参赛队员姓名：倪丹

中学：华东师范大学第二附属中学

省份：上海市

国家/地区：中国

指导教师姓名：戴中元

论文题目：关于函数$f(n)=\delta(n)/n$的几项探究

题目：关于函数$f(n)=\delta(n)/n$的几项探究

作者：华东师范大学第二附属中学 倪丹

摘要：对于正整数n，我们定义$f(n)=\frac{\delta(n)}{n}$，其中$\delta(n)$表示 n 的所有正约数之和。根据文献，$\delta(n)$是积性函数，但不是完全积性函数。设正整数n，$f(n)=m$，若存在另一个正整数 p 使得 $f(p)=f(n)=m$，则称正整数 n 为友谊数，反之则称 n 为孤独数。利用这一引理以及由此得出的$\delta(n)$的一般计算公式，本文用初等方法讨论了素因子个数为 1 和 2 的数是孤独数还是友谊数的判定，不定方程 $f(x)=nf(y)$解的构造方法，讨论了$f(n)$函数值的有界性并初步探究其分布，估计了友谊数在正整数集中的密率。

Title: Several problems about Function f(n)=Delta(n)/n

Abstract: For positive integer n, we define f (n) = Delta (n) / n, where Delta (n) represents the sum of all positive divisors of n. According to literature, Delta (n) is a product function, but not a complete product function. Let n be a positive integer, and f (n) = m. If there is another positive integer P such that f (p) = f (n) = m, then n is a friendly number and if not, then n is a lonely number. Using this lemma and the general formula for calculating delta(n) derived from it, this paper uses elementary methods to discuss whether the number of prime factors 1 and 2 is a lonely number or a friendly number. The construction method of the solution of indefinite equation f(x)=nf(y) is discussed. The boundedness of the value of f(n) function is discussed and its distribution is preliminarily explored, and the friendly number is estimated in positive integer. Density in the number set of friendly number is estimated.

关键词：约数和、积性函数、不定方程、数列

目录：

一、引理

约数和函数是一类很早提出的数论函数，由此衍生出来许多数论函数。对于约数和函数 $\delta(n)$，已经有一些研究成果，例如：

【引理 1】如果 m、n 互质，那么 $\delta(mn)=\delta(m)\delta(n)$. [1]

意即 δ(n)为积性函数，由此可得：

【引理 2】如果 m、n 互质，那么 $f(mn)=f(m)f(n)$.

但是当 *m*、*n* 不互质时，以上结论不成立，也就是说 *f(n)*不是完全积性函数。

根据这一性质，我们可以推导出约数和的计算公式：

【引理 3】如果正整数 n 可以被分解成 n=$p_1^{m_1} \times p_2^{m_2} \times \cdots p_r^{m_r}$（其中 p_1，p_2，$\cdots p_r$为不同的质数，m_1，m_2，$\cdots m_r$为正整数），那么

δ (n)=$\frac{p_1^{m_1+1}-1}{p_1-1} \times \frac{p_2^{m_2+1}-1}{p_2-1} \times \cdots \frac{p_r^{m_r+1}-1}{p_r-1}$.

二、孤独数与友谊数的判定

【定义】设正整数n，$f(n)=m$，若存在另一个正整数 p 使得 $f(p)=f(n)=m$，则称正整数 n 为友谊数，反之则称 n 为孤独数。

【定理 1】在正整数集中，存在无穷多个孤独数。

【证明】考察正整数集内所有素数。

取任意素数 *p*，则有$f(p)=\frac{p+1}{p}=1+\frac{1}{p}$,

假设存在正整数 q,使得$f(q)=\frac{p+1}{p}$

由观察可知，q一定能被p整除.

1°当q中只含有素因数p,

可设$q=p^s$.

那么$\delta(q)=\frac{1+p+p^2+\cdots+p^s}{p^s}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\frac{1}{p^s}>1+\frac{1}{p}$

矛盾，所以此时没有满足条件的 *q.*

2°当 q 中还含有其他因数，

可设 *q=p×t.*

那么 δ(q)$\geqslant\frac{1+p+t+q}{q}$>1+$\frac{1}{p}$

矛盾，所以此时没有满足条件的 *q.*

综合上述，所有的质数均为孤独数，所以孤独数存在无穷多个。

进一步地，我们还可以得出所有质数幂也都是孤独数。

取任意素数幂p^q（其中 *p* 是质数，*q* 是正整数）

则有$\delta(q)=\frac{1+p+p^2+\cdots+p^q}{p^q}$

这一定是一个既约分数，因为$1+p+p^2+\cdots+p^q\equiv 1(modp)$,与 *p* 互质

假设存在正整数 *m*，使得$f(m)=f(p^q)$

那么p^q一定整除 *m*

可设$m=s\times p^{q+r}$(其中 s 不含质因数 *p*,*r* 为自然数)

