，xx_1 都不与 x_1x_2 构成四圈，x_1 度数为 5，且 $N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$中至少有一点 y_2，所以根据已有的充要条件，x_1x_2 的 k 值为 2 且 x_2 度数为 4 或 5。那么，综合考虑充要条件 6 和 8，可知 x_3 必与某个 x_2 的邻居距离为 2，即 x_2 的某个邻居，设为 s，与 x_3 除 x_1 外的唯一邻居 x_5 相连。然而，此时如图所示 x_5 与 x_2，y_1 距离均为 2，所以根据充要条件 2，x_1x_3 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii：q 为 x_3 或 x_4。

不失一般性假设 q 为 x_3。现在考虑边 y_1y_9。因为 x_1 度数为 4，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_1y_9 的 k 值大于 1。又因为 yy_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_1，所以除 $x_1y_1y_9x_3$ 外只有一个四圈经过 y_1y_9，且该四圈中，y_1 的两邻居为 y_9，y_7。假设该四圈除 y_1，y_9，y_7 外另一顶点为 w。容易验证 w 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2x_2。因为 y_2 度数为 4，所以综合我们的假设和已有的充要条件，y_2x_2 的 k 值大于 1。又因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2，所以一个经过 y_2x_2 的四圈不能包含 yy_2。因此，一个经过 y_2x_2 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 x_2，y_6 或 x_2，y_5。又因为 y_2x_2 的 k 值至少为 2，所以必定有两个四圈经过 y_2x_2，两四圈中 y_2 的两邻居分别为 x_2，y_6、x_2，y_5。假设同时经过 y_2x_2，y_2y_6 的四圈除 y_2，x_2，y_6 外另一顶点为 z_1。容易验证 z_1 为新顶点。

现在考虑边 yy_3。因为 xy 的 k 值为 0，所以 $yy_3y_7y_1$，$yy_3y_5y_2$，$yy_3y_6y_4$ 是仅有的三个经过 yy_3 的四圈。又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_3 的度数为 5 或 6。又因为可以验证任一个与 x 距离为 2 的点与 y_3 相连都会导致 x_1 与 y_2，y_3 距离均为 2，因此根据充要条件 6，y_3 的度数不能为 6，y_3 度数为 5。假设 y_3 除 y，y_7，y_5，y_6 外另一邻居为 y_{10}。容易验证 y_{10} 是一个新顶点。

继续考虑边 y_1y_9。因为 y_1y_9 的 k 值为 2 且 y_1 的度数为 4，所以根据已有的充要条件 y_9 的度数为 4 或 5。又因为如图所示 y 和 y_6 的距离为 2，所以根据充要条件 5，y_9 的度数不能为 4，y_9 的度数为 5。假设 y_9 除 y_1，y_6，x_2，w 外另一邻居为 y_{11}。容易验证要么 $y_{11}=y_{10}$，要么 y_{11} 为新顶点。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i：$y_{11}=y_{10}$。

现在考虑边 x_2y_2。因为 x_2y_2 的 k 值为 2，y_2 的度数为 4，所以根据已有的充要条件，x_2 的度数为 4 或 5。同时，x_2 的度数不能为 4。这是因为首先，一个经过 x_2y_2 的四圈不能经过 x_1x_2，否则假设该四圈除 x_2，y_2，x_1 外另一顶点为 p，显然 p 只能为 y_2 除其在四圈 $x_2y_2y_6z_1$ 中两邻居及 $N(y_2)/(\{x_2\}\cup T)$中的 y 外的唯一邻居 y_5，然而这会导致 x_1 度数超过 5。因此，$x_1\in N(x_2)/(\{y_2\}\cup S)$。这时，如图所示 x_1 与 y 距离为 2，所以根据充要条件 5，x_2y_2 的曲率不能为 0。综上，x_2 的度数不能为 4，x_2 的度数为 5。

现在考虑边 x_1x_2。因为 x_1，x_2 度数均为 5，所以根据已有的充要条件，x_1x_2 的 k 值为 2 或 3。又因为 xyy_1x_1 是经过 x_1y_1 的唯一四圈，x_1y_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1y_1，所以在

一个经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_2，x_3 或 x_2，x_4。因此，必定有两个四圈经过 x_1x_2，且两四圈中 x_1 的两邻居分别为 x_2，x_3 和 x_2，x_4。根据充要条件 8，y_1 必须与 $N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$ 中的某点 x_5 距离为 2。则 x_2 必须与 y_1 除 x_1 外剩余三邻居——y，y_9，y_7——中的一个相连。容易验证所有与 y 或 y_9 相连的顶点都不能与 x_2 相连，所以 x_5 只能与 y_7 相连。结合这点考虑容易验证 x_5 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1x_4。因为 xyy_1x_1 是经过 x_1y_1 的唯一四圈，x_1y_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1y_1，所以假如 x_1x_4 不与 x_1x_3 构成四圈，则只有一个四圈经过 x_1x_4，且其中 x_1 两邻居为 x_4，x_2；又因为 x_1 度数为 5 没所以 x_4 度数为 2，假设 x_4 除 x_1 外另一邻居为 r。同时，也只有两个四圈经过 x_1x_3，其中中 x_1 两邻居分别为 x_3，x_2 和 x_3，y_1。现在考虑边 x_1x_3。因为 x_1x_3 的 k 值为 2 且 x_1 度数为 5，所以根据已有的充要条件 x_3 度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以与 x_3 相连，所以综合充要条件 6 和 8，x_3 度数不能大于 3，x_3 度数为 3。假设除同时经过 x_1x_3，x_1x_2 的四圈除 x_1，x_3，x_2 外另一顶点为 s。根据充要条件 1，s，y_9 中恰有一个与 x，x_4 中的某个距离为 2，又因为所有与 x 距离为 2 的点都不可以与 x_3 相连，所以这个点只能与 x_4 距离为 2，即与 x_4 除 x_1 外的唯一邻居 r 相连。y_9 不能与 r 相连。这是因为由于 x_1x_4 要与 x_1x_2 构成四圈，所以 r 要与 x_2 相连，然而可以验证所有 y_9 的邻居都不能与 x_2 相连。因此，s 与 r 相连。然而如图所示又因为 r 与 x_2 相连，会产生三圈 rx_2s。综上，x_1x_4 必须与 x_1x_3 构成四圈。那么，又因为 xyy_1x_1 是经过 x_1y_1 的唯一四圈，x_1y_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1y_1，所以有两个四圈经过 x_1x_4，其中中 x_1 两邻居分别为 x_3，x_4 和 x_2，x_4。因为 x_1x_4 的 k 值为 2 且 x_1 度数为 5，所以根据已有的充要条件 x_4 度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以与 x_4 相连，所以综合充要条件 6 和 8，x_4 度数不能大于 3，x_4 度数为 3。根据充要条件 1，x_4 恰与一个和 x 或 y_1 距离为 2 的点相连。又因为所有与 x 距离为 2 的点都不能与 x_4 相连，所以 x_4 只能与一个和 y_1 距离为 2 的点 x_6 相连。显然 x_6 必须与 y_1 除 x_1 外剩余三邻居——y_7，y_9，y——中的一个相连。容易验证所有与 y_9 或 y 相连的顶点都不能与 y_4 相连，所以 x_6 只能与 y_7 相连。结合这点考虑可验证 x_6 是一个新顶点。显然，x_4x_6 与 x_1x_4 构成四圈，且该四圈的第四个顶点为 x_3 或 x_2。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i.i：该四圈的第四个顶点为 x_3。

现在考虑边 x_2y_2。因为 $N(y_2)/(\{x_2\}\cup S)$ 中的两点为 y_2，x_5，所以 x_2z_1 必须与 x_2y_2 构成四圈，且构成的四圈除 x_2，z_1，y_2 外另一顶点为 x_3 或 x_4。假如该四圈包含 x_4，会导致对 x_1x_4 而言 T 中两点均与 $N(x_1)/(S\cup\{x_4\})$ 中的某点距离为 2，所以该四圈除 x_2，z_1，y_2 外另一顶点为 x_3。

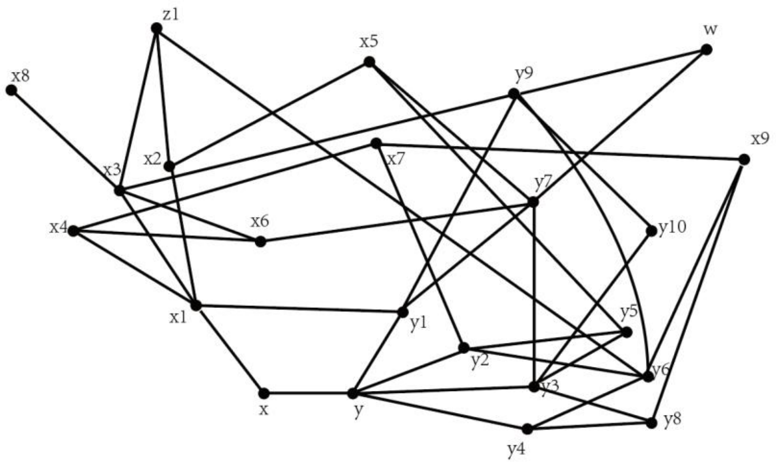
现在考虑边 x_1x_4。假设 x_1x_4 和 x_1x_2 构成的四圈除 x_1，x_4，x_2 外另一顶点为 x_7。容易验证 x_7 是一个新顶点。

