

参赛队员姓名: 杨悦宁, 谢文远, 庄逸灵
中学: 杭州学军中学

省份: 浙江省

国家/地区: 中国

指导教师姓名: 黄晶, 邱为钢

论文题目: 约束三维刚体的滚动模式

论文题目：约束三维刚体的滚动模式

作者：杨悦宁，谢文远，庄逸灵

论文摘要：刚体的滚动可以分解为质心的平动和绕质心的转动。本文对四类有趣的物体滚动模式作了探究，一是保持质心（转轴）高度不变的正多边形对称性车轮滚动，二是把球面闭合曲线拓印在平面上的球体滚动，三是球锥在平面上的滚动，四是两个垂直镶嵌雪花片在平面上的滚动。滚动约束条件有两类，一是在刚体与地面接触点上，这点的坐标同时满足刚体和地面的形状方程；二是刚体上对应接触点的速度相对地面是零，即纯滚动模式。解析或者数值求解这些约束方程，得到质心的坐标依赖于转动角的参数方程，以及转动矩阵的表达式。用数学软件制作这些物体滚动的动画效果。

关键词：刚体；滚动；约束；对偶曲线；

目录:

1	序言.....	4
2	车轮和轨道.....	6
2.1	方轮之外.....	7
2.2	椭圆轮.....	10
2.3	星形轮.....	11
3	球的滚动.....	12
3.1	三维转动.....	12
3.2	拓印曲线.....	13
4	球锥的滚动.....	15
4.1	球锥的构成.....	15
4.2	球锥滚动的模拟.....	17
5	嵌合雪花片的滚动.....	18
5.1	几何描述.....	18
5.2	滚动描述与模拟.....	19
6	结束语.....	22
7	参考文献.....	23

附录:

1	正五边形车轮滚动模拟代码.....	24
2	球面拓印滚动模拟代码.....	27
3	球锥滚动模拟代码.....	28
4	镶嵌雪花片滚动模拟代码.....	31

论文正文：

1. 序言

运动学是经典物理的基石，滚动模式是运动学中最有趣的一个课题。圆形车轮和球体的滚动十分常见的，那么，是否存在其他有趣而值得研究的滚动呢？第一个是方轮在特定轨道上的滚动，众所周知，正方形车轮能在倒放的周期性悬链线轨道上纯滚动，且能保持轴心高度不变。值得进一步研究的是，车轮和轨道对应关系是唯一的吗？方轮轨道上，除了方轮，还有什么形状的车轮，也能保持轴心高度不变纯滚动。我们发现，这些车轮是有的，并给出了它们的形状曲线。



图[1] 方轮及轨道

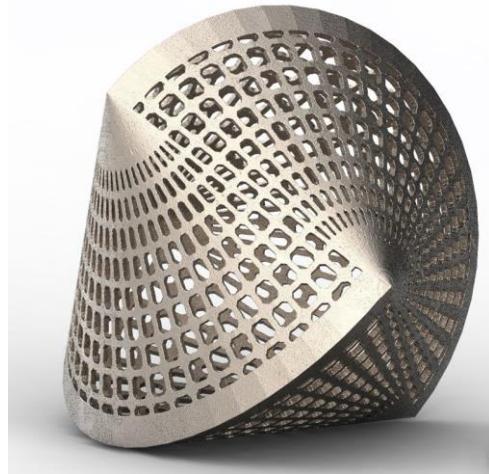
第二个是网球在平直地面上的滚动。网球表面有一个闭合的白色曲线，假定这条曲线上涂有颜料，我们想把这条曲线拓印在地面上，即在地面接触点上，球心到这个接触点的矢量始终垂直于地面。那么，地面上的这条拓印曲线是什么样子？它是闭合的还是不闭合的？这个网球是怎么滚动的？



图[2] 网球上的闭合曲线

第三个是球锥(sphericon) 在平直地面上的滚动。球锥是这样构成的，取两个截面是等腰直角三角形的圆锥体，底面吻合起来，这样截面是正方形。沿着这个

正方形竖直对角线截下，扭转 90 度，再吻合起来。这个奇怪的物体在地面上是如何滚起来的？



图[3] 球锥模型

第四个是嵌合的雪花片在平直地面上的滚动，嵌合雪花片如图[4]所示：



图[4] 嵌合雪花片

把这个玩具放在桌面上，轻轻一推，它就歪歪扭扭的滚起来。这种运动模式有很多物理问题，譬如质心高度是怎么变化的？质心的轨迹是什么？它与桌面的两个接触点的轨迹是什么？

这四种有趣物体滚动模式中还有一个共同点，都存在对偶曲线。车轮形状曲线和轨道曲线的对偶，球面闭合曲线和地面拓印曲线的对偶，这两个对偶是非对称的，即闭合曲线对偶无穷周期性曲线。后两个是对称的，即球锥边缘与地面接触点的两条轨迹，嵌合雪花片与地面接触点的两条轨迹。这四种物体的滚动模式是否可以用同一个简单的物理原理来阐释，对偶曲线是否可以解析或数值求解？

2， 车轮和轨道

原始人类发明的圆形车轮大大简化了运输东西的困难,值得研究的是有没有正方形的车轮?它在什么样的轨道上能平稳行驶,保持轴心高度不变?有大量的文献讨论了这个问题,不少科技馆中还有实物模型。我们继续脑洞大开,任意给出一个车轮形状曲线,给定轴心位置,是否存在一个统一的处理方法,把对应的轨道曲线求出来?轨道曲线给定了,反过来能求出来对应的车轮曲线吗?这个对应是唯一的吗?我们发现,这个统一处理方法是有的,对于给定的轨道曲线,对应的车轮曲线并不唯一,存在着多种车轮的可能性。

设起始时刻车轮质心(轴心)与地面参考系的原点重合,在此质心参考系中,车轮曲线坐标是 (x', y') ,在时刻 t ,质心向右正方向运动到 (x_c, y_c) ,同时车轮绕质心顺时针转动 θ 角度。那么在地面参考系中,车轮上一点的坐标是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1)$$

设在时刻 t , (x, y) 是车轮与轨道的接触点,即 (x, y) 满足轨道曲线方程 $F(x, y) = 0$,对应的质心参考系坐标 (x', y') 满足车轮曲线方程 $G(x', y') = 0$ 。纯滚动约束要求车轮上这点相对地面的速度为零,即

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_c/dt \\ dy_c/dt \end{pmatrix} + \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

平稳行驶要求车轮质心纵坐标 y_c 保持不变,所以(2)式第二行等式为

$$d\theta/dt (\cos \theta x' + \sin \theta y') = 0 \quad (3)$$

角速度一般不为零,(3)式有解:

$$\cos \theta x' + \sin \theta y' = 0 \quad (4)$$

我们猜测(4)式有以下的参数方程表达式

$$\begin{aligned} x' &= f(\theta) \sin \theta \\ y' &= -f(\theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式代入车轮曲线方程 $G(x', y') = 0$,就能确定 $f(\theta)$ 的形式。另外,(2)式中

的第一行可以化为

$$dx_c = d\theta (\sin \theta x' - \cos \theta y') \quad (6)$$

把(5)式代入(6)式，积分得到质心横坐标 x_c 与转动角 θ 的表达式：

$$x_c = \int_0^\theta f(\theta) d\theta = F(\theta) \quad (7)$$

通过(1)式，地面轨道上的接触点 (x, y) 能表达为转动角 θ 的参数方程形式

$$x = F(\theta), \quad y = -f(\theta) \quad (8)$$

(8)式就是地面轨道曲线的参数方程，它以形状函数 $f(\theta)$ 为联系，与车轮形状参数方程(5)式，形成一对耦合方程。

为了保准车轮在周期性轨道上能转 l 次，形状函数 $f(\theta)$ 必须是周期性函数，且满足

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi/l) \quad (9)$$

此时，车轮形状具有 l 重对称性，并称 $2\pi/l$ 为转动角的(最小正)周期。

2.1 方轮之外

首先研究最典型的方轮，设正方形边长为 2，起始位置一个顶点在最下面，那么方轮的其中一段曲线方程是 $x' - y' = \sqrt{2}$ ，代入(5)式，得到方轮形状函数是

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta + \sin \theta} \quad (10)$$

其中转动角参数为 $0 < \theta < \pi/2$ ，即方轮具有 4 重对称性。把(10)式代入到(8)式，计算得到轨道的参数方程是：

$$x = F(\theta) = \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{8} \right), \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{\cos \theta + \sin \theta} \quad (11)$$

消去参数 θ ，在直角坐标系中(11)式可以转化为双曲余弦函数的形式，

$$y = -\cosh(x + a) \quad (12)$$

其中 $a = \ln \tan(\pi/8)$ 。当转动角超过 $\pi/2$ 时，轨道形状由(11)式周期延伸而成。

所以正方形车轮对应的是周期性双曲余弦函数轨道。

如果这个轨道还能对应其他车轮形状，那么这个车轮大小应该不一样。假定新车轮的轴心还是在水平线上平行移动，那么轨道必须竖直方向移动。把(11)式对应的轨道整体向下平移距离 c ，轨道曲线是：

$$x = F(\theta), y = -f(\theta) - c \quad (13)$$

平移后的新轨道参数方程(13)式中 θ 是参数角，而不是物理上的转动角。设新车轮的形状函数为 $g(\phi)$ ，这里的 ϕ 才是物理上的转动角。由[8]式，新轨道形状是

$$x = G(\phi) = \int_0^\phi g(\phi) d\phi, \quad y = -g(\phi) \quad (14)$$

一个周期轨道上，这两种表达式是完全一样的，所以

$$y = -g(\phi) = -f(\theta) - c \quad (15)$$

$$dx = g(\phi) d\phi = f(\theta) d\theta \quad (16)$$

由(15), (16)两式可以得到新的轨道上车轮转动角 ϕ 与旧轨道参数角 θ 的关系式

$$\phi = \int_0^\theta \frac{f(\theta)}{f(\theta) + c} d\theta \quad (17)$$

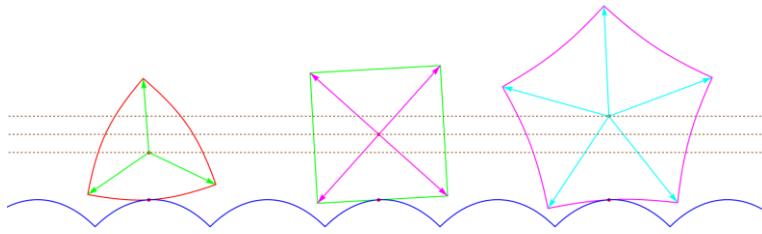
如果要求一个周期轨道上，对应参数角 $0 < \theta < \pi/2$ ，转动角 ϕ 转过 $2\pi/l$ ，即新的车轮具有 l 重对称性，那么轨道竖直平移距离 c_l 必须满足以下等式

$$\frac{2\pi}{l} = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\theta)}{f(\theta) + c_l} d\theta \quad (18)$$

虽然平移距离 c_l 可能有解析表达式，但是对于数学软件来说，解析解和数值解效果其实是一样的，有时数值解反而更方便用于画图和动画模拟，所以本文统一采用数值解。平移距离 c_l 数值解得到后，返代回到(17)式，仍旧以 θ 为参数，新轨道上 l 重对称性车轮的形状参数方程为

$$\begin{aligned} X_l &= (f(\theta) + c_l) \sin(\phi(\theta, c_l)) \\ Y_l &= -(f(\theta) + c_l) \cos(\phi(\theta, c_l)) \end{aligned} \quad (19)$$

对于(18)式, 数值求得 $c_3 = -0.276819$, $c_5 = 0.278219$ 。由数学软件, 得到同一个周期性双曲余弦函数轨道上可以平稳滚动的(3, 4, 5)重对称性车轮, 如图[5]所示:



图[5] 方轮轨道上的(3, 4, 5)重对称性车轮

接下来我们研究正五边形车轮, 设正五边形外接圆半径为1, 起始位置一个顶点在最下面, 那么五边形轮其中一段曲线方程是

$$\cos(3\pi/10)x' - \sin(3\pi/10)y' = \sin(3\pi/10) \quad (20)$$

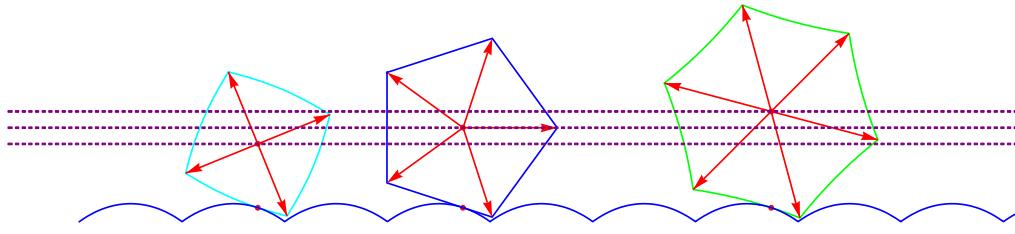
代入(5)式, 得到五边形轮形状函数是

$$f(\theta) = \frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(\theta + 3\pi/10)} \quad (21)$$

其中转动角参数为 $0 < \theta < 2\pi/5$, 即五边形轮具有 5 重对称性。把(21)式代入到(8)式, 计算得到轨道的参数方程是

$$x = \sin(3\pi/10) \left(\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{20} \right) - \ln \tan \left(\frac{3\pi}{20} \right) \right), y = -\frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(\theta + 3\pi/10)} \quad (22)$$

这个轨道同样也是周期性双曲余弦函数形。仿照以上方轮做法, 我们也找到了这个轨道上平稳行驶的 4 重和 6 重对称性车轮, 其中参数为 $c_4 = -0.172801$, $c_6 = 0.173070$ 。由附录中的程序, 得到正五边形车轮轨道上的(4, 5, 6)重对称性车轮为:



图[6] 正五边形车轮轨道上的(4, 5, 6)重对称性车轮

更多对称性的车轮和轨道可以仿照以上例子计算得到，不再详述。

2.2 椭圆轮

圆是椭圆的一个特殊类型，圆形车轮能在平直的地面上滚动，那么椭圆车轮能在什么样的轨道上平稳滚动？取椭圆的对称中心为轴心（质心），在质心参考系下，椭圆的方程是 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ，代入(5)式，计算得到形状函数为：

$$f(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (23)$$

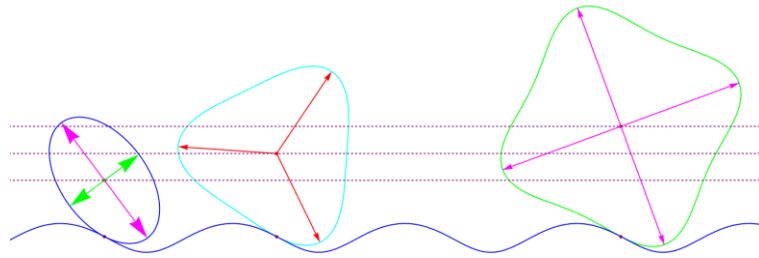
一个周期内的转动角参数取值是 $0 < \theta < \pi$ ，即椭圆车轮具有 2 重对称性。由(8)式，椭圆车轮轨道的参数方程是

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\theta \frac{ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ y &= -\frac{ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned} \quad (24)$$

我们取一个例子来说明椭圆车轮轨道上的多重对称性车轮是怎么得到的，取 $a=5$ 和 $b=3$ ，仿照以上处理方法，为了保准新的车轮具有 l 重对称性，轨道竖直平移距离 c_l 必须满足以下等式

$$\frac{2\pi}{l} = \int_0^\pi \frac{f(\theta)}{f(\theta) + c_l} d\theta \quad (25)$$

数值计算得到 $c_3 = 1.86495$ ， $c_4 = 3.74952$ 。由数学软件，得到椭圆车轮轨道上可以平稳滚动的(2, 3, 4)重对称性车轮，如图[7]所示：



图[7] 椭圆车轮轨道上的(2, 3, 4)重对称性车轮

2.3 星形轮

以上两种轨道都是光滑连续的，给一个折线段连起来的轨道，车轮形状是什么？取一个有趣的例子，即锯齿波函数，其中一段函数为

$$\begin{aligned}x - y - a &= 0, 0 < x < a \\x + y - a &= 0, a < x < 2a\end{aligned}\tag{26}$$

由(8)式，车轮形状函数满足

$$\begin{aligned}f(\theta) - F(\theta) - a &= 0, 0 < f < a \\f(\theta) + F(\theta) - a &= 0, a < f < 2a\end{aligned}\tag{27}$$

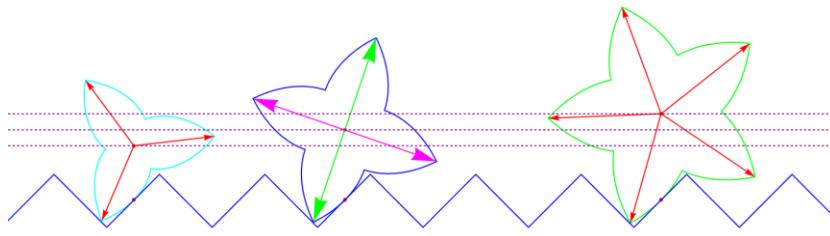
这个方程有以下形式的解

$$f(\theta) = \begin{cases} \exp(-\theta), & 0 < \theta < \pi/4 \\ \exp(-(\pi/2 - \theta)), & \pi/4 < \theta < \pi/2 \end{cases}\tag{28}$$

其中 $a = \exp(-\pi/4)$ 。一个周期内的转动角是 $0 < \theta < \pi/2$ ，数学软件画出来的车轮形状是星形，且具有4重对称性。仿照以上处理方法，为了保证新的车轮具有 l 重对称性，轨道竖直平移距离 c_l 必须满足以下等式

$$\frac{2\pi}{l} = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\theta)}{f(\theta) + c_l} d\theta\tag{29}$$

数值计算得到 $c_3 = -0.161796$, $c_4 = 0.166234$ 。由数学软件，得到星形车轮轨道上可以平稳滚动的(3, 4, 5)重对称性车轮，如图[8]所示：



图[8] 星形车轮轨道上(3, 4, 5)重对称性车轮

利用本小节的方法，可以设计更多有趣的车轮和轨道，为科普频道所用，激发广大学生对于物理的兴趣。

3, 球的滚动

星球大战中球形机器人 sphero BB8 的滚动非常滑稽，从物理角度看，球形的滚动是相对最稳定的，也是最容易改变方向的。在打网球休息过程中，我们无意发现网球的一种滚动也是非常有趣的。网球的表面有一条白色的闭合曲线，将网球在平直地面滚动起来，使得球面上这段白线始终紧贴在地面上，这个操作非常类似与中国传统文化中的拓印。从物理模型角度看，就是要求球心与曲线的连线，在地面接触点上，始终垂直于地面。那么，这个网球是怎么滚动的？地面上的拓印曲线是什么形状？还是闭合的吗？举一个最简单的例子，球面上的闭合曲线就是大圆，很显然，地面上对应的拓印曲线就是长度为大圆周长线段的周期延伸，即一条直线。

由于球的滚动是三维滚动，这需要我们先简要推导两类三维转动矩阵的表达式。

3.1, 三维转动

第一类三维转动操作是绕着单位方向 $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 转动 ϕ 角度，使得坐标为 $\vec{r} = (x, y, z)$ 的点转到 $\vec{r}' = (x', y', z')$ 所在的位置。从线性变换的角度看，存在一个 3 乘 3 的矩阵，把 $\vec{r} = (x, y, z)$ 变换到 $\vec{r}' = (x', y', z')$ 。那么这个矩阵的具体形式是什么样的呢？在转动过程中， \vec{r} 沿单位方向 \vec{n} 的分量 $(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}$ 是不变的，变化的是垂直单位方向 \vec{n} 的分量 $\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}$ 。垂直单位方向 \vec{n} 的平面上，再与 $\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}$ 垂直

的矢量是 $\vec{n} \times (\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}) = \vec{n} \times \vec{r}$ 。所以转动后的矢量为：

$$\vec{r}' = (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + \cos \phi (\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}) + \sin \phi (\vec{n} \times \vec{r}) \quad (30)$$

(30)式可以写成矩阵形式，幸好数学软件 Mathematica 有这个内置转动矩阵函数，可以方便随时调用。

第二类转动操作是从单位方向 \vec{u} 转动到 \vec{v} ，设垂直 uv 平面的单位方向是 \vec{m} ，取三个相互垂直单位方向为 \vec{m} ， \vec{u} 和 $\vec{m} \times \vec{u}$ 。设矢量 \vec{r} 在这三个方向上可以分解为

$$\vec{r} = \alpha \vec{m} + \beta \vec{u} + \gamma \vec{m} \times \vec{u} \quad (31)$$

其中 $\alpha = \vec{r} \cdot \vec{m}$ ， $\beta = \vec{r} \cdot \vec{u}$ ， $\gamma = \vec{r} \cdot (\vec{m} \times \vec{u})$ ，那么经过转动后的矢量为

$$\vec{r}' = (\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{m} + (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{r} \cdot (\vec{m} \times \vec{u}))\vec{m} \times \vec{u} \quad (32)$$

理论上我们可以具体写出这个三维转动矩阵，但表达很麻烦。数学软件 Mathematica 中也有这个内置转动矩阵函数，可以方便随时调用。

3.2 拓印曲线

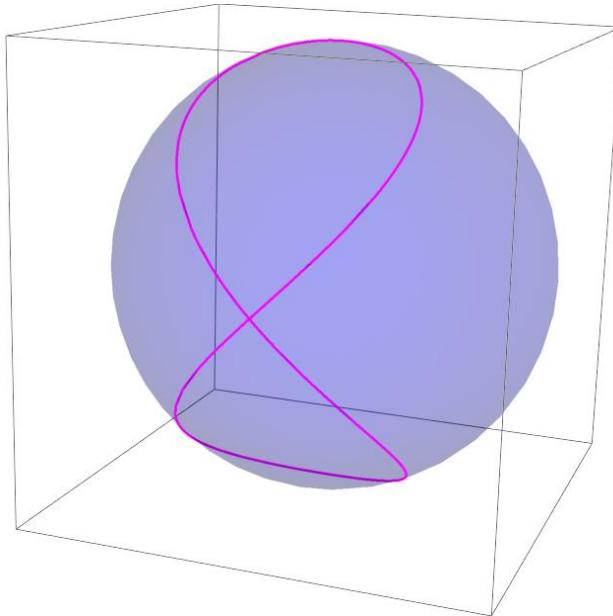
设球面上闭合曲线的参数形式是 $\overline{r(s)} = (x(s), y(s), z(s))$ ，其中 s 是弧长参数。这个曲线的切向矢量是 $\overline{p(s)} = (dx/ds, dy/ds, dz/ds)$ 。设球半径为 1，起始时刻球心在原点。球面曲线和拓印曲线的弧长参数是一样的，设地面上的拓印曲线的参数形式是 $\overline{m(s)} = (a(s), b(s), -1)$ ，切向量是 $\overline{q(s)} = (da/ds, db/ds, 0)$ 。设从 $\overline{r(s)}$ 转到 $\overline{r(0)}$ 的三维转动矩阵是 $R(\overline{r(s)}, \overline{r(0)})$ ，那么这个转动操作使得转动后的 $\overline{r(s)}$ 垂直于地面，且使得球面曲线的切向量 $\overline{p(s)}$ 变为地面拓印曲线的切向量 $\overline{q(s)}$ ，即

$$\begin{pmatrix} da/ds \\ db/ds \\ 0 \end{pmatrix} = R(\overline{r(s)}, \overline{r(0)}) \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{pmatrix} \quad (33)$$

解析或者数值求解以上方程，就能得到地面拓印曲线的表达式。球的滚动就能这样描述，球心（质心）先平移到拓印曲线的正上方，然后从 $\overline{r(s)}$ 转到 $\overline{r(0)}$ 。举一个容易算的例子，设球面闭合曲线的参数形式是：

$$\overline{r(\phi)} = \left(\sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \frac{\sin \phi}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\cos \phi}{2} \right) \quad (34)$$

