参赛队员姓名：李岚淞、赵俊宁

中学：中国人民大学附属中学

省份：北京

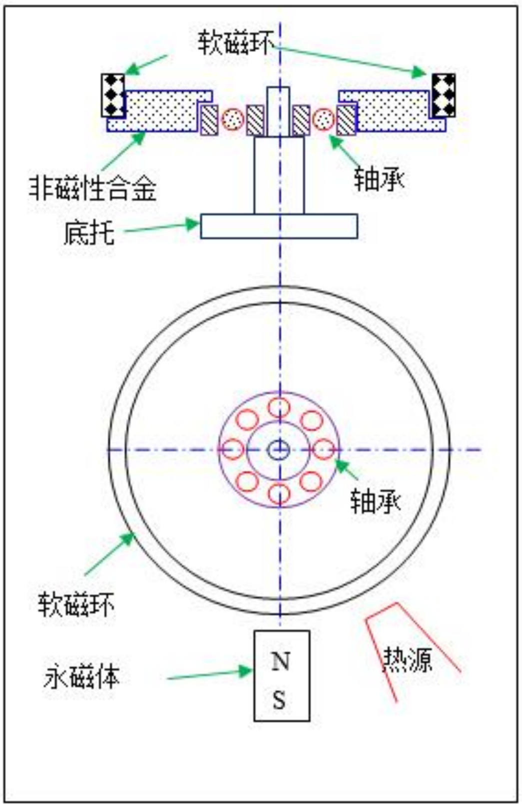
国家/地区：中国大陆

指导教师姓名：张永平

论文题目：金属软磁环在热和磁作用下运动的研究

金属软磁环在热和磁作用下运动的研究

作者：李岚凇，赵俊宁



摘 要

铁磁性物质存在一个居里温度或称居里点，当温度升高至接近并高过居里点时磁性能急剧下降并最终由铁磁性变为顺磁性；当温度冷却至居里点以下时，铁磁性物质又由顺磁性变回铁磁性，这种磁性急剧变化的现象称为热磁现象[1,2]。现实生活中有许多利用热磁现象使金属软磁环（以下简称软磁环）发生转动的物理实验，但均未对影响转动的因素进行系统分析和理论解释。

本文工作建立了热磁转动实验平台，全面分析了软磁环受磁场、温度场、作用力等影响因素的变化规律。在理论方面，从永磁体（以下简称磁体）产生的磁场入手，对在恒定热源和外界磁场情况下软磁环自身磁场、温度场及作用力进行了方程建模、推导和分析。在实验方面，通过实验平台针对磁体产生的环向磁场、软磁环材料磁化强度与温度关系、热源产生的软磁环上温度分布关系等影响因素进行了测量和分析。

本研究首次发现，改变磁体与软磁环的距离，可以实现软磁环双向转动。通过理论推导，详细研究了软磁环在热和磁作用下发生转动的运动规律，分析出双向转动的临界条件。本文所建的理论模型很好的解释了实验结果。

关键词：金属软磁、居里温度、磁场强度、磁荷模型、双向转动

目　录

第一章 引言

金属软磁合金是铁磁性物质。铁磁性物质存在一个临界温度，高于这个温度时，分子热运动加剧导致物质由铁磁性转为顺磁性，这个临界温度称为居里温度。利用这种物质磁性随温度变化的现象（热磁现象），将热能转化成机械能和电能，可研制热磁发动机和热磁发电机 [3-5]。

利用热磁现象已开发了很多演示装置及物理小实验 (图 1.1)，实验中的核心部件称为软磁环。定量分析研究软磁环经加热发生转动过程中，磁场、温度场、作用力等影响因素的具体变化规律，鲜有见诸于文献报道。这是本文研究的核心内容。

图 1.1 热磁现象的演示装置

在研究软磁环受磁和热作用发生转动的过程中发现，磁体与软磁环间距离的变化会影响软磁环的转动方向，从而能够实现软磁环双向转动（沿顺时针方向和逆时针方向转动）。针对这一现象，本论文从以下三个方面对软磁环在热和磁作用下的运动规律进行了系统分析和全面研究。

- 软磁环在热和磁作用下运动模型的建立：通过建立磁体在软磁环上产生的磁场模型、软磁环受恒定热源的表面温度场模型和磁体在软磁环上产生的磁力模型，全面分析软磁环运动的影响因素。
- 软磁环运动过程中磁场、温度场及其作用力的测定：通过磁体产生的环向磁场测定，软磁环材料磁化强度与温度关系测定，热源产生的软磁环上温度分布关系测定，进一步优化运动模型的各个参数。
- 软磁环运动过程深入研究：在恒定热源情况下，通过改变磁体与软磁环的距离，针对软磁环的双向运动过程进行理论分析和实验验证。