现在考虑边 x_1x_3。因为 xyy_1x_1 是经过 xx_1 的唯一四圈，所以 $x_1x_4x_6x_3$，$x_1x_3z_1x_2$，$x_1x_3y_9y_1$ 是仅有的三个经过 x_1x_3 的四圈。又因为 x_1 度数为 5，所以 x_3 度数为 5 或 6。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不可以与 x_3 相连，所以根据充要条件 6，x_3 度数不能为 6，x_3 度数为 5。假设 x_3 除 x_1，x_6，y_9，z_1 外另一邻居为 x_8。容易验证 x_8 是一个新顶点。

现在考虑同时经过 y_2x_2，y_2y_5 的四圈。设该四圈除 y_2，x_2，y_5 外另一顶点为 z_2。显然 z_2 只能为 x_2 除其在四圈 $y_2x_2z_1y_6$ 中两邻居以及 $N(x_2)/(S\cup\{y_2\})$ 中的点 x_1 外剩余两邻居——x_7，x_5——中的一个。容易验证 z_2 只能为 x_5。此时，因为可以验证 y 的所有邻居都不能与 x_1 相连，所以根据充要条件 6，y_5，y_6 必须都与 x_7 距离为 2。假设 y_6 与 x_7 的一个公共邻居为 x_9，容易验证 x_9 是一个新顶点。

现在考虑边 y_4y_6。假设 y_4y_6 与 y_4y_8 构成的四圈除 y_4，y_6，y_8 外另一顶点为 t。显然 t 只能为 y_6 除其在四圈 $y_4y_6y_2y$ 中两邻居外剩余三邻居——x_9，z_1，y_9——中的一个。容易验证 t 只能为 x_9。

现在考虑边 y_9y_6。因为 y_9，y_6 度数均为 5，所以根据已有的充要条件 y_9x_6 的 k 值为 2 或 3。因为 y_4y_6 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 y_4y_6，所以 $y_4\in N(y_6)/(S\cup\{y_9\})$。因为 y_1y_9 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 y_1y_9，所以 $y_1\in N(y_9)/(T\cup\{y_1\})$。又因为如图所示 y_4 与 y_1 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_9y_6 的 k 值不能为 3，y_9y_6 的 k 值为 2。y_2y_6 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 y_2y_6，所以 $y_2\in N(y_6)/(S\cup\{y_9\})$。然而，可以验证 y_2 的所有邻居都不能与除 y_1 之外的 $N(y_9)/(T\cup\{y_1\})$ 中的点相连，所以根据充要条件 8，y_9y_6 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i.ii：该四圈的第四个顶点为 x_2。

用和情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i.i 一样的推理模式可知情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i.ii 也不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.ii：y_{11} 为新顶点。

首先，用类似情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.i 里的推理可知有两个四圈经过 y_1x_4，其中 x_4 的两邻居分别为 y_1，x_2 和 y_1，x_3，且 x_4 度数为 3。

现在考虑边 y_1y_9。因为 y_1 度数为 4，y_9 度数为 5，$y_1y_9wy_7$，$y_1y_9x_3x_1$ 是仅有的两个经过 y_1y_9 的四圈，又因为可以验证 y_1 的所有邻居都不与 y_{11} 相连，所以根据充要条件 6，y_{11} 必须与 x_1，y_7 距离均为 2。那么，y_{11} 必须与 x_1 除其在四圈 $y_1y_9x_3x_1$ 中两邻居外剩余三邻居——x，x_2，x_4——中的一个相连。容易验证 y_{11} 只能与 x_2 或 x_4 相连。即使 y_{11} 与 x_4 相连，因为 y_1x_4 的 k 值为 2 且 x_4 度数为 3，所以 y_{11} 必须与 y_1x_4 构成四圈，且该四圈第四个顶点为 x_2 或 x_3。若该四圈第四个顶点为 x_3 会产生三圈 $x_3y_9y_{11}$，因此该四圈第四个顶点为 x_2。综上，任何情况下 y_{11} 都与 x_2 相连。

y_{11} 也与 y_7 距离为 2，所以 y_{11} 与 y_7 有公共邻居 y_{12}。容易验证 y_{12} 是一个新顶点。

现在考虑边 y_1y_7。因为 x_1y_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1y_1，所以 $y_1y_7y_3y$，$y_1y_7wy_9$ 是仅有的两个经过 y_1y_7 的四圈。又因为 y_1 度数为 4，y_7 已有四个邻居。所以根据已有的充要条件，y_7 的度数为 4 或 5。

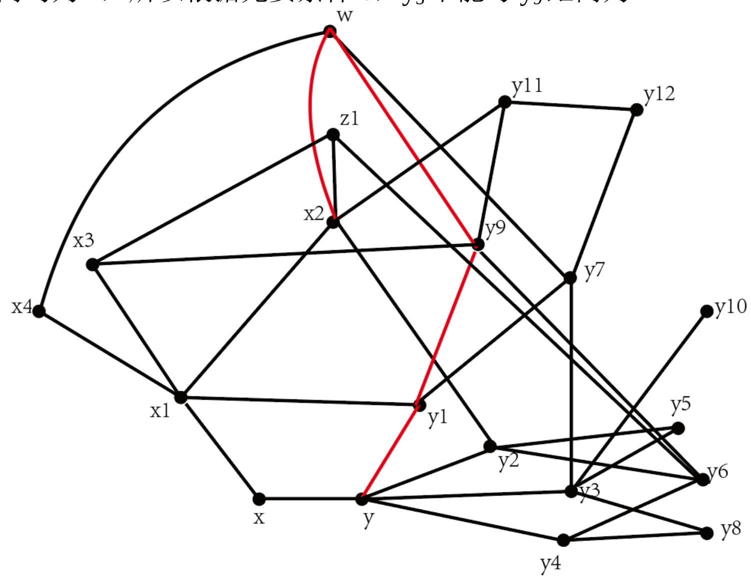
情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.ii.i：y_7 的度数为 4。

现在考虑边 x_1x_2。前面已证明 x_2 度数为 5。因为 x_1，x_2 度数均为 5，所以根据已有的充要条件，x_1x_2 的 k 值为 2 或 3。又因为 xyy_1x_1 是经过 x_1y_1 的唯一四圈，x_1y_1 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1y_1，所以在一个经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_2，x_3 或 x_2，x_4。因此，必定有两个四圈经过 x_1x_2，且两四圈中 x_1 的两邻居分别为 x_2，x_3 和 x_2，x_4。根据充要条件 8，y_1 必须与 $N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$中的某点 x_5 距离为 2。又因为可以验证所有与 y_1 距离为 2 的点只有 y_{11} 可以属于 $N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$，所以 y_{11} 属于 $N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$。另外，可以验证所有与 x 相连或与 y_1 相连的顶点都不是 z_1 的邻居，所以根据充要条件 8，x_2z_1 必须与 x_1x_2 构成 4 圈，且该四圈第四个顶点为 x_3 或 x_4。假如第四个顶点为 x_4，考虑边 x_1x_4。因为可以验证所有与 x 相连或与 y_1 相连的顶点都不是 z_1 的邻居，所以根据充要条件 1，x_1x_4 与 x_1x_3 构成的四圈的第四个顶点 p 必定与 x 或 y_1 距离为 2。然而可以验证 p 为任意与 x 或 y_1 距离为 2 的点都会产生三圈或导致 x_1 与 y_{12} 距离为 2，从而根据充要条件 5，y_1y_7 的曲率不能为 0。综上，x_2z_1 与 x_1x_2 构成的 4 圈的第四个顶点为 x_3。

因为 x_1x_2 不与 x_2y_2 构成四圈，y_{11} 属于 $N(x_2)/(\{x_1\}\cup S)$，所以 x_2 除 x_1，y_{11}，y_2，z_1 外剩余一邻居为 x_1x_4 与 x_1x_2 构成的四圈的第四个顶点 q。现在考虑边 x_1x_4。因为前面已验证 x_1x_4 与 x_1x_3 构成的四圈的第四个顶点 p 不能与 x 或 y_1 距离为 2。所以根据充要条件 5，q 必须与 x 或 y_1 距离为 2。容易验证所有与 x 或 y_1 距离为 2 的顶点中，q 只能为 w。

现在考虑边 y_2y_6。因为 y_2 度数为 4，y_6 度数为 5，所以 $y_2y_6y_4y$，$y_2y_6z_1x_2$ 是仅有的两个 y_2y_6 的四圈。假设 $N(y_6)/(\{y_2\}\cup S)$除 y_9 外另一点为 r。因为可以验证所有与 y 距离为 2 的点中，只有 y_9 可

以与 y_6 相连，所以 r 与 y 距离不能为 2。因此，根据充要条件 6，y_5 必须与 r 距离为 2。又因为如图所示 y，x_2 与 y_9 距离均为 2，所以根据充要条件 6，y_5 不能与 y_9 距离为 2。



现在考虑 y_2y_5 与 x_2y_2 构成的四圈。假设该四圈除 y_2，y_5，x_2 外另一顶点为 r。显然 r 必须为 x_2 除其在四圈 $y_2y_6z_1x_2$ 中两邻居外剩余 3 邻居——x_1，w，y_{11}——中的一个。容易验证 r 只能为 w 或 y_{11}，然而两种情况下都有 y_5 与 y_9 距离为 2。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.ii.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.ii.ii：y_7 的度数为 5。