则 *f(m)*=$\frac{f(p^{q+r})\times f(s)}{s\times p^{q+r}}\geq\frac{f(p^{q+r})}{p^{q+r}}\geq\frac{f(p^q)}{p^q}$(当且仅当 *s*=1 且 *r*=0 时，等号全部成立)

也即 *m*=p^q，所以不存在满足条件的 m。

进而，所有质数幂都是孤独数。

实际上，目前更好的结果是：满足 δ(n)与 n 互质的都是孤独数。这个结论的证明如下：

正整数 n 满足(δ(n)，n)=1，

f(n)=$\frac{\delta(n)}{n}$，是一个既约分数

假设存在一个与 n 不同的正整数 m，

使得$\frac{\delta(n)}{n}=\frac{\delta(m)}{m}$.　　　　　(1)

由(1)式观察可知，m 是 n 的整数倍

不妨设 m=kn（k 为大于 1 的正整数）

f(m)=f(kn) ≥ $\frac{k\delta(n)+1}{kn}>\frac{\delta(n)}{n}$=f(n)

矛盾！所以不存在满足条件的 m，因此 n 是孤独数。

目前，判断一个正整数是友谊数还是孤独数是困难的，还有很多数无法确定是友谊数还是孤独数，例如 2p(p 是大于 3 的质数)型的数性质未定。利用参考文献[1]中方法不做改进可以得出更广的结论.

【定理2】在正整数集中，判断2p(p是大于3的质数)是否是一个孤独数，那么满足f(n)=f(2p)的n值只需在集合Q3={n|n=p×(6k-1)，k∈N+}和Q4={n|n=p×(6k+1)，k∈N+}中寻找。若在Q3和Q4中都不存在这样的n 值满足上式，则说明2p是个孤独数; 反之若在Q3或Q4中找到这样的n值使得n满足上式，则说明2p不是一个孤独数。

【证明】f(2p)=$\frac{1+2+p+2p}{2p}=\frac{3+3p}{2p}$

假设存在正整数n，满足f(n)=f(2p),

因为p是奇数，所以2|3+3p，

而p是大于3的质数，因此(3+3p,2p)=2

由此可知，n一定是p的倍数.

下面分n是p的奇数和偶数倍进行分类讨论:

1°当n为p的偶数倍，不妨设$n=p\times(2K+2)$(K是正整数)

⑴当3|n时，则$\frac{1}{2}$n，$\frac{1}{3}$n，$\frac{1}{p}$n，n都是n的约数

所以f(n)>$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{p}=\frac{11p+6}{6p}>\frac{9p+9}{6p}$,与条件不符

⑵当3∤n时，则2K+2=2(3k-1)或2(3k+1)

I.当2|3k−1，即k是奇数

则$\frac{1}{2}$n，$\frac{1}{4}$n，$\frac{1}{p}$n，$\frac{1}{2p}$n都是n的约数

$\frac{\delta(n)}{n}-1>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}=\frac{3p+5}{4p}>\frac{p+3}{2p}$，与条件不符

II.当2∤3k-1，即k是偶数

①当k=2，n=6p

$$f(n)=\frac{\frac{2^2-1}{2-1}\times\frac{3^2-1}{3-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}}{6p}=\frac{3\times4\times(p+1)}{6p}=\frac{2(p+1)}{p}>\frac{3+3p}{2p}=f(2p)$$

②当k为大于2的偶数，那么3k-1为素数或奇合数

a. 当3k-1为素数，n=2p(3k-1)

$$\delta(n)=\frac{2^2-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}\times\frac{(3k-1)^2-1}{(3k-1)-1}=9k(p+1)$$

f(n)=$\frac{9k(p+1)}{2p(3k-1)}=f(2p)=\frac{3p+3}{2p}$

化简得：$\frac{3k}{3k-1}=1$,该方程无解，所以此时没有符合条件的n.

b. 当3k-1为合数，

根据算术基本定理，可设n=$2\times p^{m_2}\times p_3^{m_3}\times\cdots p_r^{m_r}$,

则f(n)=$\frac{\frac{2^{1+1}-1}{2-1}\times\frac{p^{m_2+1}-1}{p-1}\times\cdots\frac{p_r^{m_r+1}-1}{p_r-1}}{2\times p^{m_2}\times p_3^{m_3}\times\cdots p_r^{m_r}}=\frac{3+3p}{2p}$

化简得：$(p+\sum_{i=0}^{m_2-1}\frac{1}{p^i})\times\left(1+\sum_{i=1}^{m_3}\frac{1}{p_3^{\,i}}\right)\times\cdots\times\left(1+\sum_{i=1}^{m_r}\frac{1}{p_r^{\,i}}\right)=p+1$

$p+\sum_{i=0}^{m_2-1}\frac{1}{p^i}\geq p+1$,后面每一项都$\geq 1$,

所以$(p+\sum_{i=0}^{m_2-1}\frac{1}{p^i})\times\left(1+\sum_{i=1}^{m_3}\frac{1}{p_3^{\,i}}\right)\times\cdots\times\left(1+\sum_{i=1}^{m_r}\frac{1}{p_r^{\,i}}\right)\geq p+1$

（当且仅当$m_2=1$，$m_3=m_4=\cdots=m_r=0$时等号成立）

III.当2|3k+1，与情况I类似.