第二章 实验装置、测试设备及方法

2.1 实验装置搭建

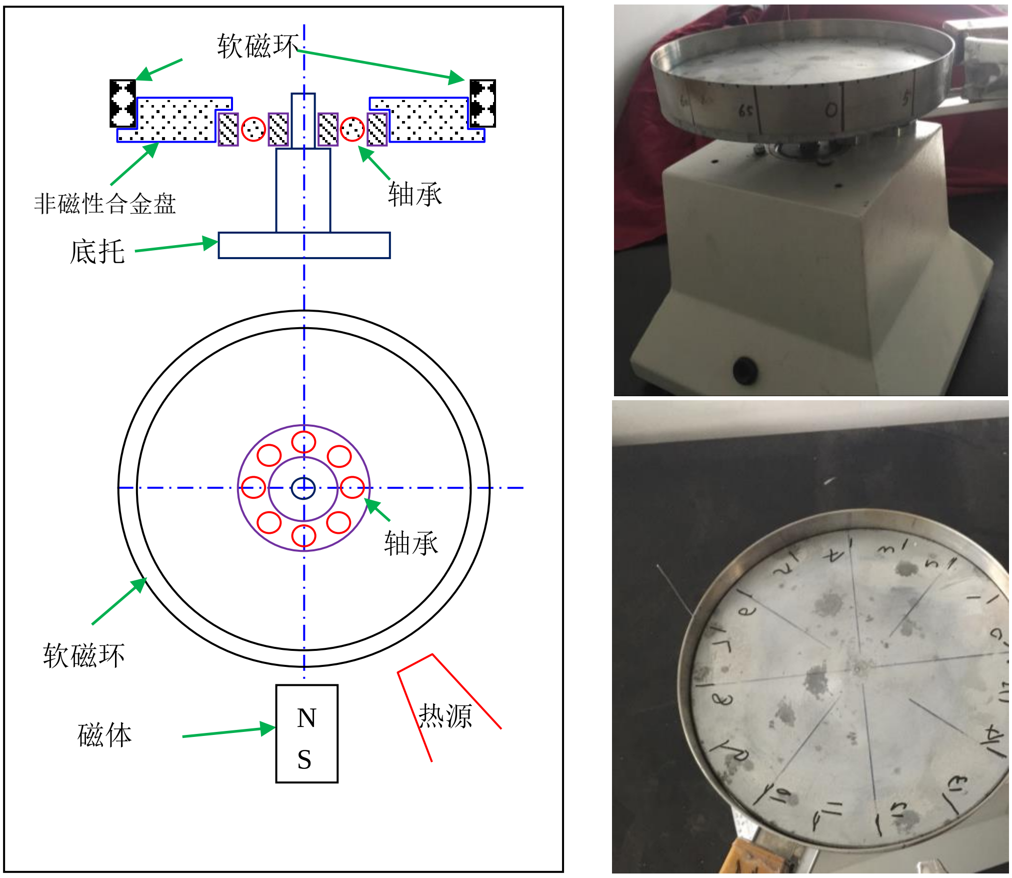


图 2.1 实验装置示意图及实物搭建图

整个热磁转动实验平台是由现有设备改造完成，如图 2.1 所示。在底托上放置轴承，轴承与非磁性合金（铝合金）托盘紧密连接，采用 1J36 软磁合金制成薄规格软磁环固定在托盘边缘，施加外力时软磁环可以沿轴自由转动。软磁环外侧放置磁体，磁体周围形成一个相对软磁环左右对称的磁场。在磁体一侧放置热源，可局部加热软磁环。

磁场对软磁材料总是呈现吸引作用。在未对软磁环加热时，由于磁体产生的磁场在软磁环处沿环向形成的磁场是对称分布，总磁场环向作用力为零，总环向作用力力矩也为零，故软磁环处于静止状态。

当热源加热软磁环使其局部温度升高时，热量由加热的局部区域向两边传

递，在软磁环上沿环向形成温度差。因为软磁环磁化强度对温度变化很敏感，软磁环两侧的温度梯度造成了磁化强度的显著差异，磁化强度差异性带动软磁环所受的磁场作用力发生了变化，原来总作用力力矩平衡被打破，产生了转动力距，从而软磁环在转动力矩作用下转动起来。

为了定量分析软磁环的运动规律，我们将转动平台的一些实验参数进行固化。固化如下所示：

（1） 转动平台（非磁性合金盘，底托，轴承）：转动平台由金相抛光机改造而成。采用轴承传动，存在微小阻力（在转动过程中忽略不计）；

（2） 磁体：块状钕铁硼稀土永磁体，长 A=0.06m，宽和高均为 2D=0.03m，磁体与软磁环在同一水平面放置，N 极端面靠近并平行于软磁环表面，N 极表面距软磁环圆心距离为 Y，Y 可以在磁体与软磁环圆心连线上进行调整；

（3） 软磁环：软磁环采用 1J36 金属软磁合金加工而成。1J36 合金具有磁化强度随温度线性变化（室温~200℃）的特点，其居里温度约为 230℃。软磁环半径 R=0.114m，壁厚厚度为 1mm，轴向高度 0.03m；

（4） 恒定热源：采用电阻丝加热，通过吹风机进行热量输送，热源固定在磁体右侧，与软磁环圆心及磁体连线成 12°左右夹角，距离软磁环外表面约 5mm。

2. 2 实验测试方法及设备

2.2.1 测试磁体在软磁环周围产生磁场的方法及设备

采用 LZ-610H 便携式特斯拉计测试磁体在软磁环切线方向的磁场分布情况，测试设备如图 2.3 所示。

具体测试方法：如图 2.2 所示，将圆盘状无磁性托盘过圆心等分成若干份，将磁体固定在距无磁性托盘的一定位置（距离=Y-R， 0~30mm），用特斯拉计的探头沿托盘边缘的等分点进行磁场测定。测量时，磁体和托盘均保持不动，特斯拉计探头的测磁方向垂直于托盘半径，沿托盘切线方向放置，逐一点位进行测量；测量范围以磁体正向位置为 0 点，沿托盘向左右各测量约 57 度；测量完程一个循环后，将磁体旋转 180 度，磁体 N 极和 S 极互换，进行对比测量。将测量结