假设 y_7 除 y_1，y_3，w，y_{12} 外另一邻居为 w_1，容易验证要么 $w_1=z_1$，要么 w_1 为新顶点。

假如 $w_1=z_1$，考虑边 x_2y_2。假设 y_5y_2 和 x_2y_2 构成的四圈的第四个顶点为 z_2，结合前面已证明的 y_5 不能与 y_9 距离为 2 考虑，可知 z_2 是一个新顶点。现在考虑边 y_1y_7。y_1 度数为 4，y_7 度数为 5，$y_1y_7y_3y_1$ 是仅有的两个经过 y_1y_7 的四圈，又因为可以验证 y 的所有邻居都不能与 w_1 相连，所以根据充要条件 6，w_1 必须与 x_1 距离为 2。则 w_1 必须与 x_1 除 y_1 外剩余四邻居——x，x_2，x_3，x_4——中的一个相连。容易验证 w_1 只能与 x_3 或 x_4 相连。即使 w_1 与 x_4 相连，因为 y_1x_4 的 k 值为 2 且 x_4 度数为 3，所以 w_1 必须与 y_1x_4 构成四圈，且该四圈第四个顶点为 x_2 或 x_3。若该四圈第四个顶点为 x_2 会导致 x_2 度数超过 5，因此该四圈第四个顶点为 x_3。综上，任何情况下 w_1 都与 x_3 相连。

现在考虑边 x_1y_1。x_1 度数为 5，y_1 度数为 4，xyy_1x_1，$x_1y_1y_9x_3$ 是仅有的两个经过 x_1y_1 的四圈，又因为可以验证 y 的所有邻居都不与 x_4 相连，所以根据充要条件 6，y_7 与 x_4 距离为 2；同时，如图所示 y_7、y 与 x_2 距离均为 2，所以根据充要条件 6，x_3 不能与 x_2 或 x_4 距离为 2。

现在边 x_1x_2。因为可以验证 z_2 与所有和 x 或 y_1 相连的顶点都不能相邻，所以根据充要条件 8，x_2z_2 与 x_1x_2 构成四圈，且该四圈第四个顶点 p 为 x_3 或 x_4。假如 p 为 x_4，考虑边 x_1x_4。z_2 不能与 x 或 y_1 距离为 2，所以根据充要条件 1，x_1x_4 和 x_1x_3 构成的四圈的第四个顶点 q 必须与 x 或 y_1 距离为 2，然而可以验证所有与 x 或 y_1 距离为 2 的点都不能为 q。综上，p 只能为 x_3，然而这导致 x_3 与 x_2 距离为 2。

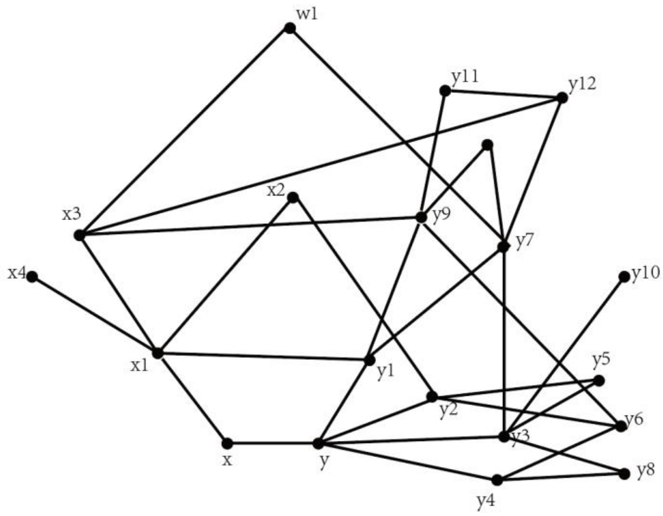
因此，w_1 不能为 z_1，w_1 为新顶点。现在考虑边 y_1y_7。y_1 度数为 4，y_7 度数为 5，$yy_3y_7y_1$，$y_1y_7wy_9$ 是仅有的两个经过 y_1y_7 的四圈，又因为可以验证 y 的所有邻居都不能与 w_1 或 y_{12} 相连，因此，根据充要条件 6，x_1 必须与 w_1，y_{12} 距离均为 2。那么，y_{12} 必须与 x_1 除 y_1 外剩余四邻居——x，x_2，x_3，x_4——中的一个相连，容易验证 y_{12} 只能与 x_3 或 x_4 相连。即使 y_{12} 与 x_4 相连，因为 y_1x_4 的 k 值为 2 且 x_4 度数为 3，所以 y_{12} 必须与 y_1x_4 构成四圈，且该四圈第四个顶点为 x_2 或 x_3。若该四圈第四个顶点为 x_3 会产生三圈 $x_2y_{12}y_{11}$，因此该四圈第四个顶点为 x_3。综上，任何情况下 y_{12} 都与 x_3 相连。

现在考虑边 x_1y_1。y_1 度数为 4，x_1 度数为 5，xyy_1x_1，$x_1y_1y_9x_3$ 是仅有的两个经过 x_1y_1 的四圈，又因为可以验证 y 的所有邻居都不与 x_4 相连，所以根据充要条件 6，x_4 必须与 y_7 距离为 2。又因为如图所示 y，y_9 与 x_2 距离均为 2，所以根据充要条件 6，y_7 不能与 x_4 距离为 2。

继续考虑边 y_1y_7，因为 x_1 必须与 w_1 距离均为 2，所以 w_1 必须与 x_1 除 y_1 外剩余四邻居——x，x_2，x_3，x_4——中的一个相连，容易验证 w_1 只能与 x_3，x_4，或 x_2 相连。w_1 与 x_2 相连会导致 y_7 与 x_2

距离为 2。所以 w_1 只能与 x_3 或 x_4。即使 w_1 与 x_4 相连，因为 y_1x_4 的 k 值为 2 且 x_4 度数为 3，所以 w_1 必须与 y_1x_4 构成四圈，且该四圈第四个顶点为 x_2 或 x_3。又因为 w_1 不能与 x_2 相连，因此该四圈第四个顶点为 x_3。综上，任何情况下 w_1 都与 x_3 相连。

现在考虑边 x_1x_3。因为 x_1x_4、x_1y_1、x_1x_2 均与 x_1x_3 构成四圈，且 xyy_1x_1 是经过 xx_1 的唯一四圈，所以 x_1x_3 的 k 值为 3。又因为 x_1 的度数为 5，所以根据已有的充要条件，x_3 的度数为 5 或 6。同时，可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能与 x_3 相连，所以根据充要条件 6，x_3 的度数不能为 6，x_3 度数为 5。然而，可以验证 y_{12}，w_1 都不能与 x_1 除其在四圈 $x_1y_1y_9x_3$ 中两邻居外剩余三邻居——x_2，x，x_4——中的一个相连，则 $N(x_3)/(S\cup\{x_1\})$ 中至少有两个点 y_{12}，w_1，与 x_1x_3 的 k 值为 3 而 x_3 度数为 5 矛盾。



综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.ii.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.i.ii：y_1 度数为 5。

假设 y_1 除 x_1，y，y_7，y_9 外另一邻居为 y_{10}。容易验证 y_{10} 是一个新顶点。

继续考虑边 yy_1。根据充要条件 8，y_{10} 必须与 y_4，y_2 中的一个距离为 2。假如 y_9 与 y_4 距离为 2，则 y_{10} 必须与 y_4 除 y 外剩余两邻居——y_8，y_6——中的一个相连。若 y_{10} 与 y_8 相连，则如图所示 y_8，y_6 与 y_1 距离均为 2，根据充要条件 1，yy_4 的曲率不能为 0，所以 y_{10} 只能与 y_6 相连。假如 y_{10} 与 y_2 距离为 2，则 y_{10} 必须与 y_2 除 y 外剩余三邻居——y_5，x_2——中的一个相连。若 y_{10} 与 y_5 相连，则如图所示 y_5，y_6 与 y_1 距离均为 2，而 x_2 与 y_1，x 距离均为 2，根据充要条件 6，yy_2 的曲率不能为 0，所以 y_{10} 只能与 y_6 或 x_2 相连。综上，y_{10} 只能与 y_6 或 x_2 相连。

情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.i：y_{10} 与 y_6 相连。

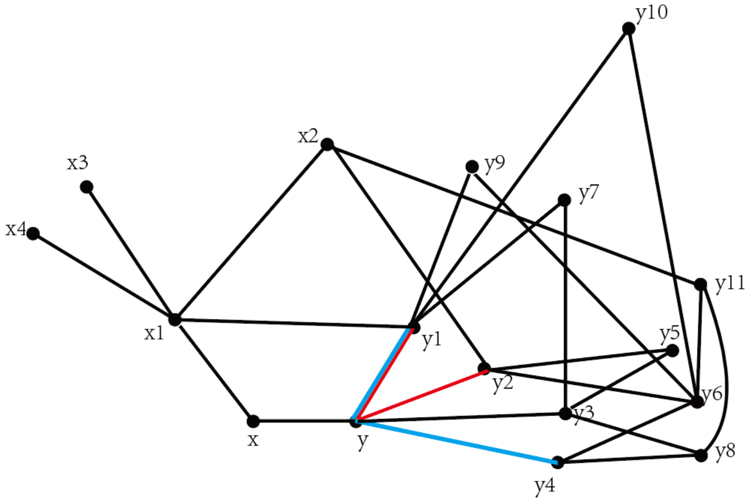
现在考虑边 x_2y_2。因为 y_2 度数为 4，综合考虑已有的充要条件和我们的假设，可知 x_2y_2 的 k 值大于 1。同时，假如有一个四圈同时经过 x_2y_2，yy_2，假设该四圈除 x_2，y_2，y 外另一顶点为 q。显然 q 只能为 y 除 y_2 外剩下四邻居——x，y_1，y_3，y_4——中的一个，然而 q 无论为四者中的哪一个都会导致 x_1 度数超过 5。因此，一个经过 x_2y_2 的四圈不能经过 yy_2。因此，一个经过 x_2y_2 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 x_2，y_5 或 x_2，y_6。又因为 x_2y_2 的 k 值至少为 2，所以必有两个四圈经过 x_2y_2，两四圈中 y_2 的两邻居分别为 x_2，y_5 或 x_2，y_6。