IV.当2∤3k+1，即k是偶数，3k-1为素数或奇合数

a.当3k+1为素数，n=2p(3k+1)

$$\delta(n)=\frac{2^2-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}\times\frac{(3k+1)^2-1}{(3k+1)-1}=3\times(p+1)\times(3k+2)$$

f(n)=$\frac{3\times(p+1)\times(3k+2)}{2p(3k+1)}=f(2p)=\frac{3p+3}{2p}$

化简得：$\frac{3k+1}{3k+2}=1$,该方程无解，所以此时没有符合条件的n.

b.当3k+1为合数，与情况②类似.

至此，当n为p的偶数倍时的情况已经全部讨论完毕，此时没有符合条件的n.

2°当n为p的奇数倍，不妨设$n=p\times(2K+1)$(K是正整数)

令集合Q1={n|n=2k+1，k∈N+}

⑴当3|n，令Q2={n|n=p(6k-3)=3p(2k-1)，k∈N+}⊂Q1

I.当k=1时，n=3p，则$\delta(n)=\frac{3^2-1}{3-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}$=4(p+1) f(n)= $\frac{4(p+1)}{3p} \neq f$(2p)，不符合条件

II. 当k=2时，n=9p

III.当k$\geq$3，则2k-1可能为素数或奇合数

a. 当2k-1为素数

①当2k-1是与p不同的素数

则$\delta(n)=\frac{3^2-1}{3-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}\times\frac{(2k-1)^2-1}{(2k-1)-1}=8k(p+1)$

所以f(n)=$\frac{8k(p+1)}{3p(2k-1)}=f(2p)=\frac{3+3p}{2p}$

化简解得k=$\frac{1}{2}$，不符合条件.

②当2k-1=p，n=3p^2

则$\delta(n)=\frac{3^2-1}{3-1}\times\frac{p^3-1}{p-1}$=4$(p^2+p+1)$

所以$f(n)=\frac{4(p^2+p+1)}{3p^2}=f(2p)=\frac{3+3p}{2p}$

化简得：$p^2+p-8=0$，不符合条件

b. 当2k-1为奇合数,

根据算术基本定理，可设n=$3^{m_1}\times p^{m_2}\times {p_3}^{m_3}\times\cdots {p_r}^{m_r}$,

则f(n)= $\frac{\frac{3^{m_1+1}-1}{3-1}\times\frac{p^{m_2+1}-1}{p-1}\times\cdots\frac{{p_r}^{m_r+1}-1}{p_r-1}}{3^{m_1}\times p^{m_2}\times {p_3}^{m_3}\times\cdots {p_r}^{m_r}}=\frac{3+3p}{2p}$

化简得：($\frac{1}{3}+\frac{1}{3^{m_1+2}})\times\left(p^2-\frac{p}{p^{m_2}}\right)\times\cdots\times\left(1+\sum_{i=1}^{m_r}\frac{1}{{p_r}^i}\right)=2(p-1)$

$$\text{因为}\frac{8}{27}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3^{m_1+2}}<\frac{1}{3},p^2-\frac{p}{p^{m_2}}>p^2-1$$

所以有$\frac{8}{27}\times(p^2-1)\times(1+\frac{1}{p_3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{p_r})\le 2(p-1)$

但是$\frac{8}{27}\times(p+1)>2$，矛盾！所以此时没有符合条件的n.

⑵当n∈Q1且3∤n时，

令Q3={n|n=p×(6k-1)，k∈N+}，Q4={n|n=p×(6k+1)，k∈N+}

则$\forall n\in Q3,Q4,$有3∤n，

I.当n=p(6k-1)时，

a. 当6k-1为素数，

①当6k-1=p，则n=p^2，

有$f(n)=\frac{1+p+p^2}{p^2}=\frac{3+3p}{2p}=f(2p)$

化简得：$p^2+p-2=0,$解得p=1，不符合条件

②当6k-1为与p不同的素数，n=p(6k-1)

则f(n)=$\frac{6k(p+1)}{p(6k-1)}=\frac{3p+3}{2p}$=f(2p)

化简得：$\frac{2k}{6k-1}=\frac{1}{2}$，解得$k=\frac{1}{2}$，不符合条件.

