

ASDAN (美式) 数学竞赛 2017

数值估计赛

比赛介绍

本轮需要团队在 60 分钟内合作完成 8 道简答题。本轮题目需要选手运用数学技能以及基本常识, 尽可能准确的估计出一系列在现实中存在的数值。

答题规范 & 评分系统

每个问题的答案都是一个接近命题组正确答案的正整数。对于每道题目, 各团队需提交一个正整数, 答案需以最简形式 (例如: 123456789) 或科学记数形式 (例如: 1.23456789×10^8) 提交。

假设该题题号为 k , 命题组给出的答案为 z_k 。如果团队没有作答 (答案区域为空白), 则该题为 0 分。如果该团队提交的答案为 x_k , 那么该团队本题的得分为

$$S_k = \max\left(0, 1 - \left\lceil \frac{\log_{10} |x_k/z_k|}{5} \right\rceil\right)$$

得分区间是 $[0, 1]$ 。如果团队估算值与命题组的正确答案最多只差了一个数量级, 那么该团队获得较高的分数 (至少 0.8 分)。

一个团队在数值估算赛中的总分 S 将用于排名, 是对该团队每个问题的得分进行累加:

$$S = \sum_{k=1}^8 S_k$$

验证

在整场考试中, 每个团队最多有 3 次机会, 提供某个问题的答案区间, 并询问命题组成员正确答案 z_k 是否包含在该区间内。(这并不意味着每道题有三次机会, 而是整场考试共有三次机会。)

数值估计赛例题

以下呈现的题目形式和比赛时的题目类似, 同时也可以学习一下解题思路。

- 题目: 将人放平, 且下一个人的头紧接着上一个人的脚, 那么需要多少人可以绕赤道一圈? 假设每个人都是一般中国成年男性的身高。
- 答案: 2.33×10^7 个人。根据 NASA 资料显示, 地球一圈大约 40075 km (https://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_phys_par), 并且 2016 年数据显示, 中国男性平均身高为 171.8 cm (<https://doi.org/10.7554/eLife.13410.001>)。
- 方法: 我们需要估计的值为 C/H ,
 - H 代表中国成年男性的平均身高
 - C 代表赤道的长度

我们可以分别估计这两个值, 最后得出最终值。(以下使用的是英制单位)

根据命题者的经验, 一般中国男性的身高, 在 5.5 – 6 英尺之间。所以取中间值, 我估计 H 是 5 英尺 9 英寸 (69 英寸)。

地球的周长估计起来有点棘。但其中一个方法是考虑飞机的飞行时间和飞行距离。因此我想出了以下数据:

- 从旧金山飞到芝加哥需要 4 小时。
- 飞机以每小时约 500 英里的速度飞行, 一英里内有 $(12 \text{英寸/英尺}) \times (5280 \text{英尺/英里}) = 63360$ 英寸。
- 旧金山和芝加哥有两个小时的时差, 全球一共有 24 个时区。(每个时区相差一个小时)

假设每个时区的长度相同, 旧金山和芝加哥之间的距离是两个时区, 我们对地球的周长 C 的估计是

$$(2 \text{小时/时区}) \times (500 \text{英里/小时}) \times (63360 \text{英寸/英里}) \times (24 \text{时区}) = 1.52 \times 10^9 \text{英寸}$$

因此我们对最终数值的估计是:

$$(1.52 \times 10^9 \text{英寸}) \times \left(\frac{1 \text{人}}{69 \text{英寸}} \right) \approx \boxed{2.2 \times 10^7 \text{人}}$$

- 得分: 我提交的答案得分为:

$$\max \left(0, 1 - \left| \frac{\log_{10} \left| (2.2 \times 10^7) / (2.33 \times 10^7) \right|}{5} \right| \right) = \max \left(0, 1 - \left| \frac{\log_{10}(0.944206009)}{5} \right| \right) = 0.995013352$$