现在考虑边 y_4y_6。因为 y_4 度数为 3，所以综合考虑已有的充要条件和我们的假设，可知 y_4y_6 的 k 值大于 1。又因为 y_4 度数为 3，所以 y_4y_6 的 k 值为 2。再根据已有的充要条件，y_6 的度数为 5。显然除 $yy_4y_6y_2$ 外另一经过 y_4y_6 的四圈中，y_4 的两邻居为 y_6，y_8。假设该四圈除 y_4，y_6，y_8 外另一顶点为 y_{11}。容易验证 y_{11} 是一个新顶点。

现在考虑边 y_2y_6，因为 y_2 度数为 4，y_6 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_2y_6 的 k 值必须为 2。又因为已证明必有两个四圈经过 x_2y_2，两四圈中 y_2 的两邻居分别为 x_2，y_5 或 x_2，y_6，所以在除 $yy_4y_6y_2$ 外另一经过 y_2y_6 的四圈中，y_2 两邻居为 y_6，x_2。假设该四圈除 y_2，y_6，x_2 外另一顶点为 r。显然 r 必须为 y_6 除在四圈 $yy_4y_6y_2$ 中两邻居为剩下三邻居——y_{11}，y_{10}，y_9——中的一个。容易验证 r 只能为 y_{11}。

现在考虑边 y_6y_{10}，y_6y_9。因为已有两个四圈————经过 y_6y_{11}，所以假如 y_6y_{10}，y_6y_9 都与 y_6y_{11} 构成四圈，则有四个四圈经过 y_6y_{11}。又因为 y_6 度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_{11} 度数为 7。但因为可以验证所有与 y_4 或 y_2 距离为 2 的点都不能与 y_{11} 相连，所以根据充要条件 1，y_6y_{11} 的曲率不能为 0。因此，y_6y_{10}，y_6y_9 中至少有一个不与 y_6y_{11} 构成四圈。不失一般性假设为 y_6y_9。

因为 y_2y_6 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 y_2y_6，y_4y_6 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 y_2y_6，又因为 y_6y_9 不与 y_6y_{11} 构成四圈，所以 $y_6y_9y_1y_{10}$ 是经过 y_6y_9 的唯一四圈。又因为 y_6 度数为 5，所以 y_9 度数为 2。但是，如图所示 y_1 和 y_2，y_4 距离均为 2，所以根据充要条件 2，y_6y_9 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.ii：y_{10} 不与 y_6 相连。

此时 y_{10} 必须与 x_2 相连。

现在考虑边 y_2x_2。因为 y_2 度数为 4，所以综合我们的假设和已有的充要条件，y_2x_2 的 k 值大于 1。又因为 yy_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 yy_2，所以一个经过 y_2x_2 的四圈不能包含 yy_2。因此，一个经过 y_2x_2 的四圈中，y_2 的两邻居只能为 x_2，y_6 或 x_2，y_5。又因为 y_2x_2 的 k 值至少为 2，所以必定有两个四圈经过 y_2x_2，两四圈中 y_2 的两邻居分别为 x_2，y_6、x_2，y_5。假设同时经过 y_2x_2，y_2y_6 的四圈除 y_2，x_2，y_6 外另一顶点为 z_1，假设同时经过 y_2x_2，y_2y_5 的四圈除 y_2，x_2，y_5 外另一顶点为 z_2。容易验证要么 z_1 为新顶点，要么 $z_1=y_{10}$。假如 $z_1=y_{10}$，考虑边 yy_2。y_2 度数为 4，y 度数为 5，$yy_3y_5y_2$，$yy_4y_6y_2$ 是仅有的两个经过 yy_2 的四圈，而 x_2 与 x，y_1 距离均为 2，y_6，y_5 与 y_1 距离均为 2，所以根据充要条件 6，yy_2 的曲率不能为 0。因此，z_1 为新顶点。同理可证 z_2 为新顶点。此时 x_2 已有五个邻居，又因为 y_2x_2 的 k 值为 2，y_2 度数为 4，所以根据已有的充要条件 x_2 度数为 5。

现在考虑边 y_4y_6。因为 y_4 度数为 3，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_4y_6 的度数大于 1；又因为 y_4 度数为 3，所以 y_4y_6 的 k 值为 2，且根据已有的充要条件 y_6 的度数为 5。假设 y_6 除 y_4，y_2，z_1，y_9 外另一邻居为 y_{12}。容易验证 y_{12} 是一个新顶点。

现在考虑边 y_6y_9。假如有四圈同时经过 y_6y_9，y_9y_1，设该四圈除 y_6，y_9，y_1 外另一顶点为 p。显然 p 必须为 y_1 除 y_9 外剩余四邻居——y_7，y，x_1，y_{10}——中的一个。y，x_1 的度数均已达上限，前面也已证明 y_6 不能与 y_{10} 相连，所以 p 只能为 y_7。此时再考虑边 y_4y_6。假如有四圈同时经过 y_4y_6，y_6y_7，那么假设该四圈除 y_4，y_6，y_7 外另一顶点为 q，显然 q 只能为 y_4 除其在四圈 $yy_4y_6y_2$ 中两邻居外的唯一邻居 y_8，然而这样会产生三圈 $y_8y_7y_1$。因此，一个经过 y_4y_6 的四圈不能经过 y_6y_7，那么，又因为如图所示 y，y_8 与 y_7 距离均为 2，所以根据充要条件 1，y_4y_6 的曲率不能为 0。因此，p 不能为 y_7。综上，一个经过 y_6y_9 的四圈不能包含 y_9y_1，$N(y_9)$ /$(T\cup y_6)\neq\emptyset$，又因为 y_6 度数为 5，故综合已有的充要条件和我们的假设，y_9 的 k 值大于 1。因为 y_2 度数为 4，y_6 度数为 5，所以 y_2y_6 的 k 值为 2，又因为已有两个四圈————经过 y_2y_6，所以一个经过 y_6y_9 的四圈不能经过 y_6y_2。一个经过 y_6y_9 的四圈也不能经过 y_6y_4，否则那么假设该四圈除 y_4，y_6，y_7 外另一顶点只能为 y_4 除其在四圈 $yy_4y_6y_2$ 中两邻居外的唯一邻居 y_8。此时考虑边 y_4y，因为 y 度数为 5，y_4 度数为 3，$yy_4y_6y_2$，$yy_4y_8y_3$ 是仅有的两个经过 y_4y 的四圈，又因为如图所示 y_8，y_6 与 y_1 距离均为 2，所以根据已有的充要条件 y_4y 的曲率不能为 0。综上，一个经过 y_6y_9 的四圈中，y_6 的两邻居只能为 y_9，z_1 或 y_9，y_{12}，

又因为 y_6y_9 的 k 值至少为 2，必有这样一个四圈经过 y_6y_9，其中 y_6 的两邻居为 y_9，z_1。假设该四圈除 y_6，y_9，z_1 外另一顶点为 z_3，容易验证 z_3 是一个新顶点。

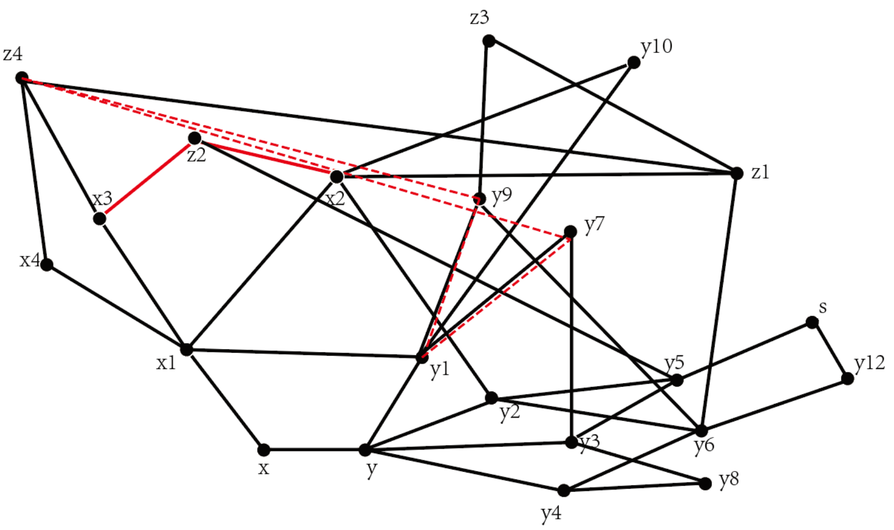
现在考虑边 x_1x_2。因为 x_1，x_2 度数均为 5，所以根据已有的充要条件 x_1x_2 的 k 值为 2 或 3。又因为 xyy_1x_1 是经过 xx_1 的唯一四圈，所以一个经过 x_1x_2 的四圈不能经过 xx_1，$x\in N(x_1)/(T\cup x_2)$。因为 y_2x_2 的 k 值为 0 且已有两个四圈————经过 y_2x_2，所以一个经过 x_1x_2 的四圈不能经过 y_2x_2，$y_2\in N(x_2)/(S\cup x_1)$。又因为如图所示 x 与 y_2 距离为 2，所以根据充要条件 8，x_1x_2 的 k 值不能为 3。x_1x_2 的 k 值为 2。已证明 $x\in N(x_1)/(T\cup x_2)$，所以除 $x_1x_2y_{10}y_1$ 外另一经过 x_1x_2 的四圈中，x_1 的两邻居为 x_2，x_3 或 x_2，x_4。不失一般性假设 x_1 的两邻居为 x_2，x_3。设该四圈除 x_1，x_2，x_3 外另一顶点为 r。显然 r 只能为 x_2 除其在四圈 $x_1x_2y_{10}y_1$ 中两邻居以及 $N(x_2)/(S\cup x_1)$ 中的点 y_2 外剩余两邻居——z_1，z_2——中的一个。