b. 当6k+1为素数，

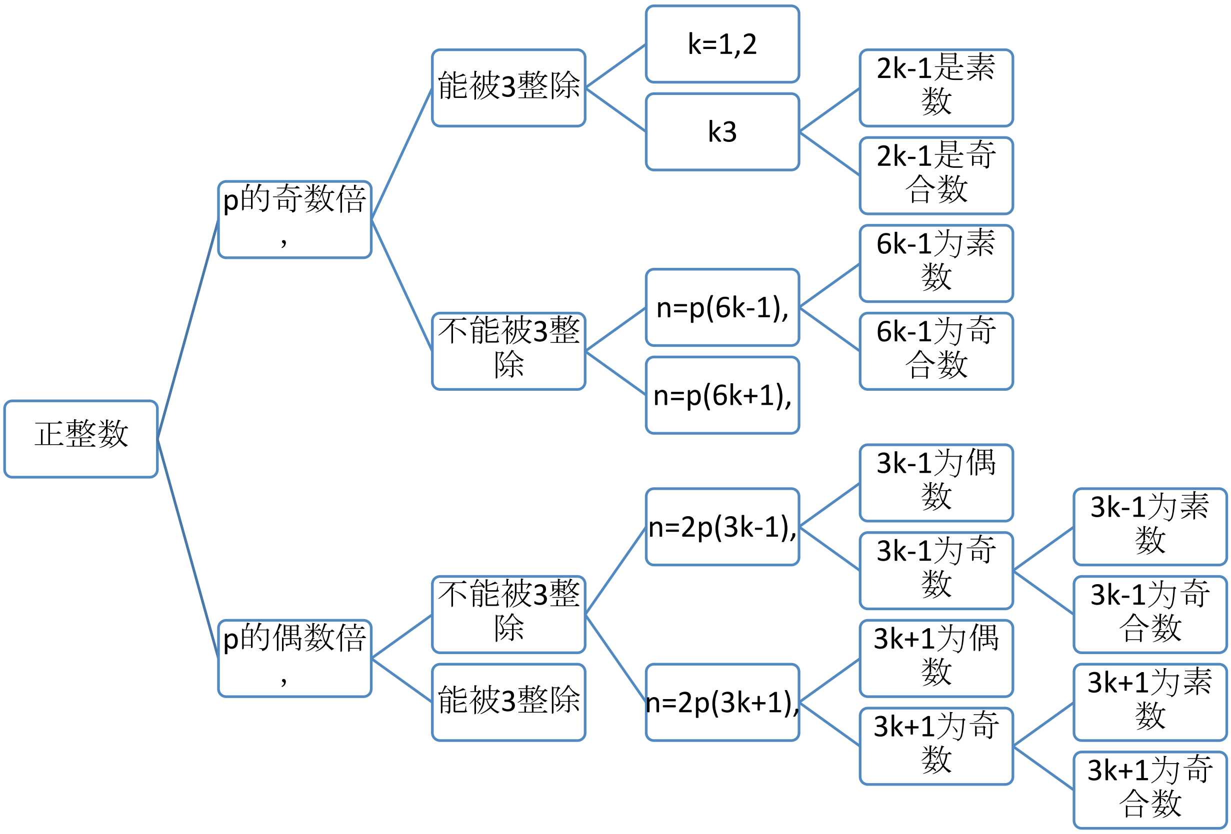
①当6k+1=p，与a. ①类似.

②当6k+1为与p不同的素数，n=p(6k+1)

则f(n)=$\frac{(6k+2)(p+1)}{p(6k+1)}=\frac{3p+3}{2p}$=f(2p)

化简得：$\frac{6k+2}{6k+1}=\frac{3}{2}$，解得$k=\frac{1}{18}$，不符合条件.

至此所有情况讨论完毕，分类讨论步骤大致示意如下：



另外考察形如3p的自然数：

【定理3】若3p是友谊数，那么p一定是6k-1（k是正整数）型的素数。

【证明】f(3p)=$\frac{1+3+p+3p}{3p}=\frac{4+4p}{3p}$

$\because (4+p,p)=1\ \therefore (4+4p,p)=1$

要使3p不是孤独数，则（4+4p，3p）＞1

所以只有3|4+4p，而p=6k-1或6k+1（k为正整数）

因此p=6k-1（k为正整数）

由此，我们可以确定形如3（6k+1）（其中6k+1是质数）的数都是孤独数.

对于形如3（6k-1）（其中6k-1是质数）的数，类似【定理2】，我们可以得出以下结论：

【定理3】在正整数集中，判断3p(p是大于3的质数)是否是一个孤独数，那么满足f(n)=f(3p)的n值只需在集合Q={n|n=p×(2k+1),2k+1为合数且3∤2k+1}中寻找.若在Q中都不存在这样的n值满足上式，则说明3p是个孤独数; 反之若在Q中找到这样的n值使得n满足上式，则说明3p不是一个孤独数.