果进行汇总分析，并与计算模型的结果进行拟合。

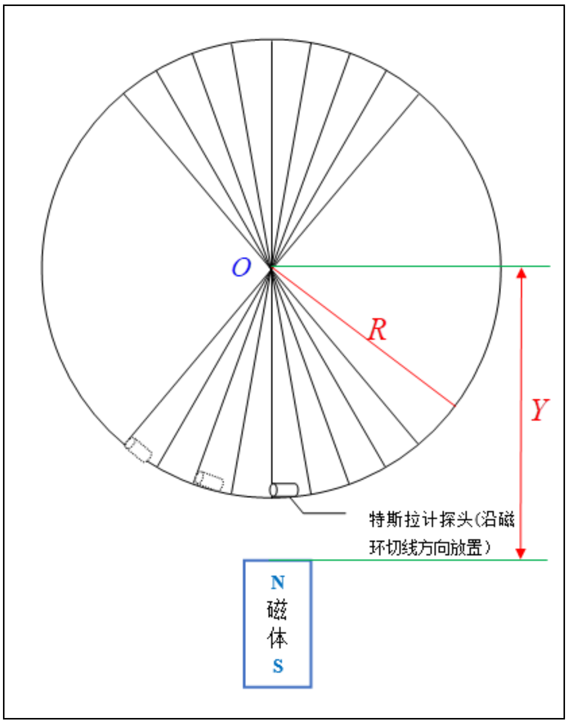


图 2.2 测量磁场环向分量示意图

图 2.3　LZ-610H 便携特斯拉计

2.2.2 测试软磁环温度分布的方法及设备

采用 AS872 便携式红外测温仪测量软磁环沿环向的温度。图 2.4 为测量软磁环温度分布示意图，图 2.5 为 AS872 便携式红外测温仪。

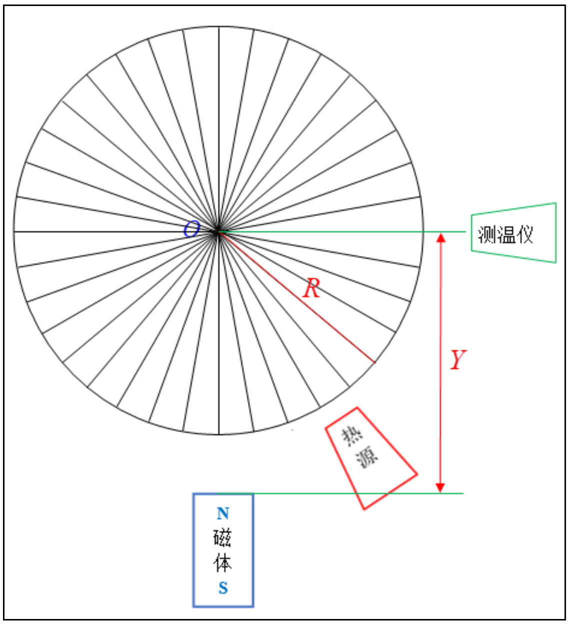


图 2.4 测量软磁环温度分布示意图

图 2.5 AS872 便携式红外测温仪

具体测试方法为：采用恒定热源持续加热，将软磁环固定在非金属托盘上，并将软磁环分等成 60 份，将磁体固定在距软磁环一定位置（距离=Y-R），将测温仪固定在距软磁环的特定位置。通过快速旋转软磁环指定点到达测温仪有效测试点范围进行数据采集，采集完成后快速将软磁环转回到起始位置，经过 30s 加热稳定后，进行下一个点的测量。以此往复，测量范围为：距热源正向±90 度。测量时，热源、磁体和测温仪均保持不动。

2.2.3 测试软磁环磁化强度与温度分布关系的方法及设备

本实验所用 1J36 坡莫合金软磁环的试样尺寸为Φ32/40×5mm 标准试样环，经处理后进行磁化强度随温度变化的测试。

测量是在 NIM-2000S 软磁材料直流磁性测量系统（图 2.6）上进行。该测量系统主要包括：工控机、D/A 控制卡、A/D 采集卡、积分器电流分配器及励磁电源[6]。图 2.7 为磁性材料测量装置原理图。

图 2.6 NIM-2000S 软磁材料直流磁性测量系统

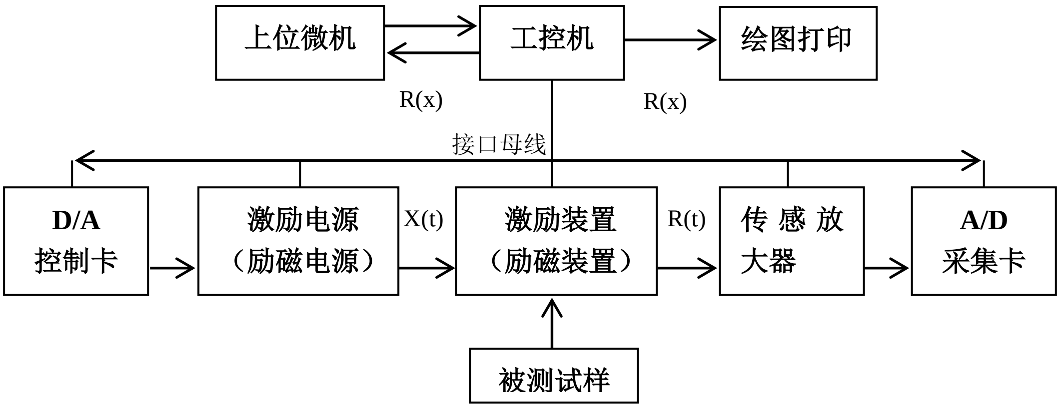


图 2.7 磁性材料测量装置原理图

本实验采用冲击法测量 1J36 坡莫合金的 B_{3200}，即在 $H=3200A/m$ 下的磁感应强度。测试过程中将试样放置于箱式炉中随炉升温，测试温度为室温~200℃连续可调，取若干温度测试点，每个测试温度点需保温 30 分钟后再进行测量，以确保测试结果与温度的匹配性。选取 3 个试样进行测试，取各温度点磁感应强度的平均值进行数据统计。

磁感应强度 B 与磁场强度 H 及磁化强度 M 的关系为：

$$B=\mu_0 H+\mu_0 M$$

其中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}SI$ 为真空磁导率，H 为磁场强度，B 为磁感应强度，M 为磁化强度，$\mu_0 M$ 为磁极化强度。