情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.ii.i：$r= z_2$。

现在考虑边 y_2y_6。因为 y_2 度数为 4，y_6 度数为 5，所以 $y_2y_6z_1x_2$，$yy_4y_6y_2$ 是仅有的两个经过 y_2y_6 的四圈。又因为可以验证 y 的所有邻居都不能与 y_{12} 相连，所以根据充要条件 6，y_{12} 与 y_5 距离为 2。则 y_{12} 与 y_5 有公共邻居。假设 y_{12} 与 y_5 的一个公共邻居为 s。容易验证要么 $s=z_2$，要么 s 为新顶点。假设 $s=z_2$，则如图所示 y，x_2 与 y_9 距离均为 2，且 y_5 与 y_9，y_{12} 距离均为 2，所以根据充要条件 6，y_2y_6 的曲率不能为 0。因此，s 为新顶点。

现在考虑边 x_1x_2。根据充要条件 8，x_4 必须与 z_1，y_2 中的一个距离为 2，又因为可以验证所以 y_2 的邻居都不能与 x_4 相连，所以 x_4 与 z_1 距离为 2。则 x_4 与 z_1 有一公共邻居。设 x_4 与 z_1 的一公共邻居为 z_4，容易验证 z_4 是一个新顶点。再考虑边 x_1x_4。因为 xyy_1x_1 是经过 xx_1 的唯一四圈，又因为 x_1x_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1x_2，所以一个经过 x_1x_4 的四圈不能包含 xx_1 或 xx_1。假如有一个四圈同时包含 x_1x_4 和 x_1y_1，设该四圈除 x_1，x_4，y_1 外另一顶点为 t。显然 t 只能为 y_1 除 x_1 外剩余四邻居——y，y_7，y_9，y_{10}——中的一个。容易验证无论 t 为四者中的哪一个都会产生矛盾。所以在一个经过 x_1x_4 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_4，x_3，x_1x_4 的 k 值为 1。经过 x_1x_4 的唯一四圈除 x_1，x_4，x_3 外另一顶点显然为 x_4 除 x_1 外唯一一邻居 z_4。

现在考虑边 x_1y_1。假如有一个四圈同时包含 x_1x_3 和 x_1y_1，设该四圈除 x_1，x_3，y_1 外另一顶点为 u。显然 u 只能为 y_1 除 x_1 外剩余四邻居——y，y_7，y_9，y_{10}——中的一个。容易验证无论 u 为四者中的哪一个都会产生矛盾。因此，一个经过 x_1y_1 的四圈不能经过 x_1x_3。又因为 $x_1x_3x_4x_2$ 是经过 x_1x_4 的唯一四圈，所以 xyy_1x_1，$x_1y_1y_{10}x_2$ 是仅有的两个经过 x_1，y_1 的四圈。又因为 x_1，y_1 度数均为 5，所以根据充要条件 8，x_4 必须与 y_7，y_9 中的一个距离为 2，即 y_7，y_9 至少有一个与 x_4 除 x_1 外的唯一邻居 z_4 相连。然而如图所示无论 z_4 与 y_7 还是 y_9 相连，都会导致 z_4 与 x_2，y_1 距离均为 2，根据充要条件 2，x_1x_4 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.ii.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.ii.ii：$r= z_1$。

类似的开证明 y_{12} 与 y_5 有一公共邻居 s 且 s 为新顶点。

现在考虑边 x_1x_2。根据充要条件 8，x_4 必须与 z_2，y_2 中的一个距离为 2，又因为可以验证所以 y_2 的邻居都不能与 x_4 相连，所以 x_4 与 z_2 距离为 2。则 x_4 与 z_2 有一公共邻居。设 x_4 与 z_2 的一公共

邻居为 z_4，容易验证 z_4 是一个新顶点。再考虑边 x_1x_4。因为 xyy_1x_1 是经过 xx_1 的唯一四圈，又因为 x_1x_2 的 k 值为 2 且已有两个四圈————经过 x_1x_2，所以一个经过 x_1x_4 的四圈不能包含 xx_1 或 xx_1。假如有一个四圈同时包含 x_1x_4 和 x_1y_1，设该四圈除 x_1，x_4，y_1 外另一顶点为 t。显然 t 只能为 y_1 除 x_1 外剩余四邻居——y，y_7，y_9，y_{10}——中的一个。容易验证无论 t 为四者中的哪一个都会产生矛盾。所以在一个经过 x_1x_4 的四圈中，x_1 的两邻居只能为 x_4，x_3，x_1x_4 的 k 值为 1。经过 x_1x_4 的唯一四圈除 x_1，x_4，x_3 外另一顶点显然为 x_4 除 x_1 外唯一一邻居 z_4。

现在考虑边 x_1y_1。假如有一个四圈同时包含 x_1x_3 和 x_1y_1，设该四圈除 x_1，x_3，y_1 外另一顶点为 u。显然 u 只能为 y_1 除 x_1 外剩余四邻居——y，y_7，y_9，y_{10}——中的一个。容易验证无论 u 为四者中的哪一个都会产生矛盾。因此，一个经过 x_1y_1 的四圈不能经过 x_1x_3。又因为 $x_1x_3x_4x_2$ 是经过 x_1x_4 的唯一四圈，所以 xyy_1x_1，$xyy_{10}x_2$。根据充要条件 8，x_4 必须与 y_7，y_9 中的一个距离为 2，即 y_7，y_9 至少有一个与 x_4 除 x_1 外的唯一邻居 z_4 相连。然而如图所示无论 z_4 与 y_7 还是 y_9 相连，都会导致 z_4 与 x_2，y_1 距离均为 2，根据充要条件 2，x_1x_4 的曲率不能为 0。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.ii.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.ii.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii.i 不成立。

情况五.1.I.i.i.ii.ii：y_6 不是 y_9 与 y_4 的公共邻居。

用与情况五.1.I.i.i.ii.i 类似的推理模式可知情况五.1.I.i.i.ii.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i.i 不成立。

情况五.1.I.i.ii：yy_1 的 k 值为 3。

假设 yy_1 与 yy_3 构成的四圈的第四个顶点为 y_7，容易验证 y_7 是一个新顶点。假设 yy_1 与 yy_4 构成的四圈的第四个顶点为 y_8，容易验证 y_8 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_3。因为 yy_3 的 k 值为 2，又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_3 的度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3 相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_3 的度数不能大于 3，y_3 的度数为 3。同理 y_4 度数为 3。继续考虑边 yy_3。根据充要条件 1，y_7、y_5 中恰有一点与 x，y_4 中的某点距离为 2，不失一般性假设为 y_7。又因为所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3 相连，所以 y_7 只能与 y_4 距离为 2。则 y_7 必须与 y_4 除 y 外剩余两邻居——y_5，y_6——中的一个相连，容易验证 y_7 只能与 y_6 相连。

现在考虑边 y_4y_6。因为 y_4 度数为 3，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_4y_6 的 k 值大于 1。又因为 y_4 度数仅为 3，所以 y_4y_6 的 k 值为 2；根据已有的充要条件，y_6 度数为 5。$y_7∈N(y_6)/(S∪\{y_4\})$，否则 y_6y_7 与 y_4y_6 构成四圈，且该四圈第四个顶点只能为 y_4 除其在四圈 $yy_4y_6y_2$ 中两邻居外的唯一邻居 y_8，这时产生三圈 $y_1y_8y_7$。然而，如图所示 y，y_8 与 y_7 距离均为 2，根据充要条件 5，yy_4 的曲率不能为 0。

综上，情况五.1.I.i.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.i 不成立。

情况五.1.I.ii：yy_2 分别与 yy_1 和 yy_3，yy_4 中的一个（不失一般性假设为 yy_3）构成四圈。

假设 yy_2 与 yy_1 构成的四圈的第四个顶点为 y_5，容易验证 y_5 是一个新顶点。假设 yy_2 与 yy_3 构成的四圈的第四个顶点为 y_6，容易验证 y_6 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_4。因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，且 yy_2 不与 yy_4 构成四圈，所以在一个经过 yy_4 的四圈中，y_4 的两邻居只能为 y_1，y 或 y_3，y。yy_4 的 k 值最多为 2。

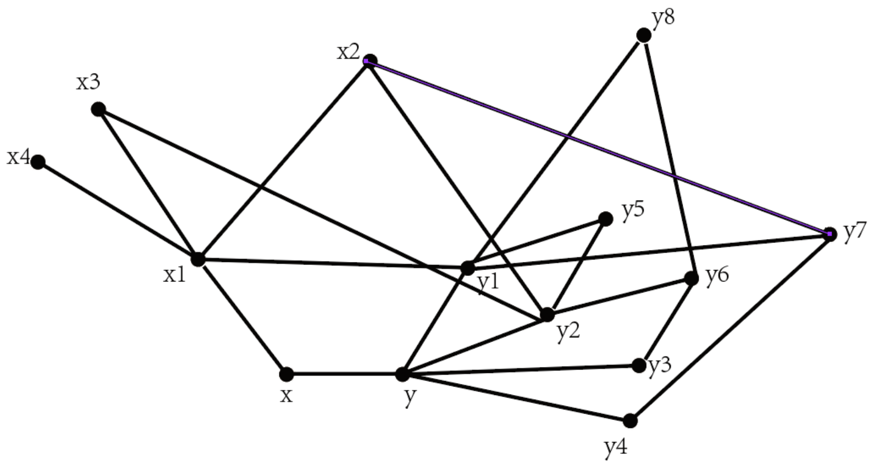
情况五.1.I.ii.i：yy_4 的 k 值为 1。

情况五.1.I.ii.i.i：在经过 yy_4 的唯一四圈中，y_4 的两邻居为 y_1，y。

假设经过 yy_4 的唯一四圈除 y_4，y_1，y 外另一顶点为 y_7，容易验证 y_7 是一个新顶点。现在考虑边 yy_3。首先，yy_3 不能与 yy_1 构成四圈，否则有四个四圈经过 yy_1，而 y 的度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_1 度数为 7；但是 x，y_4 度数均为 2，所以二者都不能与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的点距离为 2，那么根据充要条件 1，yy_1 的曲率不能为 0。又因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，$yy_4y_7y_1$ 是经过 yy_4 的唯一四圈，所以 $yy_3y_6y_2$ 是经过 yy_3 的唯一四圈。同时 y 度数为 5，所以 y_3 度数为 2。那么，根据充要条件 1，y_6 必须恰与 x，y_4，y_1 中的一个距离为 2。假如 y_6 与 x 距离为 2，则 y_6 要与 x 除 y