其中参数 ϕ 的取值范围是 $0 < \phi < 4\pi$ ，这个球面闭合曲线的形状是 8 字形曲线：



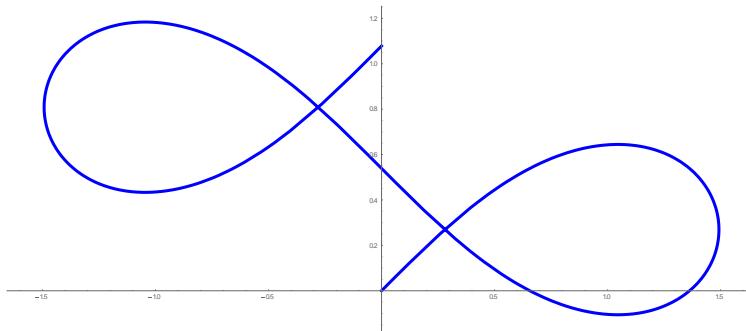
图[9] 球面上的闭合曲线

由(33)式，计算化简得到的拓印曲线的微分方程是：

$$\frac{da}{d\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) (5 - \cos \phi) \left(1 + \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{1/2} (3 + \cos \phi)^{-3/2} \quad (35)$$

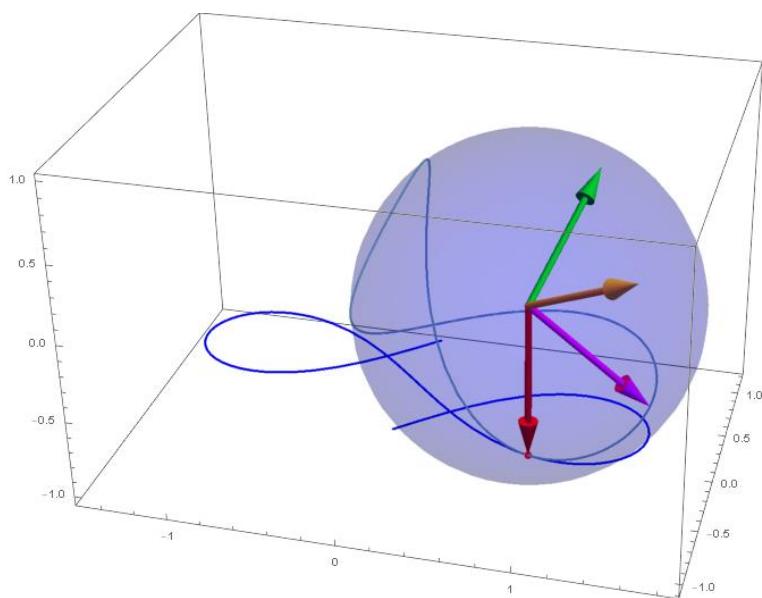
$$\frac{db}{d\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 3 \cos \phi) \left(1 + \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{1/2} (3 + \cos \phi)^{-3/2} \quad (36)$$

数值求解(34)和(35)式，就能得到地面上拓印曲线的形状，设起始时刻 8 字形曲线的交点与地面重合，那么地面上的拓印曲线如图[9]所示：



图[9] 地面上的拓印曲线的一个周期

由图[9]可以看出，拓印曲线并不闭合。由附录中的数学软件程序，得到三维滚动动画模拟的一个片段是：



图[10] 网球滚动模拟

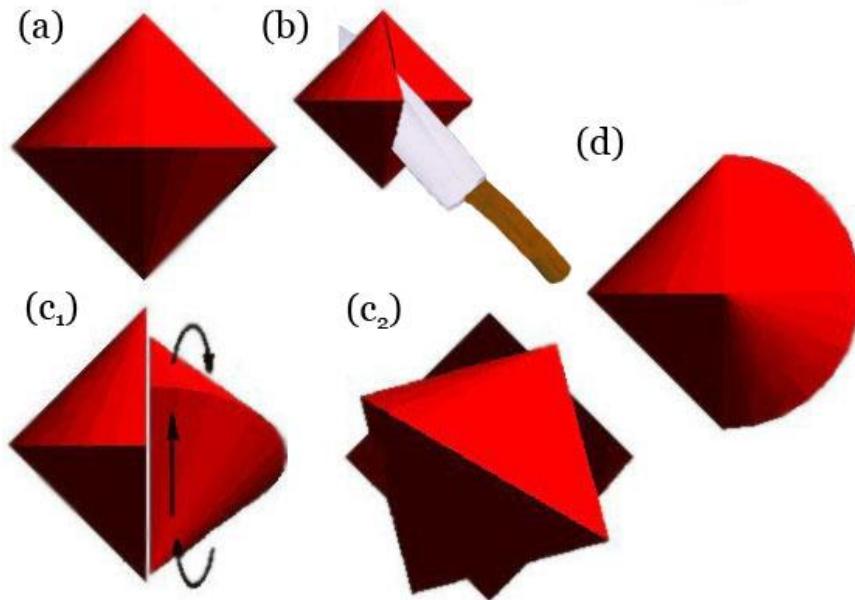
动画模拟和程序请看附件。

4 球锥的滚动

正多边形对称性车轮与轨道以及球体与地面接触点只有一个。那么，有没有接触区域是一条线段的物体滚动呢？一个简单且典型的例子就是圆锥体，圆锥体在地面滚动时，接触区域就是一条线段，即母线。如果是纯滚动，圆锥顶点是不动的，那么圆锥的滚动就是定点转动。三维定点转动总是可以分解为绕不同转轴转动的叠加。圆锥的滚动文献上已有研究，本文不再研究，转而研究圆锥体组合而成的球锥体在地面上的滚动。

4.1 球锥的构成

球锥是这样构成的，取两个截面是等腰直角三角形的圆锥体，底面吻合起来，这样截面是正方形。沿着这个正方形竖直对角线截一下，扭转 90 度，再吻合起来，就得到球锥，如下图所示：

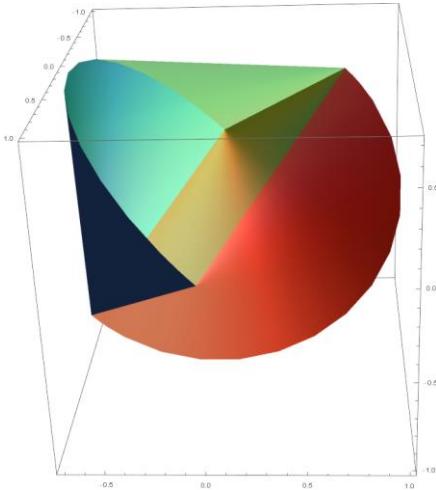


图[11] 球锥的构成

数学软件如何画这个球锥呢？球锥表面由 4 个半圆锥面组合而成，设其中一个圆锥（面）的顶点坐标是 \vec{r}_0 ，从这个顶点指向所对底面圆心的单位方向是 \vec{n} ，底面圆上垂直于 \vec{n} 方向且相互垂直的两个单位方向是 \vec{p} 和 \vec{q} ，那么这个半圆锥面的参数方程是：

$$\overrightarrow{r(h, \phi)} = \vec{r}_0 + h\vec{n} + h \cos \phi \vec{p} + h \sin \phi \vec{q} \quad (37)$$

其中角度参数取值范围是 $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ 。取圆锥的顶点在一个正方形的四个顶点上，把四个半圆锥表面拼起来，得到的静止球锥是这样的：



图[12] 静止的球锥

4.2 球锥滚动的模拟

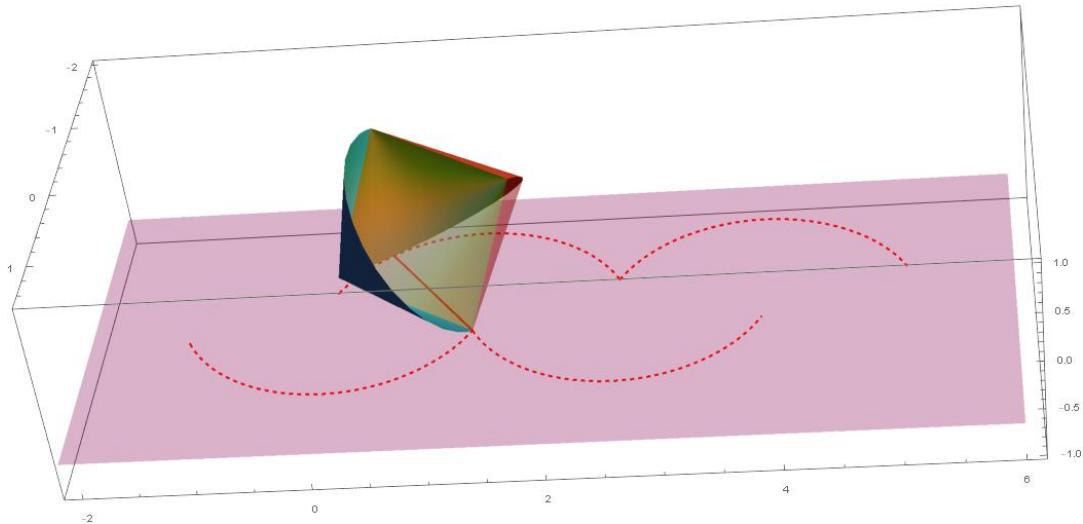
因为球锥的表面是由四个半圆锥组合起来的, 所以球锥的滚动可以看作四个圆锥滚动的组合。圆锥的滚动, 可以分解为这样两个转动的叠加, 圆锥顶点固定, 首先是绕竖直 z 轴的公转, 转过 ϕ 角度, 然后绕圆锥新的对称轴方向自转 φ 角度。如果要求纯滚动, 即在地面的接触线上, 圆锥上的点相对地面速度为零, 即总角速度沿着接触线方向, 这样公转角 ϕ 和自转角 φ 必须满足一定关系。总角速度是公转角速度和自转加速度的矢量叠加:

$$\vec{\Omega} = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_z - \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} \quad (38)$$

这个总角速度在竖直方向的分量为零, 即

$$0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z = \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} (\vec{n} \cdot \vec{e}_z) \quad (39)$$

对于球锥来说, $\vec{n} \cdot \vec{e}_z = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, 所以 $\varphi = \sqrt{2}\phi$, 即作纯滚动时, 自转角是公转角的根号二倍。这样, 利用数学软件内置的三维转动矩阵, 可以得到球锥在地面上滚动的动画模拟, 其中一个片断是:



图[13] 地面上滚动的球锥

虽然球锥的滚动理论上描述非常简单，但是要用数学软件编程模拟，要考虑到很多细节，如分段滚动、顶点的变化、转轴方向的变化、角度的变化等。具体代码请看附录。

5，嵌合雪花片的滚动

组合圆锥有奇怪的滚动行为，那么组合圆环或圆盘有没有这样的滚动模式？在常见的儿童玩具有有这样的例子，雪花片一般有8个缺口，缺口之间正好能相互嵌合。嵌合的雪花片能在地面上扭摆地滚动起来。那么，如何从运动学的角度来解释这种滚动行为？它的质心轨迹是什么？它与地面两个接触点的轨迹是什么？从模型角度看，就是两个一样的圆盘，垂直相交，主要参数是圆盘的半径和圆心距。我们要研究这个约束刚体-嵌合圆盘-在地面上纯滚动的模式。

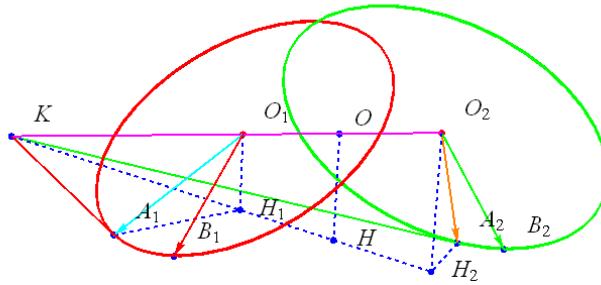
5.1 几何描述

如图[14]所示， O_1 、 O_2 是两个圆的圆心， O 是体系的质心，位于线段 O_1O_2 的中点。 A_1 、 A_2 是两个圆与地面的接触点，在点 A_1 、 A_2 处两个圆的切线和 O_2O_1 的延长线交于地面同一点 K 。 B_1 、 B_2 是两个圆上的固定点，起始时刻与地面接触。 H_1 、 H 、 H_2 分别是 O_1 、 O 、 O_2 在地面上的投影（垂足）。

设 $\angle O_1KA_1 = \angle A_1O_1B_1 = \theta_1$ ， $\angle O_2KA_2 = \angle A_2O_2B_2 = \theta_2$ ， θ_1 、 θ_2 是两个圆的角度参数，