2.2.4 软磁环转动过程观察分析方法

采用恒定热源，通过调整磁体距离参数（Y），最终实现软磁环转动实验测试数据与建立的运动模型相互印证。

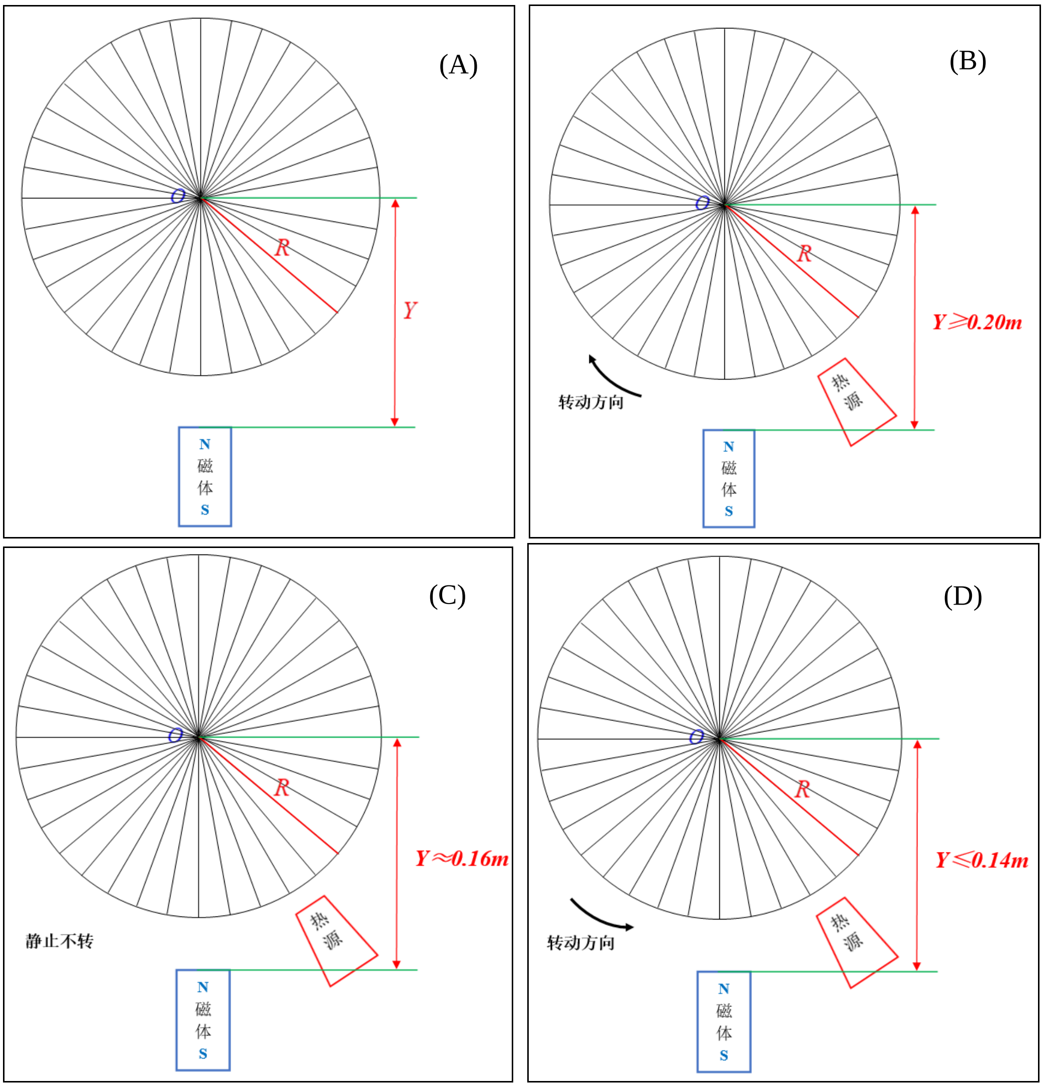


图 2.8 软磁环在转动过程的几种状态示意图

软磁环转动过程的观察，采用照片采集+视频记录的方式进行，详细记录各控制参数。为剔除转动过程中其他干扰因素的影响，测试过程中，只改变磁体距离软磁环圆心 Y 值，其它参数不变。具体测试方法为：

（1） 首先，将实验平台与软磁环进行连接固定，使软磁环可以以圆心为轴，在很微小的力的作用下自由旋转；

（2） 将磁体固定在软磁环一侧，使其与软磁环保持同一水平面，N 极端面靠近并平行于软磁环表面，测量并记录 N 极端面与软磁环圆心的距离 Y 如图 2.8（A）所示；

（3） 恒定热源固定于磁体右侧，与软磁环圆心及磁体连线成 12°左右夹角，距离软磁环约 5mm，实验过程中通过吹风机进行恒定热量输送；

（4） 调整 Y 的距离，使 Y≥0.20m，进行恒定热源加热 5min，观察并记录软

磁环的转动过程，如图 2.8（B）所示，之后停止热源加热并使转动平台冷却至室温，准备后续实验；

（5） 调整 Y 的距离，使 Y=0.16m，进行恒定热源加热 5min，观察并记录软磁环静止不动的位置，如图 2.8（C）所示，之后停止热源加热并使转动平台冷却至室温，准备后续实验；

（6） 调整 Y 的距离，使 Y≤0.14m，进行恒定热源加热 5min，观察并记录软磁环的反向转动过程，如图 2.8（D）所示，之后停止热源加热并使转动平台冷却至室温，全部实验结束。

第三章 软磁环热磁作用下运动模型的建立

3.1 磁体在软磁环上产生磁场的方程

3.1.1 库仑定律

库仑定律[7]的定义：真空中两个点电荷 i 和 j 的相互作用力 F_{ij}，跟两电荷电量 q_i 和 q_j 的乘积成正比，跟其距离 r 的二次方成反比，作用力的方向在它们的连线上 。用公式表示为：

$$F_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r^2} \tag{3.1}$$

电场强度定义为单位正电荷所受到的作用力[8]。因此点电荷产生的静电场为：

$$E_i = \frac{F_{ij}}{q_j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r^2} \tag{3.2}$$

3.1.2 磁荷产生的磁场

设真空中有磁荷 q_m， μ_0 为真空磁导率；用点电荷的库仑定律得到点磁荷的库仑定律。因而得到静磁场[9]为：

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m}{r^2} \tag{3.3}$$

式中的磁荷为：

$$q_m = \int \rho_m dV = \int \sigma_m dS \tag{3.4}$$

式中， $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$， $\sigma_m = \mu_0 \vec{M} \cdot \vec{n}$，分别为体磁荷密度和面磁荷密度，参见附录 1 和附录 2。

3.1.3 磁体在软磁环上产生的环向磁场

假设磁体内部均匀磁化，则磁体内部磁荷密度为零，仅在磁体端面存在非零的磁荷密度，参见附录 2。

设磁体端面的面磁荷密度为σ_m，则：

$$\sigma_m = \mu_0 \overline{M} \cdot \vec{n} = \mu_0 M_P \tag{3.5}$$

M_P为永磁体的磁化强度。

于是，磁体端面上磁荷q_m产生的磁场为：

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m}{r^2} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{\sigma_m S}{r^2} \tag{3.6}$$