外的唯一邻居 x_1 相连，导致 x_1 度数超过 6；假如 y_6 与 y_4 距离为 2，则 y_6 要与 y_4 除 y 外的唯一邻居 y_7 相连，然而此时 y_6 与 y_1，y_4 距离均为 2。因此，y_6 只能与 y_1 距离为 2，则 y_6 与 y_1 有公共邻居。假设 y_6 与 y_1 的一个公共邻居为 y_8，容易验证 y_8 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 $yy_3y_6y_2$ 是经过 yy_3 的唯一四圈，所以 xyy_1x_1，$yy_1y_5y_2$，$yy_4y_7y_1$ 是仅有的三个经过 yy_3 的四圈。又因为 y 度数为 5，y_3 已有三个邻居，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 5 或 6。同时，由于如图所示 y_3 与 y_8 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_3 的度数不能为 5，y_3 度数为 6。然而，x，y_4 度数均为 2，所以二者都不能与 $N(y_1)/(S\cup\{y\})$ 中的点距离为 2，那么根据充要条件 6，yy_1 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.I.ii.i.i 不成立。

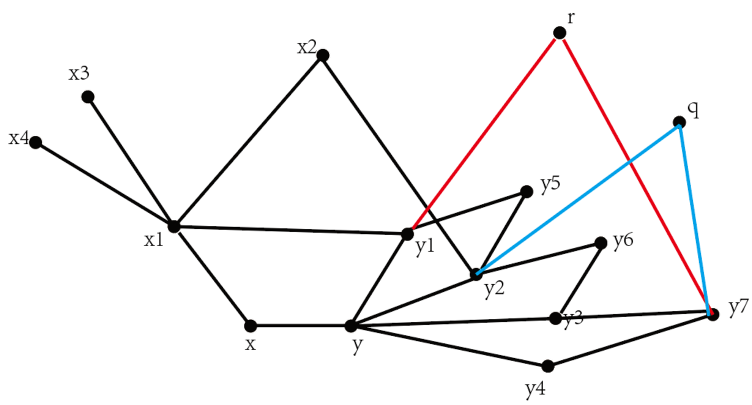
情况五.1.I.ii.i.ii：在经过 yy_4 的唯一四圈中，y_4 的两邻居为 y_3，y。

假设经过 yy_4 的唯一四圈除 y_4，y_3，y 外另一顶点为 y_7，容易验证 y_7 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 yy_1 的 k 值为 2，y 度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_1 的度数为 3，4 或 5。假如 y_1 度数为 3，考虑边 x_1y_1。首先，x_1x_2 不与 x_1y_1 构成四圈，否则假设该四圈第四个顶点为 p，显然 p 只能为 y_1 除其在四圈 xyy_1x_1 中两邻居外的唯一邻居 y_5，然而这会导致产生三圈 $x_2y_2y_5$。又因为如图所示 y、y_5 与 x_2 距离均为 2，所以根据充要条件 1，x_1y_1 的曲率不能为 0。因此，y_1 的度数为 4 或 5。

现在考虑边 yy_2。因为 yy_2 的 k 值为 2，y 度数为 5，y_2 已有四个邻居，所以根据已有的充要条件，y_2 的 k 值为 4 或 5。综合考虑充要条件 6 和 8，可知 y_4 必须与 y_2 的某邻居距离为 2，即 y_4 除 y 外的唯一邻居 y_7 必须与 y_2 的某邻居 q 相连。那么，如图所示，y_7 与 y_2 距离为 2。

继续考虑边 yy_1。因为 yy_1 的 k 值为 2，y 度数为 5，y_1 度数为 4 或 5，所以综合考虑充要条件 6 和 8，可知 y_4 必须与 y_1 的某邻居距离为 2，即 y_4 除 y 外的唯一邻居 y_7 必须与 y_1 的某邻居 r 相连。那么，如图所示，y_7 与 y_1 距离为 2。此时 y_7 与 y_1，y_2 距离均为 2，所以根据充要条件 2，yy_4 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.I.ii.i.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.ii.i 不成立。

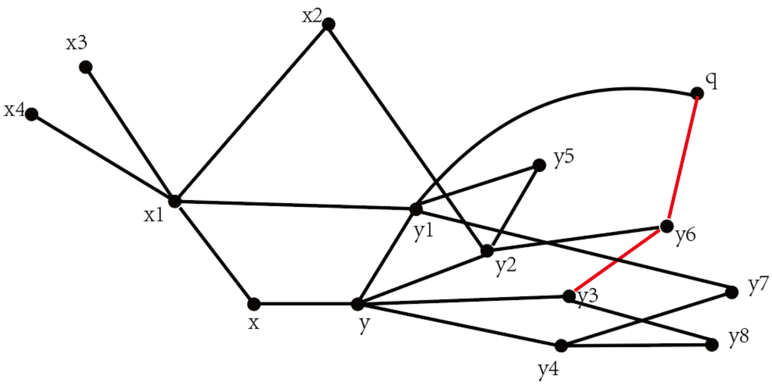
情况五.1.I.ii.ii：yy_4的 k 值为 2。

假设 yy_4与 yy_1构成的四圈的第四个顶点为 y_7，yy_4与 yy_3构成的四圈的第四个顶点为 y_8，容易验证 y_7，y_8均为新顶点。

现在考虑边 yy_4。因为 yy_4的 k 值为 2，y 度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_4的度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_4相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_4的度数不能大于 3，y_4度数为 3。

现在考虑边 yy_3。首先 yy_3不能与 yy_1构成 4 圈。否则，有 4 个四圈经过 yy_1，这时因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_1度数为 7。因为 x 度数为 2，所以显然 x 不能与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的点距离为 2。那么，根据充要条件 3，y_4必须与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的某点 p 距离为 2。则 y_4除其在四圈 $yy_4y_7y_1$中两邻居外的唯一邻居 y_8与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的某点 p 相连。然而，此时考虑边 y_4y_8。因为 y_4度数为 3，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_4y_8的 k 值为 2。又因为 y_4度数为 3，所以根据已有的充要条件，y_8度数为 5。y_8p 不与 y_4y_8构成四圈，否则该四圈的第四个顶点必定为 y_4除其在四圈 $yy_4y_8y_3$中两邻居外的唯一邻居 y_7，这会导致有三圈 y_1y_7p；然而，如图所示 y_7，y 与 p 距离均为 2，所以根据充要条件 1，y_4y_8的曲率不能为 0。

综上，yy_3不能与 yy_1构成 4 圈。又因为 xyy_1x_1是经过 xy 的唯一四圈，所以 $yy_3y_6y_2$，$yy_3y_8y_4$是仅有的两个经过 yy_3的四圈。又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_3的度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_3的度数不能大于 3，y_3度数为 3。根据充要条件 1，y_6，y_8中恰有一点与 x，y_1中的某点距离为 2。假设 y_6与 x，y_1中的某点距离为 2。因为所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3相连，所以 y_6只能与 y_1距离为 2。则 y_6与 y_1有公共邻居 q。容易验证要么 $q=y_7$要么 q 为新顶点。假如 $q=y_7$，考虑边 y_3y_6。因为 y_3度数为 3，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_3y_6的 k 值为 2。又因为 y_3度数为 3，所以根据已有的充要条件，y_6度数为 5。y_3q 不与 y_4y_8构成四圈，否则该四圈的第四个顶点必定为 y_3除其在四圈 $yy_3y_6y_2$中两邻居外的唯一邻居 y_8，这会导致有三圈 $y_4y_7y_8$；然而，如图所示 y_8，y 与 p 距离均为 2，所以根据充要条件 1，y_3y_6的曲率不能为 0。因此，q 为新顶点。又因为 yy_3不与 yy_1构成四圈，所以 xyy_1x_1，$yy_4y_7y_1$，$yy_2y_5y_1$是仅有的三个经过 yy_1的四圈，$q∈N(y_1)/(S∪\{y\})$。如图所示 y_3与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的点 q 距离为 2。同理可证如果是 y_8与 x，y_1中的某点距离为 2，y_3也会与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的一点 q 距离为 2。



现在考虑边 yy_1。因为 yy_1的 k 值为 3，y 的度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_1的度数为 5 或 6。又因为 x_3总会与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的一点 q 距离为 2，所以根据充要条件 5，x_3度数不能为 5，x_3度数为 6。然而，因为 x 度数为 2，所以显然 x 不能与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的点距离为 2，同时前面也已证明 y_4不能与 $N(y_1)/(S∪\{y\})$中的点距离为 2，所以根据充要条件 6，yy_1的曲率不能为 0。