$\angle OKH = \beta$ 。于是 $O_1K \sin \theta_1 = O_1A_1$, $O_2K \sin \theta_2 = O_2A_2$. 设两个圆的半径为单位 1,

圆心距 $O_1O_2 = k$, 由 $O_2K - O_1K = O_1O_2$ 得到



图[14] 嵌合圆盘的几何描述

$$\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} = k \quad (40)$$

由立体几何知识可知

$$\tan \beta = \frac{\tan \theta_1 \tan \theta_2}{\sqrt{\tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2}} \quad (41)$$

由图[14]可知 $OH = OK \sin \beta$, $2OK = O_1K + O_2K$ 。由 (40)、(41) 两式计算得到嵌合圆盘质心的纵坐标 $z_c = OH$ 为

$$z_c = \left(\frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{k}{2} \right) \sin \beta = \frac{1 + \frac{k}{2} \sin \theta_1}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2 \theta_1 + 2k \sin \theta_1 + 2}} \quad (42)$$

此时如果对上式两边对 θ_1 求导, 得到

$$\frac{dz_c}{d\theta_1} = -\frac{(k^2 - 2) \cos \theta_1 \sin \theta_1}{2(2 + 2k \sin \theta_1 + (k^2 - 1) \sin^2 \theta_1)^{3/2}} \quad (43)$$

可以看出, 当圆心距 $k = \sqrt{2}$ 时, 嵌合圆盘滚动时质心高度会保持 $\sqrt{2}/2$ 不变。

接下来我们求圆盘 1 所在平面与竖直平面的夹角 δ 的余弦。设 $\overline{O_1B_1}$ 延长线交

于地面一点 F ，从 O_1 作一条垂直于 O_1O_2 的线交地面与 G 。那么 $O_1G = O_1K \tan \beta$ ，

$O_1F = O_1K \tan \theta_1$ ， O_1GF 是一个直角三角形，且 $\delta = \angle GO_1F$

$$\cos \delta = \frac{O_1G}{O_1F} = \frac{\tan \beta}{\tan \theta_1} = \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{(k^2 - 2) \sin^2 \theta_1 + 2k \sin \theta_1 + 2}} \quad (44)$$

5.2 滚动描述与模拟

设起始时刻圆心的连线 O_1O_2 与地面平行，并以此为 x 轴方向，垂直地面向上为 z 轴方向，与 x 轴和 z 轴都垂直的方向定为 y 轴方向。而绕质心 O 的转动可以分解为三个连续转动：第一个转动是绕 z 轴转动 ϕ 角度，这时 $Oxyz$ 转化为 $Ox'y'z'$ ；第二个转动是绕 y' 轴转动 $-\beta$ 角度，这时 $Ox'y'z'$ 转化为 $Ox''y''z''$ ；第三个转动是绕 x'' 轴转动 $-\psi$ 角度；设 $R(\bar{n}, \varphi)$ 表示绕 \bar{n} （单位矢量）方向转动 φ 角度的转动矩阵，质心系坐标系为 \vec{r}' 的一点在体系滚动后相对地面的坐标系的位矢是

$$\vec{r} = \vec{r}_c + R(\vec{i}'', -\psi)R(\vec{j}', -\beta)R(\vec{k}, \phi)\vec{r}' \quad (45)$$

其中

$$\vec{k} = (0, 0, 1), \vec{j} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (46)$$

$$\vec{i}'' = (\cos \beta \cos \phi, \cos \beta \sin \phi, \sin \beta) \quad (47)$$

由图[14]可以看出， A_1 点相对 O 点的矢量为 $\overline{OO_1} + \overline{O_1A_1}$ ， $\overline{O_1A_1}$ 可以沿着两个正交方向 $\overline{O_1B_1}$ 和 $\overline{O_1K}$ 分解，由此计算得到 A_1 、 A_2 在质心系中坐标分别为

$$\vec{r}'_1 = (-k/2 - \sin \theta_p, -\cos \theta_p / \sqrt{2}, -\cos \theta_p / \sqrt{2}) \quad (48)$$

$$\vec{r}'_2 = (-k/2 - \sin \theta_2, \cos \theta_2 / \sqrt{2}, -\cos \theta_2 / \sqrt{2}) \quad (49)$$

体系滚动后 A_1 、 A_2 与地面接触，即相对地面坐标的第三分量始终为零，计算得到 ψ 角度满足的条件为

$$\cos(\psi + \pi/4) = \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{(k^2 - 2) \sin^2 \theta_1 + 2k \sin \theta_1 + 2}} \quad (50)$$

这个结果与立体几何计算得到的结果(44)式一致。

再看体系绕质心转动的角速度，总角速度是三个转动角速度的矢量和

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \vec{k} - \frac{d\beta}{dt} \vec{j} - \frac{d\varphi}{dt} \vec{i} \quad (51)$$

体系作纯滚动的必要条件是 A_1 、 A_2 相对地面的速度为零，即

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_c) = 0 \quad (52)$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_c) = 0 \quad (53)$$

式(52)减去式(53)后得到

$$\vec{\omega} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0 \quad (54)$$

式(54)意味着角速度与 $A_1 A_2$ 连线平行，或角速度的第三分量为零，由式(51)计算得到公转角 ϕ 与自转角 ψ 的关系式

$$d\phi = \sin \beta d\psi \quad (55)$$

以及角速度的表达式

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\beta}{dt} \sin \phi - \frac{d\psi}{dt} \cos \beta \cos \phi, -\frac{d\beta}{dt} \cos \phi - \frac{d\psi}{dt} \cos \beta \sin \phi, 0 \right) \quad (56)$$

由图[14]可以看到，在地面固定坐标系中， \vec{r}_1 (A_1 点位移) 减去 (O 点位移) 为

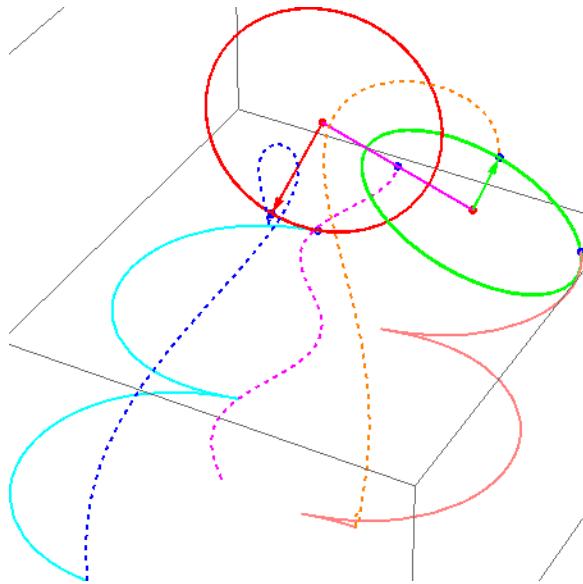
$$\vec{r}_1 - \vec{r}_c = (x_1 - x_c, y_1 - y_c, -z_c) \quad (57)$$

把式(56)和式(57)代入式(52)，计算得到

$$\begin{aligned} dx_c &= -z_c (\cos \beta \sin \phi d\psi + \cos \phi d\beta) \\ dy_c &= z_c (\cos \beta \cos \phi d\psi - \sin \phi d\beta) \end{aligned} \quad (58)$$

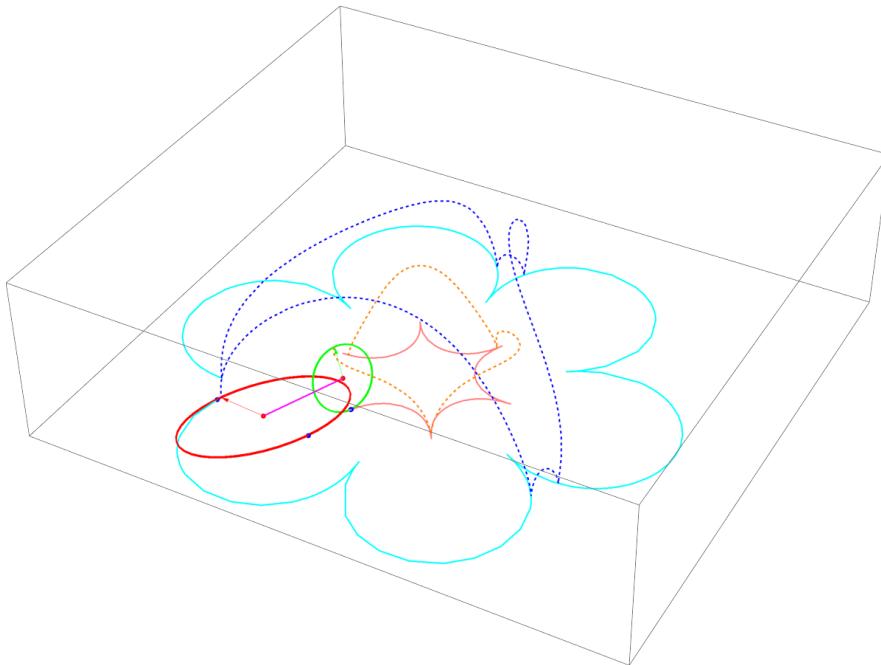
数值求解微分方程组(58), (42), (41), (50)就能得到质心坐标 x_c 、 y_c 、 z_c ，

转动角度 ϕ 、 β 、 ψ 与参数角 θ_1 或 θ_2 的关系式，进而画出体系与地面接触点形成的轨迹以及滚动动画模拟。当圆心距等于圆盘半径的根号2倍时，即质心高度保持不变，嵌合圆盘滚动模拟如下：



图[15] 质心高度不变嵌合圆盘的滚动模拟

我们还发现，当两个圆盘大小不一时，圆心距取合适的长度，嵌合圆盘能做周期对称性运动，三重对称性的嵌合圆盘的滚动模拟如图[16]所示：



图[16] 大小不同嵌合圆盘的滚动模拟

6, 结束语

约束刚体的纯滚动是运动学中非常有趣的一个课题，我们选了四个日常生活中或者科技馆中的物体做了研究，嵌合雪花片在地面的滚动，网球的拓印滚动，球锥在地面上的滚动，以及多重对称性车轮的滚动。给出了它们纯滚动的约束条件并求解，并用数学软件编程，得到了这些模型滚动的动画模拟代码。这些漂亮的轨迹和神奇的动画，能让我们感受到物理的奇妙，激发我们学习物理的动力。

参考文献：

- [1] 李增智(译). 方轮 [J]. 大学物理, 1996, 15 (4) :15-18
- [2] Nelson.H.Klein. Square Wheel[J]. Am.J.Phys, 1993,61(10): 893-896
- [3] Leon Hall, Stan Wagon. Roads and Wheels[J]. Mathematics Magazine, 1992 , 65(5):283-301
- [4] Eduardo de Campos Valadares. Periodic roads and quantized wheels[J]. Am.J.Phys, 2016, 84(8): 581-587
- [5] <http://sphericon.pjroberts.com/>
- [6] <http://web.calstatela.edu/curvebank/sphericon/sphericon.htm>