【证明】 f(3p)=$\frac{1+3+p+3p}{3p}=\frac{4+4p}{3p}$

$\because (4+p,p)=1 \ \therefore (4+4p,p)=1$

所以n为p的整数倍，不妨设n=Kp（K为正整数）

1°n为p的偶数倍，设n=(2k+2)p（k为正整数）

⑴当3∣2k+2时，

f(n)>$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{p+2p}\frac{1}{}+\frac{1}{3p=}\frac{11p+11}{6p}>\frac{4+4p}{3p}$，不符合条件.

⑵当3∤2k+2时，n=2p(k+1)

I.当k+1为质数时，

f(n)=$\frac{\frac{2^2-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}\times\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)-1}}{2p(k+1)}=\frac{3(p+1)(k+2)}{2p(k+1)}=\frac{4+4p}{3p}$

化简得：$\frac{3(k+2)}{2(k+1)}=\frac{4}{3}$，解得k=-10，不符合要求.

II.当k+1不为质数时，

根据算术基本定理，可设$n=2^{\alpha}\times p^{\beta}\times {p_1}^{\alpha_1}\times {p_2}^{\alpha_2}\times\cdots\times {p_r}^{\alpha_r}$

(其中$p,p_1,p_2,\cdots,p_r$是互不相同的奇质数，α，β，α_1，α_2，$\cdots$，α_r是正整数.)

$$\delta(n)=\frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1}\times\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1}\times\frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\cdots\times\frac{{p_r}^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

所以 $f(n)=\frac{\frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1}\times\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1}\times\frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\cdots\times\frac{{p_r}^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}}{2^{\alpha}\times p^{\beta}\times {p_1}^{\alpha_1}\times {p_2}^{\alpha_2}\times\cdots\times {p_r}^{\alpha_r}}$

$=(1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{2^i})\times(1+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{p^i})\times(1+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{p_1^{\,i}})\times\cdots\times(1+\sum_{i=1}^{\alpha_r}\frac{1}{p_r^{\,i}})=\frac{4+4p}{3p}$

化简得:$(3+\frac{3}{2}+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{3}{2^i})\times(p+1+\sum_{i=1}^{\beta-1}\frac{1}{p^i})\times\cdots\times(1+\sum_{i=1}^{\alpha_r}\frac{1}{p_r^{\,i}})=4(1+p)$

$3+\frac{3}{2}+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{3}{2^i}>4$, $p+1+\sum_{i=1}^{\beta-1}\frac{1}{p^i}\geq p+1$,后面每一项都大于1，该等式不成立.

2°当n为p的奇数倍时，设n=(2k+1)p（k为正整数）

⑴当3|2k+1时，

则$f(n)\geq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}=\frac{4+4p}{3p}$(等号当且仅当k=1时成立，此时n=3p)

不符合要求.

⑵当3∤2k+1时，

①当2k+1为质数时，

$f(n)=\frac{(2k+2)(p+1)}{(2k+1)p}=\frac{4+4p}{3p}$,化简得：$\frac{2k+2}{2k+1}=\frac{4}{3}$,解得k=1,

此时n=3p，不符合要求.

故在正整数集中，判断3p(p是大于3的质数)是否是一个孤独数，那么满足f(n)=f(3p)的n值只需在集合Q={n|n=p×(2k+1),2k+1为合数且3∤2k+1}中寻找.

讨论思路与【定理2】类似.

如果在形如pq（其中p、q均为奇质数，$p<q$）的数中，$p\nmid q+1$,

那么（pq，$1+p+q+pq$）=1,pq一定是孤独数。

【定理4】如果pq（其中p、q均为奇质数，$p<q$）是友谊数，那么满足f（n）=f（pq）的不同于pq的正整数n一定满足n=s$\times q^{\alpha}$（其中α是不小于2的正整数，s满足f（s）$<\frac{1+p}{p}$）.

【证明】假设f（n）=f（pq）

f(pq)=$\frac{1+p+q+pq}{pq}$,因为pq是友谊数，所以（$1+p+q$，pq）>1

而（q，$1+p+q+pq$）=（p,$1+q$）>1

所以p|1+q，不妨设1+q=Mp（M为正整数）

f(pq)=$\frac{(1+p)(1+q)}{pq}=\frac{M(1+p)}{q}$

1°当M为q的整数倍时，不妨设M=mq（m为正整数）

则1+q=mpq，即q=$\frac{1}{mp-1}$

因为q为正整数，所以mp=2，但p为奇质数，矛盾！这种情况不可能.

2°当M不为q的整数倍时，那么M与q互质, f(pq)=$\frac{M(1+p)}{q}$为既约分数.

所以n为q的整数倍，不妨设n=rq（r为正整数）

⑴当r与q互质时，

f(n)=f(r)f(q)=$\frac{q+1}{q}\times f(r)=\frac{(1+p)(1+q)}{pq}$，即f（r）=$\frac{1+p}{p}$

而p为质数，根据上文已证结论，p是孤独数.

所以此时没有符合条件的n.