参考附录 3，可以将模型简化为二维处理。

如图 3.1 所示，设 PS 与 P 点的切线夹角为ϕ，则 S 点的磁荷在 P 点产生的环向磁场为：

$$H_\theta = \frac{\sigma_m S}{4\pi\mu_0}\frac{\cos\phi}{r^2} \tag{3.7}$$

（3.7）式下标θ表示环向分量，是由（3.6）式乘以$\cos\phi$得到。

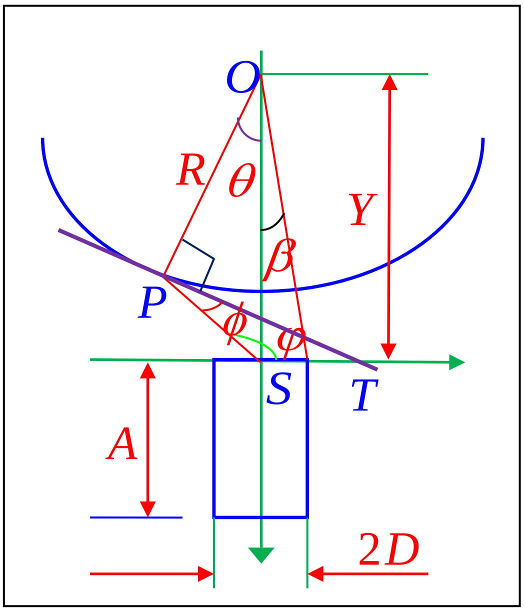


图 3.1 二维极坐标图

采用极坐标，将软磁环的圆心O设为极坐标的原点，向下过永磁体的对称线为极轴。R为软磁环的半径，Y为圆心O到永磁体端面的距离。

设$\lambda = \dfrac{Y}{R}$，$\lambda' = \dfrac{Y}{R+A}$，$r = PS$，$R = OP$，$Y = OS$，$\theta = \angle POS$，$\beta = \dfrac{D}{Y}$，$\beta' = \dfrac{D}{Y+A}$，由（3.7）式（推导过程**参见附录 4**）可得环向磁场：

$$H_\theta(\theta)=H_\theta(\lambda,\theta)-H_\theta(\lambda',\theta)=\frac{M_P S}{4\pi R^2}\left[\Phi(\lambda,\theta)-\Phi(\lambda',\theta)\right] \quad (3.8)$$

式中,

$$\Phi(\lambda,\theta)=\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}}-\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}}\right]$$

$$\Phi(\lambda',\theta)=\frac{1}{\lambda'^2}\left[\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}}-\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}}\right]$$

设 $R=0.114m$, $Y=0.15m$, $A=0.06m$, $D=0.015m$, 则 $\lambda=1.3158$, $\lambda'=1.8421$, $\beta=\frac{D}{Y}=0.1$, $\beta'=\frac{D}{Y+A}=0.07143$。磁体端面面积用 S_P 表示,则以 $\frac{M_P S_P}{4\pi R^2}$ 为单位由(3.8)式得 $H_\theta=H_\theta(\theta)$ 磁场环向分布图 3.2。

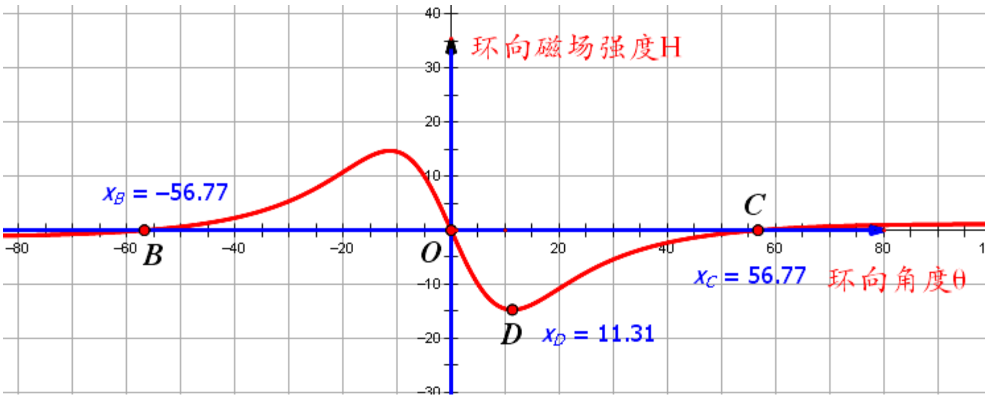


图 3.2 磁场的环向分布

图 3.2 中有两个磁场极大值,分别在 $\theta=\pm 11.31^o$;还有两个零点,分别在 $\theta=\pm 56.77^o$。

3.1.4 磁体产生的环向磁场梯度

将(3.8)式对 θ 求导数,得到其环向梯度,详细推导见附录 5。

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H_\theta(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{R}\left[\frac{\partial H_\theta(\lambda,\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta(\lambda',\theta)}{\partial\theta}\right]=\frac{M_P S_P}{4\pi R^3}\left[G(\lambda,\theta)-G(\lambda',\theta)\right] \quad (3.9)$$

其中(3.9)式中各项为:

$$G(\lambda,\theta)=\left[\frac{\lambda\sin(\theta+\beta)-\sin 2(\theta+\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)\right)^{3/2}}-\frac{\lambda\sin(\theta-\beta)-\sin 2(\theta-\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)\right)^{3/2}}\right]$$

$$G(\lambda',\theta)=\left[\frac{\lambda'\sin(\theta+\beta')-\sin 2(\theta+\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')\right)^{3/2}}-\frac{\lambda'\sin(\theta-\beta')-\sin 2(\theta-\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')\right)^{3/2}}\right]$$

设（3.9）式参数值同图 3.2，得到图 3.3，则 $g(\theta)=\frac{1}{R}\frac{\partial H_\theta(\theta)}{\partial\theta}$ 磁场环向梯度分布图。

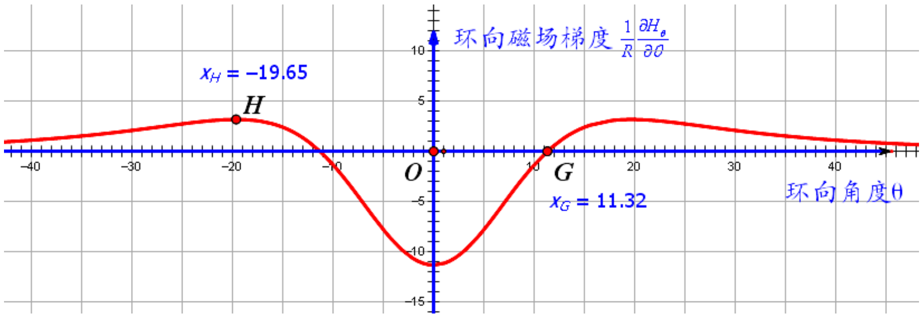


图 3.3 环向磁场的环向梯度分布

磁体产生的环向磁场梯度在 $\theta=0^o$ 、$\theta=\pm19.65^o$ 处有极值点，而在 $\theta=\pm11.32^o$ 处为零点。