附录：

1. 正五边形车轮滚动模拟代码

```

HH[x_,n_]:=(Pi/n)*TriangleWave[{0,1},n*x/(2Pi)-1/4];
t5=3Pi/10;
f1[s_]:=Sin[t5]/Sin[HH[s,5]+t5];
xc1=y/.First[NDSolve[{y'[t]==f1[t],y[0]==0},y,{t,0,8Pi}]];
aa=xc1[2Pi/5];
x1[t_]:=f1[t]Sin[t];
y1[t_]:=-f1[t]Cos[t];
x2[t_,tt_]:=xc1[t]+Cos[t] x1[tt]+Sin[t]y1[tt]+2aa;
y2[t_,tt_]:=-Sin[t] x1[tt]+Cos[t]y1[tt];
LLs[c_?NumericQ]:=Module[{AA,BB,T,s},AA=First[NDSolve[{T'[s]==
f1[s]/(f1[s]+c), T[0]==0}, T, {s, 0, 2Pi/5}]];BB=AA[[1,2]];BB[2Pi/5];
g4=cc/.FindRoot[LLs[cc]==2Pi/4,{cc,-0.17}];
g6=cc/.FindRoot[LLs[cc]==2Pi/6,{cc,0.18}];
B44=xx2/.First[NDSolve[{xx2'[t]==(f1[t])/(f1[t]+g4),xx2[0]==0},xx2,{t,0,8Pi}]];
rr5[t_]:={f1[t]Sin[t],-f1[t]Cos[t]};
rc4[t_]:={xc1[t],g4};
rr4[t_]:={(f1[t]+g4)Sin[B44[t]],-(f1[t]+g4)Cos[B44[t]]};
rc5[t_]:={xc1[t]+2aa,0};
r55[tt_,t_]:=rc5[tt]+RotationMatrix[-tt].rr5[t];
r44[tt_,t_]:=rc4[tt]+RotationMatrix[-B44[tt]].rr4[t];
GG40[tt_]:=ParametricPlot[rc4[tt]+RotationMatrix[-B44[tt]].rr4[t],{t,0,8Pi/5},PlotStyle->{Cyan,Thick}];
GG41[t_]:=Graphics[{Red,Thick,Arrowheads[Large],Arrow[{rc4[t],r44[t,0]},rc4[t],r44[t,2Pi/5],{rc4[t],r44[t,4Pi/5]},{rc4[t],r44[t,6Pi/5]}]}];
B66=xx2/.First[NDSolve[{xx2'[t]==(f1[t])/(f1[t]+g6),xx2[0]==0},xx2,{t,0,8Pi}]];
rr6[t_]:={(f1[t]+g6)Sin[B66[t]],-(f1[t]+g6)Cos[B66[t]]};
rc6[t_]:={xc1[t]+5aa,g6};
r66[tt_,t_]:=rc6[tt]+RotationMatrix[-B66[tt]].rr6[t];
GG60[tt_]:=ParametricPlot[rc6[tt]+RotationMatrix[-B66[tt]].rr6[t],{t,0,12Pi/5},PlotStyle->{Green,Thick}];
GG61[t_]:=Graphics[{Red,Thick,Arrowheads[Large],Arrow[{rc6[t],r66[t,0]},rc6[t],r66[t,2Pi/5],{rc6[t],r66[t,4Pi/5]},{rc6[t],r66[t,6Pi/5]},{rc6[t],r66[t,8Pi/5]},{rc6[t],r66[t,10Pi/5]}]}];
JJ11=Graphics[{Thick,Purple,Dashed,Line[{{-0.75,0},{12.2,0}}}];
JJ10=ParametricPlot[{xc1[t],-f1[t]},{t,0,4Pi},PlotStyle->{Thick,Blue}];
JJ12=Graphics[{Thick,Purple,Dashed,Line[{{-0.75,g4},{12.2,g4}}]}];
JJ13=Graphics[{Thick,Purple,Dashed,Line[{{-0.75,g6},{12.2,g6}}]}];
GG2[t_]:=Graphics[{PointSize[Large],Red,Point[{r55[t,t],r44[t,t],r66[t,t]}]}];
GG3[t_]:=Graphics[{PointSize[Large],Red,Point[{xc1[t]+2aa,0},{xc1[t],g4},{xc1[t]+5aa,g6}]}];
GG50[tt_]:=ParametricPlot[rc5[tt]+RotationMatrix[-tt].rr5[t],{t,0,10Pi/5},PlotStyle->

```

```

{Blue,Thick}];

GG51[t_]:=Graphics[{{Red,Thick,Arrowheads[Large],Arrow[{{rc5[t],r55[t,0]},{rc5[t],
,r55[t,2Pi/5]},{rc5[t],r55[t,4Pi/5]},{rc5[t],r55[t,6Pi/5]},{rc5[t],r55[t,8Pi/5]}}]}};

AA2[t_]:=Show[GG3[t],GG2[t],GG40[t],GG41[t],GG50[t],GG51[t],GG60[t],GG
61[t],JJ11,JJ10,JJ12,JJ13,PlotRange→{{-1,10},{-1.2,1.5}},Axes→False];

Manipulate[AA2[t],{t,0,Pi}]

```

2.椭圆车轮滚动模拟代码

```

HH[x_,n_]:=(Pi/n)*TriangleWave[{0,1},n*x/(2Pi)-1/4];
a=3;
b=5;
xe1[t_]:=a*b*Sin[t]/Sqrt[a^2 Cos[t]^2+b^2 Sin[t]^2];
ye1[t_]:=a*b*Cos[t]/Sqrt[a^2 Cos[t]^2+b^2 Sin[t]^2];
xec=xx2/.First[NDSolve[{xx2'[t]==a*b/Sqrt[a^2 Cos[t]^2+b^2
Sin[t]^2],xx2[0]==0},xx2,{t,0,8Pi}]];
aae=xec[Pi];
xe2[t_]:=xec[t]+Cos[t]xe1[t]+Sin[t] ye1[t];
ye2[t_]:=-Sin[t]xe1[t]+Cos[t] ye1[t];
JJ000=ParametricPlot[{xe2[t],ye2[t]},{t,0,5Pi},PlotStyle→{Blue,Thick}];

fe1[t_]:=a*b/Sqrt[a^2 Cos[t]^2+b^2 Sin[t]^2];
LLe[c_?NumericQ]:=Module[{AA,BB,T,s},AA=First[NDSolve[{T'[s]==
fe1[s]/(fe1[s]+c), T[0]==0}, T, {s, 0, Pi}]];BB=AA[[1,2]];BB[Pi]];
h3=cc/.FindRoot[LLe[cc]==2Pi/3,{cc,2.0}];
h4=cc/.FindRoot[LLe[cc]==2Pi/4,{cc,3.7}];
Be3=xx2/.First[NDSolve[{xx2'[t]==(fe1[t])/(fe1[t]+h3),xx2[0]==0},xx2,{t,0,8Pi}]];
Be4=xx2/.First[NDSolve[{xx2'[t]==(fe1[t])/(fe1[t]+h4),xx2[0]==0},xx2,{t,0,8Pi}]];
rre3[t_]:={(fe1[t]+h3)Sin[Be3[t]],-(fe1[t]+h3)Cos[Be3[t]]};
rec3[t_]:= {xec[t]+aae,h3};
re33[tt_,t_]:=rec3[tt]+RotationMatrix[-Be3[tt]].rre3[t];
FF30[tt_]:=ParametricPlot[rec3[tt]+RotationMatrix[-Be3[tt]].rre3[t],{t,0,3Pi},PlotStyl
e→{Cyan,Thick}];

FF31[t_]:=Graphics[{{Red,Thick,Arrowheads[Large],Arrow[{{rec3[t],re33[t,0]},{rec
3[t],re33[t,Pi]},{rec3[t],re33[t,2Pi]}}]}];

rre4[t_]:={(fe1[t]+h4)Sin[Be4[t]],-(fe1[t]+h4)Cos[Be4[t]]};
rec4[t_]:= {xec[t]+3aae,h4};
re44[tt_,t_]:=rec4[tt]+RotationMatrix[-Be4[tt]].rre4[t];
FF40[tt_]:=ParametricPlot[rec4[tt]+RotationMatrix[-Be4[tt]].rre4[t],{t,0,4Pi},PlotStyl
e→{Green,Thick}];

FF41[t_]:=Graphics[{{Magenta,Thick,Arrowheads[Large],Arrow[{{rec4[t],re44[t,0]},{
rec4[t],re44[t,Pi]},{rec4[t],re44[t,2Pi]},{rec4[t],re44[t,3Pi]}}]}];

JJ01=ParametricPlot[{t,0},{t,-3.2,60},PlotStyle→{Purple,Thick,Dashed}];
JJ02=ParametricPlot[{t,h3},{t,-3.2,60},PlotStyle→{Purple,Thick,Dashed}];
JJ03=ParametricPlot[{t,h4},{t,-3.2,60},PlotStyle→{Purple,Thick,Dashed}];

xe3[t_,t1_]:=xec[t]+Cos[t]xe1[t1]+Sin[t] ye1[t1];

```

```

ye3[t_,t1_]:=Sin[t]xe1[t1]+Cos[t] ye1[t1];
FF0[t_]:=Graphics[PointSize[Large],Red,Point[{{xec[t],0},{xec[t]+aae,h3},{xec[t]+3aae,h4}}]];
FF1[t_]:=Graphics[PointSize[Large],Red,Point[{{xe2[t],ye2[t]},re33[t,t],re44[t,t]}]];
FF2[t_]:=ParametricPlot[{xe3[t,tt1],ye3[t,tt1]},{tt1,0,2Pi},PlotStyle->{Blue,Thick}];
FF3[t_]:=Graphics[Thick,Magenta,Arrowheads[{-0.03,0.03}],Arrow[{{xe3[t,0],ye3[t,0]},{xe3[t,Pi],ye3[t,Pi]}}]];
FF4[t_]:=Graphics[Thick,Green,Arrowheads[{-0.03,0.03}],Arrow[{{xe3[t,Pi/2],ye3[t,Pi/2]},{xe3[t,3Pi/2],ye3[t,3Pi/2]}}]];
FF10[t_]:=Show[FF0[t],FF1[t],FF2[t],FF3[t],FF4[t],FF30[t],FF31[t],FF40[t],FF41[t],JJ000,JJ01,JJ02,JJ03,PlotRange->{{-3.5,60},{-5.2,13.2}}];
Manipulate[FF10[t],{t,0,Pi}]

```

3.星形车轮模拟代码

```

HH[x_,n_]:=(Pi/n)*TriangleWave[{0,1},n*x/(2Pi)-1/4];
f1[s_]:=Exp[-HH[s,4]];
xc1=y/.First[NDSolve[{y'[t]==Exp[-HH[t,4]],y[0]==0},y,{t,0,8Pi}]];
aa=xc1[[Pi/2]];
x1[t_]:=Exp[-HH[t,4]]Sin[t];
y1[t_]:=-Exp[-HH[t,4]]Cos[t];
x2[t_,tt_]:=xc1[t]+Cos[t] x1[tt]+Sin[t]y1[tt]+2aa;
y2[t_,tt_]:=-Sin[t] x1[tt]+Cos[t]y1[tt];
LLs[c_?NumericQ]:=Module[{AA,BB,T,s},AA=First[NDSolve[{T'[s]==f1[s]/(f1[s]+c), T[0]==0},T,{s,0,Pi/2}]];BB=AA[[1,2]];BB[[Pi/2]];
g3=cc/.FindRoot[LLs[cc]==2Pi/3,{cc,-0.15}];
g5=cc/.FindRoot[LLs[cc]==2Pi/5,{cc,0.15}];
B33=xx2/.First[NDSolve[{xx2'[t]==(f1[t])/(f1[t]+g3),xx2[0]==0},xx2,{t,0,8Pi}]];
rr3[t_]:={(f1[t]+g3)Sin[B33[t]],-(f1[t]+g3)Cos[B33[t]]};
rc3[t_]:={xc1[t],g3};
r33[tt_,t_]:=rc3[tt]+RotationMatrix[-B33[tt]].rr3[t];
GG30[tt_]:=ParametricPlot[rc3[tt]+RotationMatrix[-B33[tt]].rr3[t],{t,0,3Pi/2},PlotStyle->{Cyan,Thick}];
GG31[t_]:=Graphics[Red,Thick,Arrowheads[Large],Arrow[{{rc3[t],r33[t,0]},{rc3[t],r33[t,Pi/2]},{rc3[t],r33[t,Pi]}}]];
B55=xx2/.First[NDSolve[{xx2'[t]==(f1[t])/(f1[t]+g5),xx2[0]==0},xx2,{t,0,8Pi}]];
rr5[t_]:={(f1[t]+g5)Sin[B55[t]],-(f1[t]+g5)Cos[B55[t]]};
rc5[t_]:={xc1[t]+5aa,g5};
r55[tt_,t_]:=rc5[tt]+RotationMatrix[-B55[tt]].rr5[t];
GG50[tt_]:=ParametricPlot[rc5[tt]+RotationMatrix[-B55[tt]].rr5[t],{t,0,5Pi/2},PlotStyle->{Green,Thick}];
GG51[t_]:=Graphics[Red,Thick,Arrowheads[Large],Arrow[{{rc5[t],r55[t,0]},{rc5[t],r55[t,Pi/2]},{rc5[t],r55[t,Pi]},{rc5[t],r55[t,3Pi/2]},{rc5[t],r55[t,2Pi]}}]];
JJ11=Graphics[{Thick,Purple,Dashed,Line[{{-0.75,0},{12.2,0}}}}];