⑵当r与q不互质时，即r为q的整数倍

可设r=s×q^{α}（s与q互质，α为正整数）

则n= s×$q^{\alpha+1}$，f（n）=$\frac{\delta(s)\times\frac{q^{\alpha+2}-1}{q-1}}{s\times q^{\alpha+1}}$=$\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha+1}\frac{1}{q^{i}}\right)\times f$(s)=$\frac{(1+p)(1+q)}{pq}$

$1+\sum_{i=1}^{\alpha+1}\frac{1}{q^{i}}>\frac{1+q}{q}$，所以$f(s)<\frac{1+p}{p}$.

三、函数值之间的倍数关系与函数值的上下界

【定义】若一个正整数除它本身以外的约数和等于它本身，那么称这个正整数为完全数。

【定理 5】方程 $f(x)=2f(y)$ 有无数组正整数解。

【证明】由引理，有 $f(x)=f(n)f(y)=f(ny)$（其中 n,y 互质）

所以我们只需保证 $f(n)=2$.

根据文献[2]，符合 $f(n)=2$ 的所有数都被称为完全数。

该方程的一组通解如下所示：

$x=nk$，$y=k$，其中 n 是完全数，k 是与 n 互质的正整数。

虽然我们目前不能证明完全数有无穷多个，但我们知道质数有无穷多个，因此仍然可以说明方程有无数组解。

在 1~100000 内，满足 $f(n)=3$ 的正整数 n 有 120 和 672，满足 $f(n)=4$ 的正整数 n 有 30240 和 32760，运用相似的方法，同样可以通过构造证明方程 $f(x)=3f(y)$ 和 $f(x)=4f(y)$ 有无穷多组解。而目前根据文献[4]，更好的结果是存在 n 使得 f（n）=8，但即便是其中最小的也非常大。

于是关于该函数值倍数的问题，转化为以下的问题：

对于任意正整数 p，是否都存在至少一个正整数 n，使得 $f(n)=p$？

目前我们可以得出以下结论：

【定理 6】函数 $f(n)=\delta(n)/n$ 的取值没有上界，存在最大下界 1.

【证明】考察数列{ n！，n 为正整数}

$f(n!) > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}$

根据文献[3],调和级数 $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有发散性，当 n 很大时，有个近似公式：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}=\gamma+\ln n$

(γ 是欧拉常数，约为 0.57721566490153286060651209...)

因此函数 f(n)= δ (n)/n 的取值没有上界。

而当 n 取充分大的质数时，f（n）无限趋近于 1.

但是 f（n）$>\frac{n}{n}=1$,因此 f（n）的最大下界为 1.

至于是否每个大于 1 的整数都在函数 $f(n)=\delta(n)/n$ 的值域内，有待进一步探究。

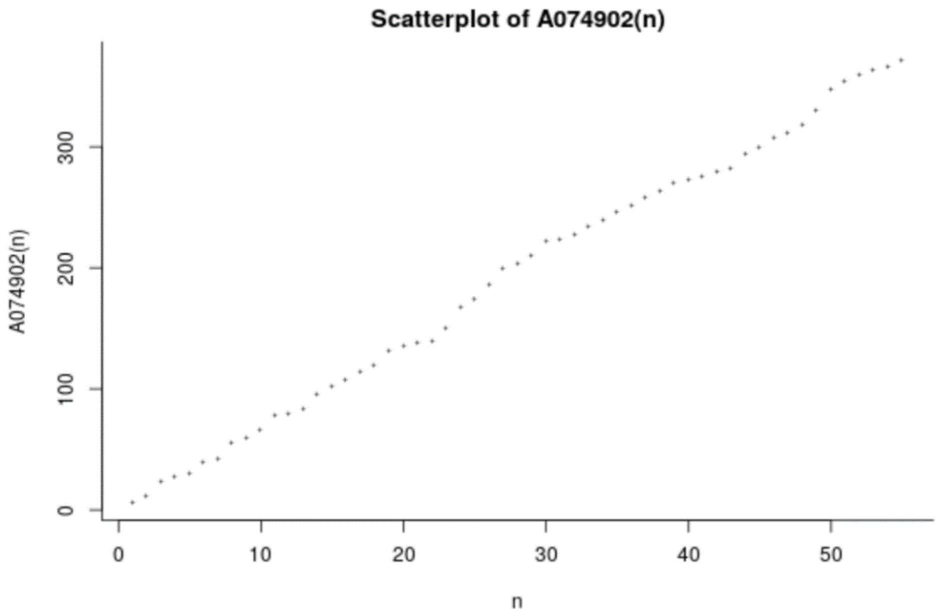
【定理 7】f(n)的值在[1,+∞）上是稠密的，且存在无数个 n 落在任意小区间(a,b)中.