3.2 磁体在软磁环上产生的环向作用力（磁力）方程

3.2.1 软磁环的环向磁化强度

由于软磁环是筒形结构，其径向壁薄，退磁场很大，而在环向（即软磁环切向）退磁场为零，所以环向的磁化率几乎就等于软磁环材料的磁化率。

软磁环在磁场 $H_\theta(\theta)$ 作用下其磁化强度为：

$$M_S(\theta)=\chi H_\theta(\theta) \tag{3.10}$$

其中， χ 是软磁环材料的相对磁化率[10]。

3.2.2 磁体产生的磁力分布

已知 P 点的磁能密度为 $E_m=\frac{1}{2}\overline{H}\cdot\overline{B}$，而对于磁介质有 $\overline{B}=\mu_0\left(\overline{H}+\overline{M}\right)$，故：

$$E_m=\frac{1}{2}\overline{H}\cdot\overline{B}=\frac{1}{2}\mu_0\overline{H}\cdot\left(\overline{H}+\overline{M}\right)=\frac{1}{2}\mu_0H^2+\frac{1}{2}\mu_0HM=\frac{1}{2}\mu_0H^2+\frac{1}{2}\mu_0\chi H^2 \tag{3.11}$$

式中第一项是磁场的能量密度，第二项是磁化介质的能量密度，磁介质的作用力主要由第二项决定。

磁场对磁介质的单位体积作用力即磁力密度的环向分量为：

$$f_\theta=-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}\mu_0\chi H_\theta^2\right)=-\frac{\mu_0\chi H_\theta}{R}\frac{dH_\theta}{d\theta} \tag{3.12}$$

将（3.8）式代入（3.12）式得到环向磁力密度 f_θ：

$$f_\theta(\theta)=-\frac{\mu_0}{R}\cdot\left(\frac{M_P S_P}{4\pi R^2}\right)^2\cdot\chi\left[\Phi(\lambda,\theta)-\Phi(\lambda',\theta)\right]\left[G(\lambda,\theta)-G(\lambda',\theta)\right]$$

由于实验过程中 M_p, S_P, R 始终保持不变，可以看作常数，所以不妨设：

$$k=-\frac{\mu_0}{R}\cdot\left(\frac{M_P S_P}{4\pi R^2}\right)^2$$

则环向磁力密度可以表示为：

$$f_\theta(\theta)=k\chi\left[\Phi(\lambda,\theta)-\Phi(\lambda',\theta)\right]\left[G(\lambda,\theta)-G(\lambda',\theta)\right] \tag{3.13}$$

3.2.3 软磁环所受到的总磁力

假设软磁环的径向厚度为 δ，轴向的尺寸为 h，因为环向磁力不均匀，取很小的一个微分 $dl=Rd\theta$，则可以认为在软磁环上的微体积 $dV=h\delta Rd\theta$ 内磁力分布是均匀的，都是 $f_\theta(\theta)$。此时这个微体积所受的环向磁力为：

$$dF_\theta=h\delta Rf_\theta(\theta)d\theta \tag{3.14}$$

整个软磁环所受到磁力是将整个软磁环的微体积所受磁力的和，即将（3.14）式积分：

$$F_\theta=h\delta R\int_{-\pi}^{+\pi}f_\theta(\theta)d\theta$$

$$=-\mu_0 h\delta\cdot\left(\frac{S_P}{4\pi R^2}\right)^2\int_{-\pi}^{+\pi}(M_P)^2\chi\left[\Phi(\lambda,\theta)-\Phi(\lambda',\theta)\right]\left[G(\lambda,\theta)-G(\lambda',\theta)\right]d\theta \tag{3.15}$$

在软磁环处于温度均匀分布的条件下，（3.15）式为零。

3.3 软磁环温度分布拟合方程

3.3.1 磁性材料的温度特性

铁磁性材料的特点是具有一个居里温度[11,12]。在居里温度以下，磁化强度 M 随温度的升高而降低，当温度升高到居里温度及以上时，磁化强度 $M=0$。因此，软磁环的磁化强度是温度（T）的函数，：

$$M_S = M_S(T) \tag{3.16}$$

同样也就是说磁化率也是温度的函数。

本论文选用的软磁环材料，其磁化率在实验的温度范围内近似地随温度线性分布，故在本论文中采用线性拟合公式：

$$\chi(T) = \gamma(1-\alpha T) \tag{3.17}$$

根据实验数据，参见第四章 4.2 软磁环磁化强度与温度实验数据拟合，最终的相对磁化率为：

$$\chi(T) = 1601(1-0.00183T) \tag{3.18}$$

3.3.2 沿软磁环的温度分布

对单峰型的温度分布，我们采用的拟合公式为：

$$T(\theta) = \xi\left[(\theta+b)^{\frac{1}{3}} - (\theta-b)^{\frac{1}{3}}\right] + T_r \tag{3.19}$$

式中，温度波峰（温度极大值）位于 $\theta_0 = 0^o$ 处，ξ 为待定系数，b 是与波峰宽度有关的量，T_r 是背景温度。

当软磁环上的温度波峰位于 $\theta_0 \neq 0^o$ 时，则（3.19）式变为：

$$T(\theta) = \xi\left[(\theta-\theta_0+b)^{\frac{1}{3}} - (\theta-\theta_0-b)^{\frac{1}{3}}\right] + T_r \tag{3.20}$$

通过第四章 4.3 实测软磁环的温度分布结果及进行拟合，拟合后的公式为：

$$T(\theta) = 12\cdot\left[(\theta-\theta_0+16)^{\frac{1}{3}} - (\theta-\theta_0-16)^{\frac{1}{3}}\right] + 40 \tag{3.21}$$