综上，情况五.1.I.ii.ii 不成立。

综上，情况五.1.I.ii。

综上，情况五.1.I 不成立。

情况五.1.II：yy_2的 k 值为 3。

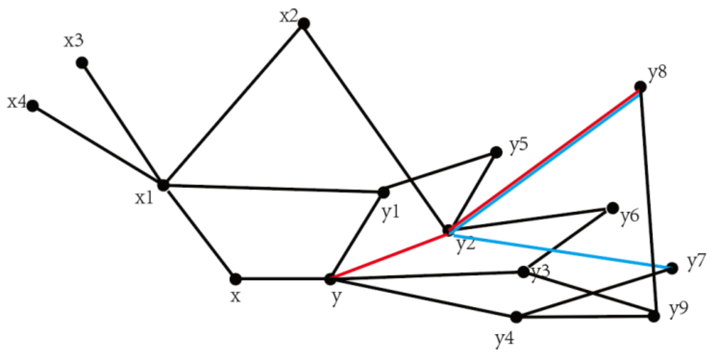
假设 yy_2与 yy_1构成的四圈的第四个顶点为 y_5，yy_2与 yy_3构成的四圈的第四个顶点为 y_6，yy_2与 yy_4构成的四圈的第四个顶点为 y_7，容易验证 y_5，y_6，y_7均为新顶点。

现在考虑边 yy_2。因为 yy_2的 k 值为 3，y 度数为 5，y_2已有 5 个邻居，所以根据已有的充要条件，y_2的度数为 5 或 6。又因为如图所示 x 与 x_2距离为 2，所以根据充要条件 5，y_2的度数不能为 5，y_2度数为 6。假设 y_2除 y，x_2，y_5，y_6，y_7外另一邻居为 y_8，容易验证 y_8是新顶点。因为可以验

证 x 的所有邻居都不能与 y_8 相连，所以根据充要条件 6，y_1，y_3，y_4 必须都与 y_8 距离为 2。则 y_8 与 y_3 有公共邻居 y_9，容易验证 y_9 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_3。因为 y 度数为 4，y_3 已有三个邻居，所以根据已有的充要条件，yy_3 的 k 值至少为 2。又因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，所以恰有两个四圈经过 yy_3，其中 y 的两邻居分别为 y_3，y_2 和 y_3，y_4。又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能与 y_3 相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_3 的度数不能大于 3，y_2 度数为 3。那么，这意味着 y_3y_9 必须与 yy_3 构成四圈，且该四圈第四个顶点为 y_2 或 y_4。容易验证该四圈第四个顶点只能为 y_4。

现在考虑边 yy_4。类似的可以证明 y_4 度数为 3。考虑边 y_4y_9。因为 y_4 度数为 3，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_4y_9 的 k 值为 2。又因为 y_4 度数为 3，y_9 度数为 5。y_9y_8 不与 y_4y_9 构成四圈，否则该四圈的第四个顶点必定为 y_4 除其在四圈 $yy_4y_9y_3$ 中两邻居外的唯一邻居 y_7，这会导致有三圈 $y_2y_8y_7$；然而，如图所示 y_7，y 与 y_8 距离均为 2，所以根据充要条件 1，y_4y_9 的曲率不能为 0。



综上，情况五.1.II 不成立。

综上，情况五.1 不成立。

情况五.2：x_1 的度数为 6。

假设 x_1 除 x，y_1 外其余四邻居为 x_2，x_3，x_4，x_5。根据充要条件 2，x_1 恰与 y_2，y_3，y_4 中的一个距离为 2，也就是 y_2，y_3，y_4 中恰有一个与 x_2，x_3，x_4，x_5 中的某个相连。不失一般性假设 x_2 与 y_2 相连。现在考虑边 xx_1。根据充要条件 4，y 必须与 x_2，x_3，x_4，x_5 中的至少两个距离为 2。x_2 已经与 y 距离为 2，则 x_3，x_4，x_5 中还有一个与 y 距离为 2。不失一般性假设 x_3 与 y 距离为 2，则 x_3 与 y 除在四圈 xx_1y_1y 中的两邻居外剩下两邻居——y_2，y_3，y_4——中的一个相连。又因为 y_2，y_3，y_4 中只有 y_2 与 x_2，x_3，x_4，x_5 中的某个相连，所以 x_3 与 y_2 相连。

现在考虑边 yy_2。如果有四圈同时经过 yy_2 和 y_2x_2，设该四圈除 y，y_2，x_2 外另一顶点为 p。显然 p 只能为 y 除 y_2 外剩余四邻居——x，y_1，y_3，y_4——中的一个。容易验证无论 p 为四者中的哪一个都会产生三圈或导致 x_1 与 y_2，y_3，y_4 中的两点距离为 2。因此，y_2x_2 不与 yy_2 构成四圈。同理可证 y_2x_3 不与 yy_2 构成四圈。所以 $N(y_2)/(S∪y)$中有两点，又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 yy_2 的 k 值为 2。xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，所以有两种情况。

情况五.2.I：yy_2 分别与 yy_3，yy_4 构成四圈。

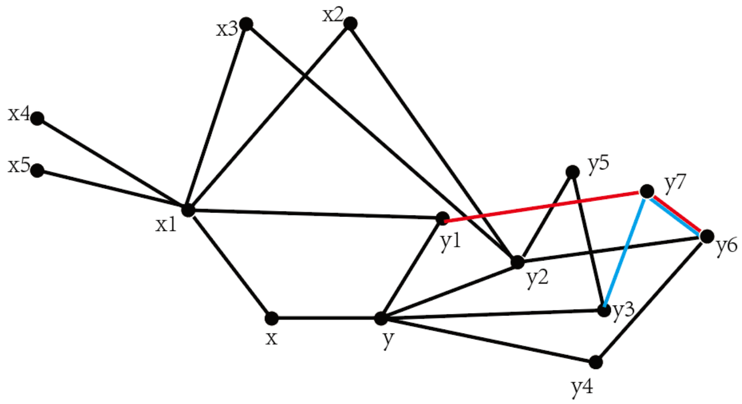
假设 yy_2 与 yy_3 构成的四圈的第四个顶点为 y_5，假设 yy_2 与 yy_4 构成的四圈的第四个顶点为 y_6，容易验证 y_5，y_6 均为新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 yy_2 不与 yy_1 构成四圈，所以在一个经过 yy_1 的四圈中，y 的两邻居只能为 x，y_1、y_1，y_3 或 y_1，y_4。所以 yy_1 的 k 值最多为 2，yy_1 的 k 值为 1，2，3。假如 yy_1 的 k 值为 1，因为 y 度数为 5，所以 y_1 度数为 2。考虑边 y_1y_4。因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈也是经过 yy_1 的唯一四圈，所以 $yy_4y_6y_2$ 是经过 yy_4 的唯一四圈，$yy_3y_5y_2$ 是经过 yy_3 的唯一四圈。根据充要条件 2，y_6 必须与 x，y_1，y_3 中的恰好一个距离为 2。但可以验证所有与 x，y_1 或 y_3 相连的点都不能为 y_6 的邻居。因此，yy_1 的 k 值不能为 1，yy_1 的 k 值为 2 或 3。

情况五.2.I.i：yy_1 的 k 值为 2。

因为 yy_2 不与 yy_1 构成四圈，所以在除 xyy_1x_1 外另一个经过 yy_1 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_1，y_3 或 y_1，y_4。不是一般性假设为 y_1，y_3。设该四圈除 y，y_1，y_3 外另一顶点为 y_7，容易验证 y_7 为新顶点。

因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，yy_1 的 k 值为 2 且 yy 两个四圈————经过 yy_1，所以 $yy_1y_7y_3$，$yy_2y_5y_3$ 是仅有的两个经过 yy_3 的四圈，$yy_4y_6y_2$ 是经过 yy_4 的唯一四圈。现在考虑边 yy_3。因为 yy_3 的 k 值为 2 且 y 的度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3 相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_3 的度数不能大于 3，y_3 的度数为 3。根据充要条件 1，y_7，y_5 中恰有一点 p 与 x，y_4 中的一个距离为 2。因为所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3 相连，所以 p 只能与 y_4 距离为 2，即 p 与 y_4 除 y 外的唯一邻居 y_6 相连，这时容易验证 p 只能为 y_7。然而这样 y_6 与 y_1，y_3 距离均为 2，根据充要条件 2，yy_4 的曲率不能为 0。

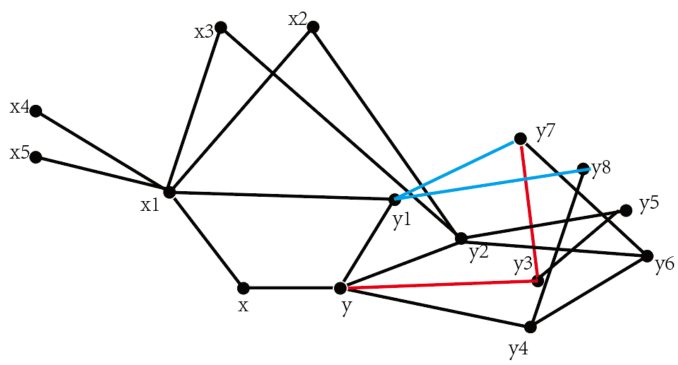


综上，情况五.2.I.i 不成立。

情况五.2.I.ii：yy_1 的 k 值为 3。

因为 yy_2 不与 yy_1 构成四圈，所以在除 xyy_1x_1 外另一个经过 yy_1 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_1，y_3 或 y_1，y_4。 设该 yy_1 与 yy_3 构成的四圈的第四个顶点为 y_7，yy_1 与 yy_4 构成的四圈的第四个顶点为 y_8，容易验证 y_7，y_8 为新顶点。