```

```

JJ10=ParametricPlot[{xc1[t],-Exp[-HH[t,4]]},{t,0,4Pi},PlotStyle->{Thick,Blue}];
JJ12=Graphics[{Thick,Purple,Dashed,Line[{{-0.75,g3},{12.2,g3}}]}];
JJ13=Graphics[{Thick,Purple,Dashed,Line[{{-0.75,g5},{12.2,g5}}]}];
GG1[t_]:=ParametricPlot[{x2[t,t1],y2[t,t1]},{t1,0,2Pi},PlotStyle->{Blue,Thick}];
GG2[t_]:=Graphics[{PointSize[Large],Red,Point[{{x2[t,t],y2[t,t]},r33[t,t],r55[t,t]}]}];
;
GG3[t_]:=Graphics[{PointSize[Large],Red,Point[{{xc1[t]+2aa,0},{xc1[t],g3},{xc1[t]+5aa,g5}}]}];
GG4[t_]:=Graphics[{Thick,Magenta,Arrowheads[{-0.03,0.03}],Arrow[{{x2[t,0],y2[t,0]},{x2[t,Pi],y2[t,Pi]}}]}];
GG5[t_]:=Graphics[{Thick,Green,Arrowheads[{-0.03,0.03}],Arrow[{{x2[t,Pi/2],y2[t,Pi/2]},{x2[t,3Pi/2],y2[t,3Pi/2]}}]}];
AA2[t_]:=Show[GG1[t],GG2[t],GG3[t],GG4[t],GG5[t],GG30[t],GG31[t],GG50[t],G
G51[t],JJ11,JJ10,JJ12,JJ13,PlotRange->{{-0.75,8.2},{-1.3,1.3}},Axes->False];
Manipulate[AA2[t],{t,0,Pi}]

```

4, 球面拓印滚动模拟代码

```

rr2[t_]:={Sin[t/2],Sin[t]/2,-1/2-Cos[t]/2};
n[t_]:={Sin[t/2],Sin[t]/2,-1/2-Cos[t]/2};
x1=x/.First[NDSolve[{x'[t]==0.5 Sqrt[1+Cos[t/2]^2]*(-(Sqrt[2] Cos[t/2]
(-5+Cos[t]))/(3+Cos[t])^(3/2)),x[0]==0},x,{t,0,4Pi}]];
y1=y/.First[NDSolve[{y'[t]==0.5 Sqrt[1+Cos[t/2]^2]*((Sqrt[2] (1+
Cos[t]))/(3+Cos[t])^(3/2)),y[0]==0},y,{t,0,4Pi}]];
kk00=ParametricPlot3D[{x1[t],y1[t],-1},{t,0,4Pi},PlotStyle->{Blue,Thick}];
kk01[t_]:=Graphics3D[{Red,PointSize[Large],Point[{{x1[t],y1[t],0}}]}];
kk02[t_]:=Graphics3D[{Red,PointSize[Large],Point[{{x1[t],y1[t],-1}}]}];
kk03[t_]:=Graphics3D[{Blue,Opacity[0.2],Sphere[{{x1[t],y1[t],0},1}]}];
n0={0,0,-1};
kk04[t_]:=ParametricPlot3D[{x1[t],y1[t],0}+RotationMatrix[{n[t],n0}].rr2[s],{s,0,4Pi
}];
kk05[t_]:=Graphics3D[{Red,Arrowheads[0.05],Arrow[Tube[{{x1[t],y1[t],0},{x1[t],y
1[t],-1}},0.02]]}];
kk06[t_]:=Graphics3D[{Magenta,Arrowheads[0.05],Arrow[Tube[{{x1[t],y1[t],0},{x
1[t],y1[t],0}}+RotationMatrix[{n[t],n0},{1,0,0}],0.02]}];
kk07[t_]:=Graphics3D[{Green,Arrowheads[0.05],Arrow[Tube[{{x1[t],y1[t],0},{x1[t]
,y1[t],0}}+RotationMatrix[{n[t],n0},{0,1,0}],0.02]}];
kk08[t_]:=Graphics3D[{Yellow,Arrowheads[0.05],Arrow[Tube[{{x1[t],y1[t],0},{x1[
t],y1[t],0}}+RotationMatrix[{n[t],n0},{0,0,1}],0.02]}];
LL00[t_]:=Show[kk00,kk01[t],kk02[t],kk03[t],kk04[t],kk05[t],kk06[t],kk07[t],kk08[t
],PlotRange->{{-2.5,2.5},{-1.5,2.5},{-1.1,1.1}}];
Manipulate[LL00[t],{t,0.001,4Pi-0.001}]

```

4, 球锥滚动模拟代码

```
n1=RotationMatrix[Pi/4,{0,1,0}].{1,0,0};
```

```

n2=RotationMatrix[Pi/4,{0,1,0}].{0,1,0};
n3=RotationMatrix[Pi/4,{0,1,0}].{0,0,1};
f1[h_,t_]:=(1-h)n3+h Cos[t]n1+h Sin[t]n2;
f2[h_,t_]:=-(1-h)n3+h Cos[t]n1+h Sin[t]n2;
f3[h_,t_]:=(1-h)n2-h Cos[t]n1+h Sin[t]n3;
f4[h_,t_]:=-(1-h)n2-h Cos[t]n1+h Sin[t]n3;
r1=RotationMatrix[Pi/4,{0,1,0}].{0,0,-1};
FF0[t_]:= { {Cos[t/\sqrt{2}] (Cos[t] Cos[t/\sqrt{2}] + \sqrt{2} Sin[t] Sin[t/\sqrt{2}]), -Cos[\sqrt{2} t] Sin[t] + (Cos[t] Sin[t/\sqrt{2}])/\sqrt{2}, Cos[t] Sin[t/\sqrt{2}]^2 - (Sin[t] Sin[t/\sqrt{2}])/\sqrt{2}}, {1/8 Cos[t] (8 Cos[t] Sin[t] Sin[t/\sqrt{2}]^2 - 4 \sqrt{2} Sin[t/\sqrt{2} t] + (2 - 2 Cos[2 t] + 6 Cos[\sqrt{2} t] + Cos[(-2 + \sqrt{2}) t] + Cos[(2 + \sqrt{2}) t]) Tan[t]), Cos[t] Cos[\sqrt{2} t] + (Sin[t] Sin[\sqrt{2} t])/\sqrt{2}, Sin[t/\sqrt{2}] (\sqrt{2} Cos[t] Cos[t/\sqrt{2}] + Sin[t] Sin[t/\sqrt{2}])}, {Sin[t/\sqrt{2}]^2, -(Sin[\sqrt{2} t]/\sqrt{2}), Cos[t/\sqrt{2}]^2} };
FF[r_,t_]:=r1+FF0[t].(r-r1);
PP01[tt_]:=ParametricPlot3D[{FF[f1[h,t],tt],FF[f2[h,t],tt],FF[f3[h,t],tt],FF[f4[h,t],tt]}, {h,0,1},{t,-Pi/2,Pi/2},Mesh->None,PlotStyle->{Directive[Green,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Red,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Blue,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[MediumBlue,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White]}];
JJ00=ParametricPlot3D[{x,y,-1/Sqrt[2}],{x,-2,1.5},{y,-3,6},Mesh->None,PlotStyle->{Purple,Opacity[0.3]}];
PP02[t_]:=ParametricPlot3D[FF[f2[h,Sqrt[2]t],t],{h,0,1},PlotStyle->{Red,Thick}];
JJ20=ParametricPlot3D[FF[f2[1,Sqrt[2]t],t],{t,-Pi/Sqrt[8],Pi/Sqrt[8]},PlotStyle->{Red,Dashed,Thick}];
KK01[t_]:=Show[PP01[t],PP02[t]];
GG0[t_]:= { {1/4 (Cos[t] (1+Cos[\pi/\sqrt{2}])-(-3+Cos[\pi/\sqrt{2}]) Cos[\sqrt{2} t])+Sin[t] (Sin[\pi/\sqrt{2}]-Cos[\sqrt{2} t] Sin[\pi/\sqrt{2}]+2 \sqrt{2} Sin[\sqrt{2} t])), 1/4 ((1-Cos[\pi/\sqrt{2}])+(3+Cos[\pi/\sqrt{2}]) Cos[\sqrt{2} t]) Sin[t]+Cos[t] (Sin[\pi/\sqrt{2}]-Cos[\sqrt{2} t] Sin[\pi/\sqrt{2}]-2 \sqrt{2} Sin[\sqrt{2} t])), 1/2 (-Cos[\pi/(2 \sqrt{2}) t]+Sin[t] (Cos[\sqrt{2} t] Sin[\pi/(2 \sqrt{2})]+\sqrt{2} Cos[\pi/(2 \sqrt{2})] Sin[\sqrt{2} t])+Cos[t] (Cos[\pi/(2 \sqrt{2})] Cos[\sqrt{2} t]-\sqrt{2} Sin[\pi/(2 \sqrt{2})] Sin[\sqrt{2} t]))}, {1/(8 \sqrt{2}) (2 Cos[t] (8 Cos[t/\sqrt{2}]+\sqrt{2} (-Cos[\pi/\sqrt{2}-2 t+t/\sqrt{2}]+Cos[\pi/\sqrt{2}-1/2 (4+\sqrt{2}) t])) Sin[t/\sqrt{2}]+Sin[t] ((-2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2}) Cos[\pi/\sqrt{2}-2 t]) ((1+\sqrt{2}) Cos[\sqrt{2} t]+(-1+\sqrt{2}) Cos[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2}) t])-4 \sqrt{2} Sin[\pi/(2 \sqrt{2})-t]^2-(-2+\sqrt{2}) Sin[\pi/\sqrt{2}-2 t] (-(-1+\sqrt{2}) Cos[\sqrt{2} t] Sin[\pi/\sqrt{2}-2 t]+(1+\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2}) Cos[\pi/\sqrt{2}-2 t]) Sin[\sqrt{2} t])), 1/8 (Cos[t] (2-2 Cos[\pi/\sqrt{2}-2 t]+6 Cos[\sqrt{2} t]+Cos[\pi/\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2}) t]+Cos[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2}) t])+2 (4 \sqrt{2} Cos[t/\sqrt{2}]-Cos[\pi/\sqrt{2}-2 t+t/\sqrt{2}]+Cos[\pi/\sqrt{2}-1/2 (4+\sqrt{2}) t]) Sin[t] Sin[t/\sqrt{2}]), (Sec[\pi/(2 \sqrt{2})-t] (-2 \sqrt{2} Sin[\pi/\sqrt{2}-2 t]+4 Sin[\sqrt{2} t]+2 Sin[\pi/\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2}) t]+\sqrt{2} Sin[\pi/\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2}) t]-2 Sin[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2}) t]+\sqrt{2} Sin[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2}) t]))/(8 \sqrt{2})}, {Sin[t/\sqrt{2}] (\sqrt{2} Cos[t/\sqrt{2}] Sin[\pi/(2 \sqrt{2})]-Cos[\pi/(2 \sqrt{2})] Sin[t/\sqrt{2}]), -Sin[t/\sqrt{2}] (\sqrt{2} Cos[\pi/(2 \sqrt{2})] Cos[t/\sqrt{2}]+Sin[\pi/(2 \sqrt{2})] Sin[t/\sqrt{2}]), Cos[t/\sqrt{2}]^2} } };
r2={(-1+2 Cos[\pi/(2 \sqrt{2})])/\sqrt{2}, \sqrt{2} Sin[\pi/(2 \sqrt{2})], -(1/\sqrt{2})};
GG[r_,t_]:=r2+GG0[t].(r-r2);
g1[h_,t_]:=FF[f1[h,t],Pi/Sqrt[8]];