四、通过估计密率研究友谊数的分布

根据文献[4]，我们目前能够确定形式的友谊数有偶完全数，即：使 f(n)=2 的偶数都满足 n=$2^{m-1}(2^m-1)$（其中2^m-1为质数）.梅森素数的数量无疑是无限的，只是暂时我们无法证明这一点。这样一来数列 A={1,n｜n=$2^{m-1}(2^m-1)$（2^m-1为质数）}的密率函数$\frac{A(n)}{n}\le\frac{m}{2^{m-1}(2^m-1)}$.

而$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2^{m-1}(2^m-1)}$=0，所以密率 d（A）=0.

如图是摘自 OEIS A074902 网页的友谊数数列图像：



可以看出当 n 比较小时，友谊数的增大趋势变化不大。

通过计算可知，集合 B={0,1,n|n 为友谊数}部分密率函数$\frac{B(n)}{n}$的值如下图所示：（表格中的数据 1-372 摘自 OEIS A074902，数列因为有 10、14 等数不确定是孤独数还是友谊数所以目前不完整，如果 1-372 中还存在友谊数，那么与其函数值相同的数 n 满足$n>10^{30}$；372 以上的数据由计算机计算得到，如果在 372-10^6中还存在其他友谊数，那么与其函数值相同的数 n 满足$n>10^6$）

n	a(n)	(n-1)/[a(n)-1]
1	6	0
2	12	0.090909091
3	24	0.086956522
4	28	0.111111111
5	30	0.137931034
6	40	0.128205128
7	42	0.146341463
8	56	0.127272727
9	60	0.13559322
10	66	0.138461538
11	78	0.12987013
12	80	0.139240506
13	84	0.144578313
14	96	0.136842105
15	102	0.138613861
16	108	0.140186916
17	114	0.14159292
18	120	0.142857143
19	132	0.13740458
20	135	0.141791045
21	138	0.145985401
22	140	0.151079137
23	150	0.147651007
24	168	0.137724551
25	174	0.138728324
26	186	0.135135135
27	200	0.130653266
28	204	0.133004926
29	210	0.133971292
30	222	0.131221719

3456	98600	0.035040923
3457	98644	0.035035431
3458	98704	0.035024265
3459	98756	0.035015949
3460	98784	0.035016147
3461	98812	0.035016344
3462	98924	0.034986808
3463	99090	0.034938288
3464	99092	0.034947674
3465	99099	0.034955297
3466	99148	0.034948107
3467	99232	0.034928601
3468	99260	0.034928823
3469	99316	0.034919196
3470	99400	0.034899747
3471	99428	0.034899977
3472	99450	0.034902312
3473	99484	0.034900435
3474	99596	0.034871228
3475	99652	0.034861667
3476	99696	0.034856312
3477	99800	0.034830008
3478	99820	0.034833048
3479	99918	0.034808891
3480	99932	0.034814022
3481	99988	0.034804525

根据表中数据可知，集合 B 的密率随着数的增多在不断减小.初步可以猜测，集合 B 的密率为 0.

四、$f(n)$的部分函数值分布及变化趋势

定义数列{f(n)}($n\in N$),取其几个子列进行研究 ：

①{f(n!)} ($n\in N$)

f(n!) $>\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}$，而根据文献[3]，$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}$是一个发散级数

所以数列{f(n!)}是没有极限的.

②{f($\prod p_n$)}(p_n表示第 n 个质数)

f($\prod p_n$) $>\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$,这是欧拉级数，根据文献[7]，欧拉级数是发散级数

所以数列{f($\prod p_n$)}是没有极限的.

③{f(p_n)} (p_n表示第 n 个质数)

当$n\to+\infty$时，$p_n\to+\infty$，

$f(n)=1+\frac{1}{p_n}$，$\lim_{p_n\to+\infty}1+\frac{1}{p_n}$=1，所以数列{f($p_n$)}存在极限 1.

④{f(p^n)} ($n \in N$,p为确定质数)

f(p^n)=$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{p^i}$=$\frac{1-(\frac{1}{p})^n}{1-\frac{1}{p}}$=$\frac{p-1}{p}-\frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{p-1}{p}-\frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$=$\frac{p-1}{p}$

所以数列{f(p^n)}存在极限$\frac{p-1}{p}$.

⑤{f($p \cdot p_n$)}(p 为确定质数，p_n表示第 n 个质数)

f($p \cdot p_n$)=1+$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_n}$+$\frac{1}{p \cdot p_n}$，$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p \cdot p_n}$=$1+\frac{1}{p}$=$\frac{p+1}{p}$

所以数列{f($p \cdot p_n$)}存在极限$\frac{p+1}{p}$.

在所取的子列中，不同子列存在不同极限而有的没有极限，数列{f(n)}的各子列差异比较大.