因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，所以 $yy_1y_7y_3$，$yy_2y_5y_3$ 是仅有的两个经过 yy_3 的四圈，$yy_1y_8y_4$，$yy_2y_6y_4$ 是仅有的两个经过 yy_4 的四圈。现在考虑边 yy_3，因为 yy_3 的 k 值为 2 且 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_3 的度数为 3，4 或 5。又因为可以验证所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3 相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_3 的度数不能大于 3，y_3 的度数为 3。同理 y_4 度数为 3。继续考虑边 yy_3。根据充要条件 1，y_7，y_5 中恰有一点 p 与 x，y_4 中的某个距离为 2。又因为所有与 x 距离为 2 的点均不能与 y_3 相连，所以 p 只能与 y_4 距离为 2。则 p 必须与 y_4 除 y 外剩余两邻居——y_8，y_6——中的一个相连。容易验证若 p 为 y_7 则只能与 y_6 相连，若 p 为 y_8 则只能与 y_5 相连。两种情况是对称的，所以不妨假设 p 为 y_7 且与 y_6 相连。此时，考虑边 y_4y_6。因为 y_4 度数为 3，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_4y_6 的 k 值为 2。又因为 y_4 度数为 3，所以根据已有的充要条件，y_6 度数为 5。y_6y_7 不与 y_4y_6 构成四圈，否则该四圈的第四个顶点必定为 y_4 除其在四圈 $yy_4y_6y_2$ 中两邻居外的唯一邻居 y_8，这会导致有三圈 $y_1y_7y_8$；然而，如图所示 y_8，y 与 y_7 距离均为 2，所以根据充要条件 1，y_3y_6 的曲率不能为 0。



综上，情况五.2.I.ii 不成立。

综上，情况五.2.I 不成立。

情况五.2.II： yy_2 分别与 yy_1 和 yy_3，yy_4 中的一个（不失一般性假设为 yy_3）构成四圈。

假设 yy_2 与 yy_1 构成的四圈的第四个顶点为 y_5，yy_2 与 yy_3 构成的四圈的第四个顶点为 y_6。容易验证 y_5，y_6 是新顶点。

现在考虑边 yy_4。因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，yy_2 不与 yy_4 构成四圈，所以在一个经过 yy_4 的四圈中，y 的两邻居只能为 y_4，y_1 或 y_4，y_3。yy_4 的 k 值最多为 2，yy_4 的 k 值为 1 或 2。

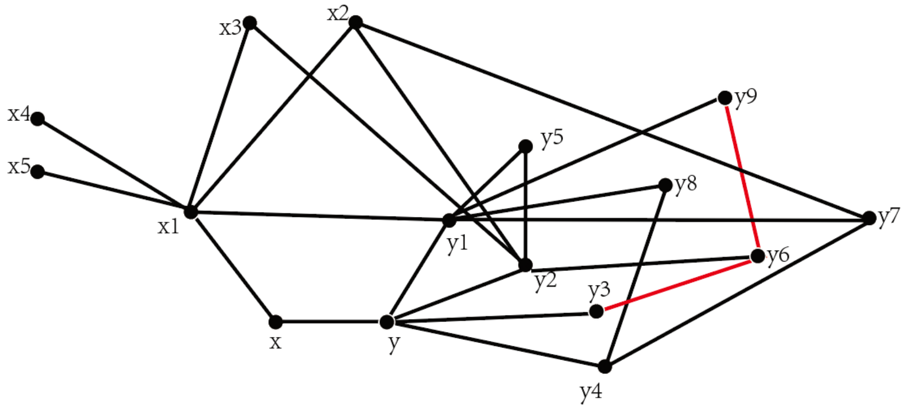
情况五.2.II.i：yy_4 的 k 值为 1。

现在考虑边 yy_2。根据充要条件 8，y_4 必须与 x_2，x_3 中的一个距离为 2，不失一般性假设为 x_2。则 y_4 与 x_2 有公共邻居 x_5。容易验证 x_5 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_4。因为 y 度数为 5，yy_4 的 k 值为 1，所以 y_4 度数为 2，则 y_4x_5 与 yy_5 构成四圈。假设该四圈除 y_4，x_5，y 外另一顶点为 p。p 只能为 y_1 或 y_3。容易验证 p 只能为 y_1。

继续考虑边 yy_3。首先 yy_3 不能与 yy_1 构成四圈，否则有四个四圈经过 yy_1，且 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_1 度数为 7；但因为 x，y_4 度数都为 2，它们都不能与 $N(y_1)/(y\cup S)$ 中的点距离为 2，所以根据充要条件 1，yy_1 的曲率不能为 0。又因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，$yy_4x_5y_1$ 是经过 yy_4 的唯一四圈，所以 $yy_3y_6y_2$ 是经过 yy_3 的唯一四圈。又因为 y 度数为 5，所以 y_3 度数为 2。根据充要条件 2，y_6 必须恰与 x，y_1，y_4 中的一个距离为 2。y_6 与 x 距离为 2 则要 y_6 与 x_1 相连，导致 x_1 度数超过 5；y_5 与 y_4 距离为 2 则要 y_6 与 x_5 相连，这时 x_5 与 y_3，y_4 距离均为 2，根据充要条件 2，yy_4 的曲率不能为 0。因此，y_6 只能与 y_1 距离为 2，则 y_6 与 y_1 有公共邻居 y_9。容易验证 y_9 是一个新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 yy_4 不与 yy_1 构成四圈，所以 xyy_1x_1，$yy_4x_5y_1$，$yy_2y_5y_1$ 是仅有的三个经过 yy_1 的四圈。又因为 y 度数为 5，y_1 已有 5 个邻居，所以根据已有的充要条件 y_1 的度数为 5 或 6。如图所示 y_3 与 $N(y_1)/(y\cup S)$ 中的点 y_9 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_1 的度数不能为 5，y_1 度数为 6。但因为 x，y_4 度数都为 2，它们都不能与 $N(y_1)/(y\cup S)$ 中的点距离为 2，所以根据充要条件 6，yy_1 的曲率不能为 0。



综上，情况五.2.II.i 不成立。

情况五.2.II.ii：yy_4 的 k 值为 2。

假设 yy_4 与 yy_1 构成的四圈的第四个顶点为 y_7，yy_4 与 yy_3 构成的四圈的第四个顶点为 y_8。容易验证 y_7，y_8 是新顶点。

现在考虑边 yy_4。因为 yy_4 的 k 值为 2，又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_4 的度数为 3，4 或 5。同时，可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能与 y_4 相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_4 的度数不能大于 3，y_4 的度数为 3。

现在考虑边 yy_3。首先，yy_3 不能与 yy_1 构成四圈。否则，有 4 个四圈经过 yy_1，这时因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件 y_1 度数为 7。因为 x 度数为 2，所以显然 x 不能与 $N(y_1)/(S\cup\{y\})$ 中的点距离为 2。那么，根据充要条件 3，y_4 必须与 $N(y_1)/(S\cup\{y\})$ 中的某点 p 距离为 2。则 y_4 除其在四圈 $yy_4y_7y_1$ 中两邻居外的唯一邻居 y_8 与 $N(y_1)/(S\cup\{y\})$ 中的某点 p 相连。然而，此时考虑边 y_4y_8。因为 y_4 度数为 3，所以综合已有的充要条件和我们的假设可知 y_4y_8 的 k 值为 2。又因为 y_4 度数为 3，所以根据已有的充要条件，y_8 度数为 5。y_8p 不与 y_4y_8 构成四圈，否则该四圈的第四个顶点必定为 y_4 除其在四圈 $yy_4y_8y_3$ 中两邻居外的唯一邻居 y_7，这会导致有三圈 y_1y_7p；然而，如图所示 y_7，y 与 p 距离均为 2，所以根据充要条件 1，y_4y_8 的曲率不能为 0。

因为 yy_3 不 yy_1 构成四圈，又因为 xyy_1x_1 是经过 xy 的唯一四圈，所以 $yy_4y_8y_3$，$yy_3y_5y_2$ 是仅有的两个经过 yy_3 的四圈。又因为 y 度数为 5，所以根据已有的充要条件，y_3 的度数为 3，4 或 5。同

时，可以验证所有与 x 距离为 2 的点都不能与 y_3 相连，所以综合充要条件 6 和 8，y_3 的度数不能大于 3，y_3 度数为 3。根据充要条件 1，y_8，y_6 中恰有一点 q 与 x，y_1 中的某点距离为 2。因为所有与 x 距离为 2 的点都不能与 y_3 相连，所以 q 只能与 y_1 距离为 2。又因为前面已证明 y_8 不能与 y_1 有公共邻居，所以 q 只能为 y_6。则 y_6 与 y_1 有公共邻居 r。容易验证 r 为新顶点。

现在考虑边 yy_1。因为 yy_3 不与 yy_1 构成四圈，所以 xyy_1x_1，$yy_4y_7y_1$，$yy_2y_5y_1$ 是仅有的三个经过 yy_1 的四圈。又因为 y 度数为 5，y_1 已有 5 个邻居，所以根据已有的充要条件 y_1 的度数为 5 或 6。如图所示 y_3 与 $N(y_1)/(y\cup S)$ 中的点 r 距离为 2，所以根据充要条件 5，y_1 的度数不能为 5，y_1 度数为 6。但因为 x 度数为 2，它不能与 $N(y_1)/(y\cup S)$ 中的点距离为 2，前面也已证明 y_4 不能与 $N(y_1)/(y\cup S)$ 中的点距离为 2，所以根据充要条件 6，yy_1 的曲率不能为 0。

综上，情况五.2.II.ii 不成立。
综上，情况五.2.II 不成立。
综上，情况五.2 不成立。
综上，情况五不成立。

至此，定理 1&2 得到证明。■