取 θ_0=12^o（实际测试角度），按（3.20）式计算得到 $T=T(\theta)(^oC)$，（3.21）式计算的温度分布线如图 3.4 所示：

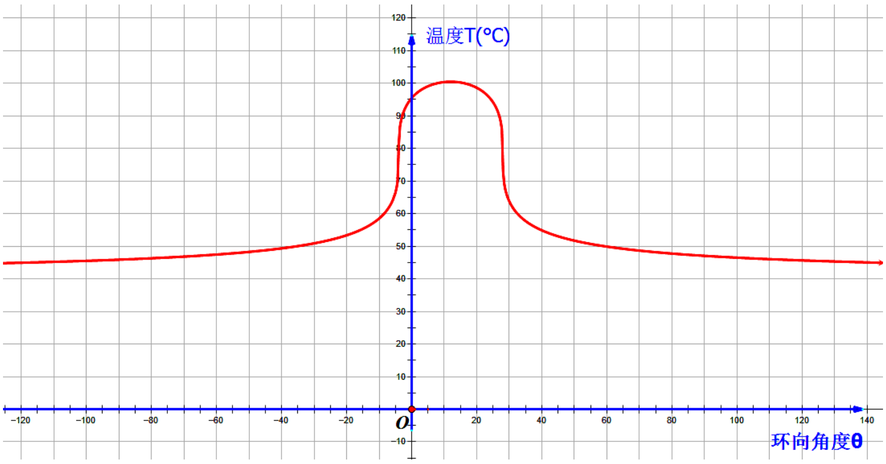


图 3.4 方程（3.21）展现的温度分布

如果采用热力学温标，则（3.21）式写为：

$$T(\theta)=12\cdot\left[(\theta-\theta_0+16)^{\frac{1}{3}}-(\theta-\theta_0-16)^{\frac{1}{3}}\right]+313 \qquad (3.22)$$

3.3.3 金属软磁环材料磁化率的环向分布

由（3.22）式和（3.17）式可以得到软磁环的相对磁化率随环向角度的分布：

$$\chi(\theta)=\gamma\left\{1-\alpha T_r-\alpha\xi\left[(\theta-\theta_0+b)^{\frac{1}{3}}-(\theta-\theta_0-b)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}$$

$$=\gamma(1-\alpha T_r)\left\{1-\frac{\alpha\xi}{1-\alpha T_r}\left[(\theta-\theta_0+b)^{\frac{1}{3}}-(\theta-\theta_0-b)^{\frac{1}{3}}\right]\right\} \qquad (3.23)$$

对应于（3.18）和（3.22）式，取 $T_r=313$，$\xi=12$，$\alpha=0.00183$，$\gamma=1601$，则温度以绝对温标为单位的相对磁化率随角度的分布变为：

$$\chi(\theta)=684\left\{1-0.0514\left[(\theta-\theta_0+b)^{\frac{1}{3}}-(\theta-\theta_0-b)^{\frac{1}{3}}\right]\right\} \qquad (3.24)$$

取 $\theta_0=0°$，$b=16°$ 的磁化率沿软磁环环向的分布曲线如图 3.5 所示。

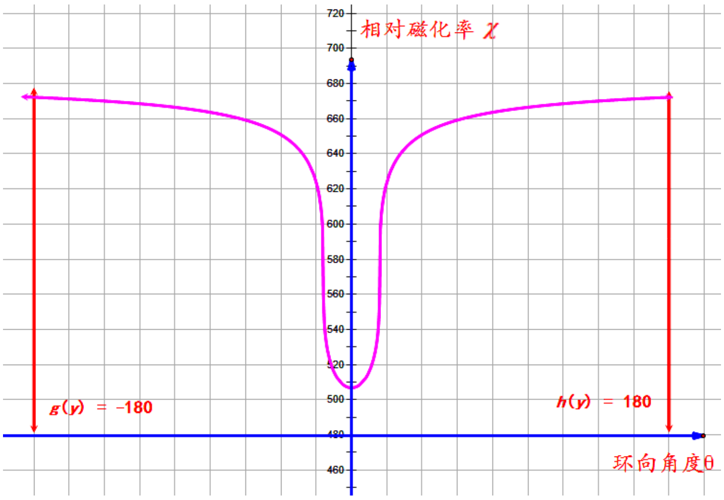


图 3.5 相对磁化率沿软磁环环向的分布图

3.4 软磁环在热磁作用下的运动模型

3.4.1 软磁环转动的运动分析

在软磁环是薄壁圆筒型的情况下，金属软磁环的散热情况比较好。所以在软磁环转速不太快的情况下，环上的温度分布能够保持动态稳定。

将（3.8）式计算的环向磁场 $H_\theta(\theta)$，（3.9）式计算的磁场梯度 $\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial H_\theta(\theta)}{\partial\theta}$，（3.24）式计算的磁化率 $\chi(\theta)$，代入（3.13）式计算相对磁力密度，可得到磁力密度的分布曲线。

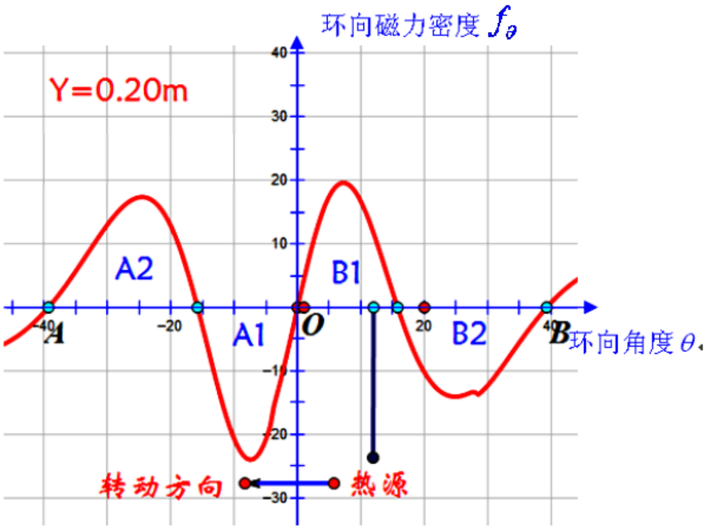


图 3.6　Y=0.20m 时环向相对磁力密度分布

设定热源固定放置在 $\theta=12^{o}$ 位置，改变 Y 值将使软磁环发生正反两个不同

方向的转动。

当$Y=0.20m$时，取$R=0.114m$， $A=0.06m$，$D=0.015m$，$b=16^o$，$\xi=12$，$\theta_0=12^o$，此时，$\lambda=1.7544$，$\lambda'=2.2807$，$\beta=4.2972$，$\beta'=3.3055$。则由（3.13）式计算的相对磁力密度 f_θ 与 θ 关系曲线如图 3.6。此时，区域面积$(B1+A2)<(B2+A1)$，逆时针方向驱动力小于顺时针方向驱动力，故软磁环向顺时针方向转动。