```

```

g2[h_,t_]:=FF[f2[h,t],Pi/Sqrt[8]];
g3[h_,t_]:=FF[f3[h,t],Pi/Sqrt[8]];
g4[h_,t_]:=FF[f4[h,t],Pi/Sqrt[8]];
PP03[tt_]:=ParametricPlot3D[{GG[g1[h,t],tt],GG[g2[h,t],tt],GG[g3[h,t],tt],GG[g4[h,t],tt]},{h,0,1},{t,-Pi/2,Pi/2},Mesh->None,PlotStyle->{Directive[Green,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Red,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Blue,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Magenta,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White]}]
PP04[t_]:=ParametricPlot3D[GG[g3[h,-Pi/2+Sqrt[2]t],t],{h,0,1},PlotStyle->{Red,Thick}];
JJ30=ParametricPlot3D[GG[g3[1,-Pi/2+Sqrt[2]t],t],{t,0,Pi/Sqrt[2]},PlotStyle->{Red,Dashed,Thick}];
KK02[t_]:=Show[PP03[t],PP04[t]];
r3={-(1/Sqrt[2]),2 Sqrt[2] Sin[π/(2 Sqrt[2])],-(1/Sqrt[2])};
HH0[t_]:={{1/4 (Cos[t] (1+Cos[π/Sqrt[2]]-(-3+Cos[π/Sqrt[2]]) Cos[Sqrt[2] t])+Sin[t] (Sin[π/Sqrt[2]]-Cos[Sqrt[2] t] Sin[π/Sqrt[2]]+2 Sqrt[2] Sin[Sqrt[2] t])),1/4 ((-1+Cos[π/Sqrt[2]]-(3+Cos[π/Sqrt[2]]) Cos[Sqrt[2] t]) Sin[t]+Cos[t] (-Sin[π/Sqrt[2]]+Cos[Sqrt[2] t] Sin[π/Sqrt[2]]+2 Sqrt[2] Sin[Sqrt[2] t])),1/2 (Cos[π/(2 Sqrt[2])-t]-Sin[t] (Cos[Sqrt[2] t] Sin[π/(2 Sqrt[2])]+Sqrt[2] Cos[π/(2 Sqrt[2])] Sin[Sqrt[2] t])+Cos[t] (-Cos[π/(2 Sqrt[2])] Cos[Sqrt[2] t]+Sqrt[2] Sin[π/(2 Sqrt[2])] Sin[Sqrt[2] t])),{1/(8 Sqrt[2]) (-2 Cos[t] (8 Cos[t/Sqrt[2]]+Sqrt[2] (-Cos[π/Sqrt[2]-2 t+t/Sqrt[2]]+Cos[π/Sqrt[2]-1/2 (4+Sqrt[2]) t])) Sin[t/Sqrt[2]]-Sin[t] ((-2-Sqrt[2]+(-2+Sqrt[2]) Cos[π/Sqrt[2]-2 t]) ((1+Sqrt[2]) Cos[Sqrt[2] t]+(-1+Sqrt[2]) Cos[π/Sqrt[2]-(2+Sqrt[2]) t])-4 Sqrt[2] Sin[π/(2 Sqrt[2])-t]^2-(-2+Sqrt[2]) Sin[π/Sqrt[2]-2 t] (-(-1+Sqrt[2]) Cos[Sqrt[2] t] Sin[π/Sqrt[2]-2 t]+(1+Sqrt[2]+(-1+Sqrt[2]) Cos[π/Sqrt[2]-2 t]) Sin[Sqrt[2] t])),1/8 (Cos[t] (2-2 Cos[π/Sqrt[2]-2 t]+6 Cos[Sqrt[2] t]+Cos[π/Sqrt[2]+(-2+Sqrt[2]) t]+Cos[π/Sqrt[2]-(2+Sqrt[2]) t])+2 (4 Sqrt[2] Cos[t/Sqrt[2]]-Cos[π/Sqrt[2]-2 t+t/Sqrt[2]]+Cos[π/Sqrt[2]-1/2 (4+Sqrt[2]) t]) Sin[t] Sin[t/Sqrt[2]],(Sec[π/(2 Sqrt[2])-t] (-2 Sqrt[2] Sin[π/Sqrt[2]-2 t]+4 Sin[Sqrt[2] t]+2 Sin[π/Sqrt[2]+(-2+Sqrt[2]) t]+Sqrt[2] Sin[π/Sqrt[2]+(-2+Sqrt[2]) t]-2 Sin[π/Sqrt[2]-(2+Sqrt[2]) t]+Sqrt[2] Sin[π/Sqrt[2]-(2+Sqrt[2]) t]))/(8 Sqrt[2])},{Sin[t/Sqrt[2]] (-Sqrt[2] Cos[t/Sqrt[2]] Sin[π/(2 Sqrt[2])]+Cos[π/(2 Sqrt[2])] Sin[t/Sqrt[2]]),-Sin[t/Sqrt[2]] (Sqrt[2] Cos[π/(2 Sqrt[2])] Cos[t/Sqrt[2]]+Sin[π/(2 Sqrt[2])] Sin[t/Sqrt[2]]),Cos[t/Sqrt[2]]^2}}};
HH[r_,t_]:=r3+HH0[t].(r-r3);
h1[h_,t_]:=GG[g1[h,t],Pi/Sqrt[2]];
h2[h_,t_]:=GG[g2[h,t],Pi/Sqrt[2]];
h3[h_,t_]:=GG[g3[h,t],Pi/Sqrt[2]];
h4[h_,t_]:=GG[g4[h,t],Pi/Sqrt[2]];
PP05[tt_]:=ParametricPlot3D[{HH[h1[h,t],tt],HH[h2[h,t],tt],HH[h3[h,t],tt],HH[h4[h,t],tt]},{h,0,1},{t,-Pi/2,Pi/2},Mesh->None,PlotStyle->{Directive[Green,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Red,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Blue,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Magenta,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White]}];
PP06[t_]:=ParametricPlot3D[HH[h1[h,Pi/2-Sqrt[2]t],t],{h,0,1},PlotStyle->{Red,Thick}]

```

```

k}];

JJ40=ParametricPlot3D[HH[h1[1,Pi/2-Sqrt[2]t],t],{t,0,Pi/Sqrt[2]},PlotStyle->{Red,Dashed,Thick}];

KK03[t_]:=Show[PP05[t],PP06[t]];

r4={(-1+2 Cos[ $\pi/(2\sqrt{2})$ ])/ $\sqrt{2}$ , $3\sqrt{2}\sin[\pi/(2\sqrt{2})]$ , $-(1/\sqrt{2})$ };

II0[t_]:= {{1/4 (Cos[t] (1+Cos[ $\pi/\sqrt{2}$ ])-(-3+Cos[ $\pi/\sqrt{2}$ ]) Cos[ $\sqrt{2}t$ ])+Sin[t] (Sin[ $\pi/\sqrt{2}$ ]-Cos[ $\sqrt{2}t$ ] Sin[ $\pi/\sqrt{2}$ ]+2 $\sqrt{2}\sin[\sqrt{2}t]*/),1/4 ((1-Cos[ $\pi/\sqrt{2}$ ])+(3+Cos[ $\pi/\sqrt{2}$ ]) Cos[ $\sqrt{2}t$ ]) Sin[t]+Cos[t] (Sin[ $\pi/\sqrt{2}$ ]-Cos[ $\sqrt{2}t$ ] Sin[ $\pi/\sqrt{2}$ ]-2 $\sqrt{2}\sin[\sqrt{2}t]*/),1/2 (-Cos[ $\pi/(2\sqrt{2})$ )-t]+Sin[t] (Cos[ $\sqrt{2}t$ ] Sin[ $\pi/(2\sqrt{2})$ ]) $+\sqrt{2}\cos[\pi/(2\sqrt{2})]\sin[\sqrt{2}t]*/),{1/(8 $\sqrt{2}$ ) (2 Cos[t] (8 Cos[t/ $\sqrt{2}$ ]) $+\sqrt{2}(-\cos[\pi/\sqrt{2}-2t+t/\sqrt{2}]+\cos[\pi/\sqrt{2}-1/2(4+\sqrt{2})t]))\sin[t/\sqrt{2}]+sin[t]((-2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})\cos[\pi/\sqrt{2}-2t])((1+\sqrt{2})\cos[\sqrt{2}t]+(-1+\sqrt{2})\cos[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})t])-4\sqrt{2}\sin[\pi/(2\sqrt{2})-t]^2(-2+\sqrt{2})\sin[\pi/\sqrt{2}-2t](-(-1+\sqrt{2})\cos[\sqrt{2}t]\sin[\pi/\sqrt{2}-2t]+(1+\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})\cos[\pi/\sqrt{2}-2t])\sin[\sqrt{2}t])),1/8 (\cos[t](2-2\cos[\pi/\sqrt{2}-2t]+6\cos[\sqrt{2}t]+\cos[\pi/\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})t]+\cos[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})t])+2(4\sqrt{2}\cos[t/\sqrt{2}]-\cos[\pi/\sqrt{2}-2t+t/\sqrt{2}]+\cos[\pi/\sqrt{2}-1/2(4+\sqrt{2})t])\sin[t]\sin[t/\sqrt{2}]),(\sec[\pi/(2\sqrt{2})-t](-2\sqrt{2}\sin[\pi/\sqrt{2}-2t]+4\sin[\sqrt{2}t]+2\sin[\pi/\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})t]) $+\sqrt{2}\sin[\pi/\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})t]-2\sin[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})t]+\sqrt{2}\sin[\pi/\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})t]))/(8\sqrt{2})},{\sin[t/\sqrt{2}]({\sqrt{2}\cos[t/\sqrt{2}]\sin[\pi/(2\sqrt{2})]-\cos[\pi/(2\sqrt{2})]\sin[t/\sqrt{2}]}),-\sin[t/\sqrt{2}]({\sqrt{2}\cos[\pi/(2\sqrt{2})]\cos[t/\sqrt{2}]+\sin[\pi/(2\sqrt{2})]\sin[t/\sqrt{2}]}),\cos[t/\sqrt{2}]^2}}};

II[r_,t_]:=r4+II0[t].(r-r4);

I1[h_,t_]:=HH[h1[h,t],Pi/Sqrt[2]];

I2[h_,t_]:=HH[h2[h,t],Pi/Sqrt[2]];

I3[h_,t_]:=HH[h3[h,t],Pi/Sqrt[2]];

I4[h_,t_]:=HH[h4[h,t],Pi/Sqrt[2]];

PP07[tt_]:=ParametricPlot3D[{II[I1[h,t],tt],II[I2[h,t],tt],II[I3[h,t],tt],II[I4[h,t],tt]},{{h,0,1},{t,-Pi/2,Pi/2}},Mesh->None,PlotStyle->{Directive[Green,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Red,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Blue,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White],Directive[Magenta,Opacity[0.3],Specularity[White,20]],BoundaryStyle->Directive[Thick,White]}];

PP08[t_]:=ParametricPlot3D[II[I4[h,Pi/2-Sqrt[2]t],t],{h,0,1},PlotStyle->{Red,Thick}];

JJ50=ParametricPlot3D[II[I4[1,Pi/2-Sqrt[2]t],t],{t,0,Pi/Sqrt[2]},PlotStyle->{Red,Dashed,Thick}];

KK04[t_]:=Show[PP07[t],PP08[t]];

KK00[t_]:=Piecewise[{{KK01[t],-Pi/Sqrt[8]<t<Pi/Sqrt[8]}, {KK02[t-Pi/Sqrt[8]],Pi/Sqrt[8]<t<Pi/Sqrt[8]+Pi/Sqrt[2]}, {KK03[t-Pi/Sqrt[8]-Pi/Sqrt[2]],Pi/Sqrt[8]+Pi/Sqrt[2]<t<Pi/Sqrt[8]+2Pi/Sqrt[2]}, {KK04[t-Pi/Sqrt[8]-2Pi/Sqrt[2]],Pi/Sqrt[8]+2Pi/Sqrt[2]<t<Pi/Sqrt[8]+Pi/Sqrt[2]+2Pi/Sqrt[2]}}];

LL[t_]:=Show[KK00[t],JJ00,JJ20,JJ30,JJ40,JJ50,PlotRange->{{-2,1.5},{-2,6},{-1,1}}];

Manipulate[LL[t],{t,-1.09972,7.69806}]$$$$$ 
```