结论：在正整数集中，存在无穷多个孤独数，所有满足$\delta(n)$与 n 互质的正整数都是孤独数。

在正整数集中，判断2p(p是大于3的质数)是否是一个孤独数，那么满足f(n)=f(2p)的n值只需在集合Q3={n|n=p×(6k-1)，k∈N+}和Q4={n|n=p×(6k+1)，k∈N+}中寻找。若在Q3和Q4中都不存在这样的n 值满足上式，则说明2p是个孤独数; 反之若在Q3或Q4中找到这样的n值使得n满足上式，则说明2p不是一个孤独数。

若3p是友谊数，那么p一定是6k-1（k是正整数）型的素数。且在正整数集中，判断3p(p是大于3的质数)是否是一个孤独数，满足f(n)=f(3p)的n值只需在集合Q={n|n=p×(2k+1),2k+1为合数且3∤2k+1}中寻找.若在Q中都不存在这样的n值满足上式，则说明3p是个孤独数; 反之若在Q中找到这样的n值使得n满足上式，则说明3p不是一个孤独数.

如果pq（其中p、q均为奇质数，$p<q$）是友谊数，那么满足f（n）=f（pq）的不同于pq的正整数n一定满足n=s$\times q^{\alpha}$（其中α是不小于2的正整数，s满足f（s）$<\frac{1+p}{p}$）.

方程*f(x)=nf(y)*有无穷多组解的充分条件是存在正整数m使得f(m)=n.

函数$f(n)=\delta(n)/n$的取值没有上界，存在最大下界1

根据目前数据猜测：集合B={0,1,n|n为友谊数}的密率为0.

数列$\{f(n)\}$的子列有不同的极限，有的甚至没有极限.

参考文献：

[1] 《亲和数的若干性质及十对亲和数》 周尚超，华东交通大学学报，2000 年 9 月第 17 卷第 3 期

[2] 《10 是孤独数的初等数学方法探讨》 刘念，安阳师范学院学报，2016 年第 2 期

[3] 《调和级数$\sum_1^\infty \frac{1}{n}$发散性的证明》 段佩，教育教学论坛，2015 年 4 月第 16 版

[4] OEIS A074902 List,Graph

[5] 《数论中的问题与结果》曹珍富，哈尔滨工业大学出版社，1996 年 6 月第一版

[6] 《数论的三颗明珠》辛钦，上海科学技术出版社 1984 年版

[7] 《欧拉的级数理论研究》金英姬，西北大学，2008 年

致谢

平时我喜欢阅读一些关于数论的书籍，其中关于完美数的问题吸引了我。完美数是指其约数和等于自身两倍的一类特殊自然数。另外，对于重要的一类数论函数约数和函数 **δ(n)**，我之前也有一些了解。将两者建立联系，我就想到定义函数$f(n)=\frac{\delta(n)}{n}$，对它的性质进行研究。

那么函数$f(n)$应该针对它的哪些特点研究呢？首先想到的是函数值的求法、分布和变化趋势。为了找到更多突破口，我查阅文献，发现了刘念《10 是孤独数的初等数学方法探讨》，了解到孤独数和友谊数的概念。由此我的研究又多了许多新的内容，课题的整体结构也明晰起来。

从暑假里的学校科技营期间开始，我就与指导老师通过邮箱建立了联系，与他初步探讨了课题的选题方向。平时我会定期与他当面交流课题进展和研究中遇到的问题。由于数学学科本身的特殊性，所有的探究都是持续进行，一边发现问题一边解决问题。

从 2018 年 9 月开始至 2019 年 2 月，我花了大约两个月确定题目，三个月不到进行问题发现和探究，剩下的一两周汇总信息、撰写论文。

数学课题具有很大的不确定性，因此我采取的方式是一边提出问题，一边解决问题，同时查阅大量文献和参考书籍学习相关知识。这样的方式可以随时为课题注入新的活力，具有较强的机动性。

主要的研究场所在我就读的中学，得到了学校科技辅导教师戴中元老师的指导。在选题方面，他从我给出的众多问题中选出了一个适

合研究的问题，确定了我课题的大方向。在进行研究时，他为我推荐了一些相关书籍和资料，也提出了一些值得探究的问题，在解决问题过程中给我一些点拨。撰写论文过程中他告知我论文的基本格式，并为我的论文作了部分改动。且戴老师对我的指导全部无偿。

对于正整数 n，我们定义 f(n)=δ(n)/n，其中 δ(n)表示 n 的所有正约数之和。根据文献，δ(n)是积性函数，但不是完全积性函数。设正整数 n，f(n)=m，若存在另一个正整数 p 使得 f(p)=f(n)=m，则称正整数 n 为友谊数，反之则称 n 为孤独数。利用这一引理以及由此得出的 δ(n)的一般计算公式，本文用初等方法讨论了素因子个数为 1 和 2 的数是孤独数还是友谊数的判定，不定方程 f(x)=nf(y)解的构造方法，讨论了 f(n)函数值的有界性并初步探究其分布，估计了友谊数在正整数集中的密率。

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：倪丹　　　　　　　　　　指导老师：戴中元

2019 年 **9** 月 **14** 日