5, 嵌合雪花片滚动模拟代码

(*This program was written in Mathematica8. version, so it is best to run with Mathematica8.;Should it be run with other version, a bug will appear*)

```

p[s_]:=Pi*Boole[OddQ[IntegerPart[s/(2Pi)]]];
t0[t_]:=FractionalPart[t/(2Pi)]2Pi;
beta1[k_,θ_,t_]:=ArcSin[(Sin[2θ]*Sin[t])/([Sqrt]((-2+k2)*Sin[t]2+2 k Sin[t]+2 -2
Cos[2θ]*Cos[t]√((-1+k2) Sin[t]2+2 k Sin[t]+1)+Sin[t]2*Sin[2θ]22)*Sin[t]2+2 k Sin[t]+2 -2 Cos[2θ]
*Cos[t]√((-1+k2) Sin[t]2+2 k Sin[t]+1)+Sin[t]2*Sin[2θ]2)+(k/2)*(Sin[2θ]*Sin[t])/([Sqrt]((-2+k2)*Sin[t]2+2 k Sin[t]+2 -2 Cos[2θ]
*Cos[t]√((-1+k2) Sin[t]2+2 k Sin[t]+1)+Sin[t]2*Sin[2θ]2));
zc2[k_,θ_,t_]:=Sin[2θ]/([Sqrt]((-2+k2)*Sin[t]2-2 k Sin[t]+2 -2 Cos[2θ]
*Cos[t]√((-1+k2) Sin[t]2-2 k Sin[t]+1)+Sin[t]2*Sin[2θ]2)-(k/2)*(Sin[2θ]*Sin[t])/([Sqrt]((-2+k2)*Sin[t]2-2 k Sin[t]+2 -2 Cos[2θ]
*Cos[t]√((-1+k2) Sin[t]2-2 k Sin[t]+1)+Sin[t]2*Sin[2θ]2));
zc[k_,θ_,t_]:=Piecewise[{ {zc1[k,θ,t],t<Pi},{zc2[k,θ,t],t>Pi} }];
psi1[k_,θ_,t_]:=ArcCos[(Sin[2θ]*Cos[t])/([Sqrt]((-2+k2)*Sin[t]2+2 k Sin[t]+2 -2
Cos[2θ]*Cos[t]√((-1+k2) Sin[t]2+2 k Sin[t]+1)))]-θ;
psi3[k_,θ_,t_]:=ArcCos[-(Sin[2θ]*Cos[t])/([Sqrt]((-2+k2)*Sin[t]2-2 k Sin[t]+2 -2
Cos[2θ]*Cos[t]√((-1+k2) Sin[t]2-2 k Sin[t]+1)))]+θ;
psi[k_,θ_,t_]:=Piecewise[{ {psi1[k,θ,t],t<Pi},{psi3[k,θ,t],t>Pi} }];
t1[k_,t_]:=Piecewise[{ {t,t<Pi},{Pi+ArcSin[Sin[t-Pi]/(1+k*Sin[t-Pi])],t>Pi} }];
t2[k_,t_]:=Piecewise[{ {Pi-t,t>Pi},{ArcSin[Sin[t]/(1+k*Sin[t])],t<Pi} }];
FF21[k_,θ_,t_]:=-((2+k Sin[t])(Cos[2 θ] (1+Cos[2 t]+2 k Sin[t])-√2 Cos[t]
√(1+k2-(-1+k2) Cos[2 t]+4 k Sin[t]) Sin[2 θ])/(2 (2+2 k Sin[t]-2 Cos[t] Cos[2 θ]
√(1+2 k Sin[t]+(-1+k2) Sin[t]2)+Sin[t]2 (-2+k2+Sin[2 θ]2))3/2)

```

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\left(\frac{(1+2k\sin[t]+(-1+k^2)\sin[t]^2)}{\text{正弦}} \right) /} \\
 & \left(\frac{1-(\sin[t]^2\sin[2\theta]^2)}{\text{正弦}} \right) / \\
 & \left(\frac{2+2k\sin[t]-2\cos[t]\cos[2\theta]}{\text{正弦} \quad \text{余弦} \quad \text{余弦}} \right. \\
 & \left. \sqrt{1+2k\sin[t]+(-1+k^2)\sin[t]^2} + \right. \\
 & \left. \sin[t]^2(-2+k^2+\sin[2\theta]^2) \right) \Big) \Big) \\
 &) ;
 \end{aligned}$$

$\text{Dbeta}[k_,\theta_,t_]:=$ Piecewise[{\{FF21[k,\theta,t],t<=Pi\},\{FF21[k,\theta,2Pi-t],t>Pi\}}];

$\text{FF14}[k_,\theta_,t_]:=(k(3-\cos[2t]+2k\sin[t])(-2\cos[t]\cos[2\theta]+\sqrt{2}$
 $\sqrt{1+k^2-(-1+k^2)\cos[2t]+4k\sin[t]})\sin[2\theta])/(4(2+2k\sin[t]+(-2+k^2)\sin[t]^2-2\cos[t]$
 $\cos[2\theta]\sqrt{1+2k\sin[t]+(-1+k^2)\sin[t]^2})^{3/2}$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\left(\frac{(1+2k\sin[t]+(-1+k^2)\sin[t]^2)}{\text{正弦}} \right) /} \\
 & \left(\frac{1+(\cos[t]^2\sin[2\theta]^2)}{\text{正弦}} \right) / \\
 & \left(\frac{-2-\sin[t](2k+(-2+k^2)\sin[t])}{\text{正弦}} + \right. \\
 & \left. \frac{2\cos[t]\cos[2\theta]\sqrt{1+2k\sin[t]+(-1+k^2)\sin[t]^2}}{\text{余弦} \quad \text{余弦}} \right) \Big) \Big) \\
 &) ;
 \end{aligned}$$

$\text{Dpsi}[k_,\theta_,t_]:=$ Piecewise[{\{FF14[k,\theta,t],t<=Pi\},\{FF14[k,\theta,2Pi-t],t>Pi\}}];

$\text{FA01}[k_?\text{NumberQ},b_?\text{NumberQ},tt_?\text{NumberQ}]:=$ Module[\{Phi,Xc,Yc,rc,r1c,r2c,r11
, r22, r33, r44, r11c, r22c, FF11, FF12, FF13, FF14, FF15, FF16, FF17, FF18, FF19, FF20, FF21\},
\{Phi,Xc,Yc\}=\{phi,xc,yc\}/.NDSolve[\{D[phi[t],t]==Dpsi[k,b,t0[t]]*\sin[beta[k,b,t0[t]]],
D[xc[t],t]==-zc[k,b,t0[t]]*(Dpsi[k,b,t0[t]]*\cos[beta[k,b,t0[t]]]*\sin[phi[t]]+dbeta[k,b,t0[t]]*\cos[phi[t]]),
D[yc[t],t]==zc[k,b,t0[t]]*(Dpsi[k,b,t0[t]]*\cos[beta[k,b,t0[t]]]*\cos[phi[t]]-\dbeta[k,b,t0[t]]*\sin[phi[t]]),
phi[0]==0, xc[0]==0, yc[0]==0\},\{phi, xc, yc\},\{t, 0, 4Pi\}][[1]]; rc[t_?\text{NumberQ}]:=\{Xc[t], Yc[t], zc[k,b,t0[t]]\}; r1c[k1_,\beta_,\phi_]:=\{-1/2 k1
\cos[\beta] \cos[\phi], -(1/2) k1 \cos[\beta] \sin[\phi], -(1/2) k1 \sin[\beta]\}; r2c[k1_,\beta_,\phi_]:=\{1/2 k1
\cos[\beta] \cos[\phi], 1/2 k1 \cos[\beta] \sin[\phi], 1/2 k1 \sin[\beta]\}; r11[k1_,\theta_,\beta_,\phi_,\psi_,t1_]:=\\
\{-(1/2) \cos[\beta] \cos[\phi] (\kappa1+2 \sin[t1])+\\
\cos[t1] (\sin[\theta] (\cos[\psi] \sin[\phi]-\cos[\phi] \sin[\beta])+\cos[\phi] \sin[\psi]+\cos[\phi] \sin[\beta]+\sin[\phi] \sin[\psi]), -(1/2) \cos[\beta] (\kappa1+2 \sin[t1]) \sin[\phi]+\\
\cos[t1] (\cos[\theta+\psi] \sin[\beta] \sin[\phi]-\cos[\phi] \sin[\theta+\psi]), -\cos[t1] \cos[\beta] \cos[\theta+\psi]-1/2 (\kappa1+2 \sin[t1]) \sin[\beta]\}; r22[k1_,\theta_,\beta_,\phi_,\psi_,t2_]:=\\
\{1/2 \cos[\beta] \cos[\phi] (\kappa1-2 \sin[t2])+\\
\cos[t2] (\sin[\theta] (-\cos[\psi] \sin[\phi]+\cos[\phi] \sin[\beta] \sin[\psi])+\cos[\theta] (\cos[\phi] \cos[\psi] \sin[\beta]+\sin[\phi] \sin[\psi])), 1/2 \cos[\beta] (\kappa1-2 \sin[t2]) \sin[\phi]+\cos[t2] (\cos[\theta-\psi] \sin[\beta] \sin[\phi]+\cos[\phi] \sin[\theta-\psi]), -\cos[t2] \cos[\beta] \cos[\theta-\psi]+1/2 (\kappa1-2 \sin[t2])\}

```

Sin[β}];r33[t_?NumberQ,t1_]:=rc[t]+r11[k,b,beta[k,b,t0[t]],Phi[t],psi[k,b,t0[t]],t1];r4
4[t_?NumberQ,t2_]:=rc[t]+r22[k,b,beta[k,b,t0[t]],Phi[t],psi[k,b,t0[t]],t2];r11c[t_?Num
berQ]:=rc[t]+r1c[k,beta[k,b,t0[t]],Phi[t]];r22c[t_?NumberQ]:=rc[t]+r2c[k,beta[k,b,t0[t
]],Phi[t]];FF11[t_?NumberQ]:=Graphics3D[{PointSize[Large],Red,Point[{r11c[t],r22
c[t]}]}];FF12[t_?NumberQ]:=Graphics3D[{Thick,Magenta,Line[{r11c[t],r22c[t]}]}];
FF13[t_?NumberQ]:=Graphics3D[{PointSize[Large],Blue,Point[{r33[t,t1[k,t0[t]]],r3
3[t,p[t]],r44[t,p[t]],r44[t,t2[k,t0[t]]]}]}];FF14[t_?NumberQ]:=ParametricPlot3D[r33[t,
s],{s,0,2Pi},PlotStyle->{Thick,Red}];FF15[t_?NumberQ]:=ParametricPlot3D[r44[t,s]
,{s,0,2Pi},PlotStyle->{Thick,Green}];FF16[t3_?NumberQ]:=ParametricPlot3D[r33[s,
p[s]],{s,0,t3},PlotStyle->{Blue,Thick,Dashed}];FF17[t3_?NumberQ]:=ParametricPlo
t3D[r33[s,t1[k,t0[s]]],{s,0,t3},PlotStyle->{Cyan,Thick}];FF18[t3_?NumberQ]:=Para
metricPlot3D[r44[s,t2[k,t0[s]]],{s,0,t3},PlotStyle->{Pink,Thick}];FF19[t3_?Number
Q]:=ParametricPlot3D[r44[s,p[s]],{s,0,t3},PlotStyle->{Orange,Thick,Dashed}];FF20[
t_?NumberQ]:=Graphics3D[{Red,Arrowheads[Medium],Arrow[{r11c[t],r33[t,p[t]]}]}
];FF21[t_?NumberQ]:=Graphics3D[{Green,Arrowheads[Medium],Arrow[{r22c[t],r
44[t,p[t]]}]}];Show[FF11[tt],FF12[tt],FF13[tt],FF14[tt],FF15[tt],FF17[tt],FF18[tt],FF
20[tt],FF21[tt],AxesOrigin->{0,0,0},PlotRange->{{Xc[12.5663]-0.5*k-1.1,0.5*k+1.1
},{-Cos[b]-0.1,Yc[12.5663]+Cos[b]+0.1},{-0.1,2+0.1}}]];

```

致谢

杨悦宁主要负责程序的编译和调试。

谢文远主要负责理论模型构建和理论公式推导。

庄逸灵主要负责实际物理模型的搭建和实验演示。

此页为学术诚信声明

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员： 杨悦宁， 谢文远， 庄逸灵

指导老师： 黄晶， 邱为钢

2018 年 8 月 18 日