当$Y=0.16m$时，其它参数不变，由（3.13）式计算的环向相对磁力密度的分布为图 3.7 所示：

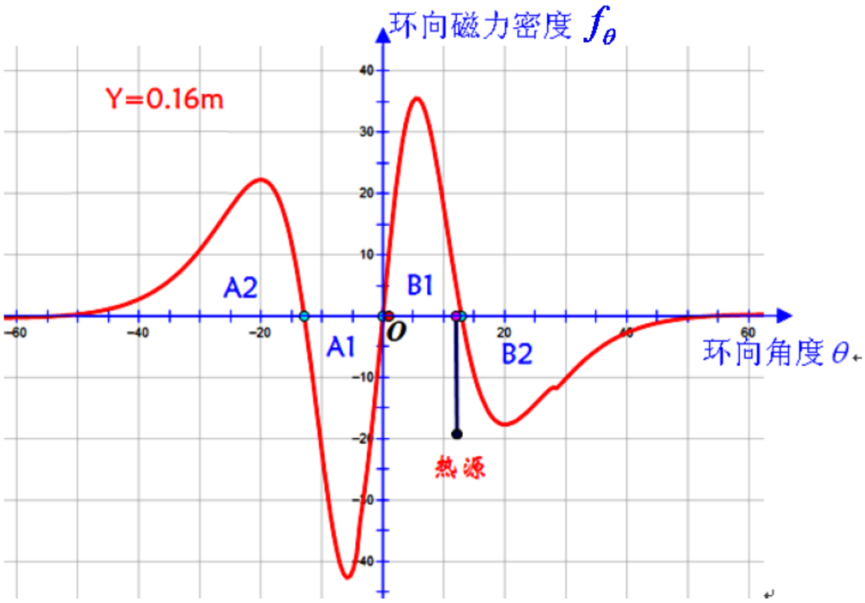


图 3.7 Y=0.16m 时环向相对磁力密度分布

此时$(B1+A2)$与$(B2+A1)$面积近似相等，顺时针方向驱动力与逆时针方向驱动力两者之差小于摩擦阻力，故软磁环保持原来静止状态。

当$Y=0.14m$时，其它参数不变，计算环向相对磁力密度的分布为图 3.8 所示。此时由于区域面积$(B1+A2)>(B2+A1)$，逆时针方向驱动力大于顺时针驱动力，故软磁环向逆时针方向转动。

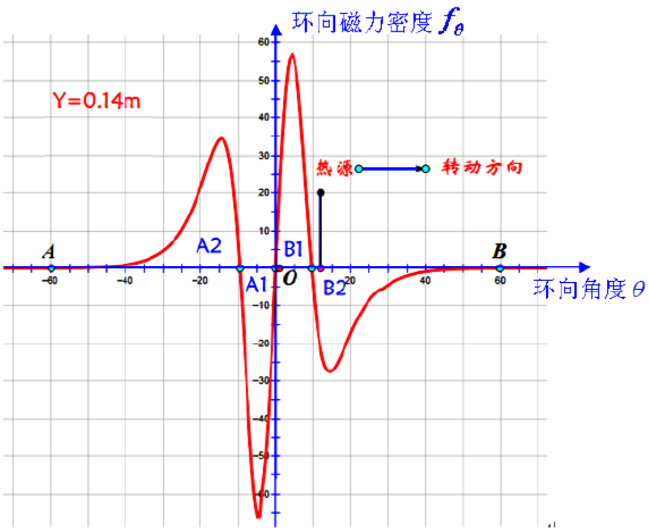


图 3.8　Y=0.14m 时环向相对磁力密度分布

上述是采用软磁环的磁化强度与温度的关系按线性分布进行计算，这是一个近似的结果。计算表明，当磁体的位置 Y 值发生改变时，横轴上环向相对磁力密度过零点位置也随之发生改变，即整个磁力密度分布曲线发生变化。图 3.6 所示磁力密度过零点位置在热源的右侧，随着 Y 值的减小，到图 3.8 所示磁力密度过零点位置移到热源的左侧。合磁力也因为此消彼长而发生了方向的改变，即软磁环转动的方向随 Y 值的变化发生了改变。

3.4.2 软磁环双向转动临界条件分析

以 $Y=0.15m$ 举例，取 $R=0.114m$， $A=0.06m$，$D=0.015m$，$b=16^o$，$\xi=12$，$\theta_0=12^o$，则 $\lambda=1.3158$，$\lambda'=1.8421$，$\beta=\frac{D}{Y}\cdot\frac{180}{\pi}=5.7296$，$\beta'=\frac{D}{Y+A}\cdot\frac{180}{\pi}=4.0926$。由（3. 13）式计算的环向相对磁力密度分布为：

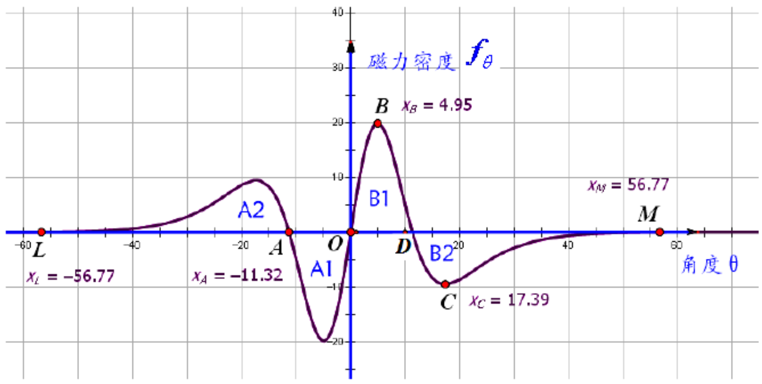


图 3.9　$Y=0.15m$ 环向相对磁力密度的分布曲线图

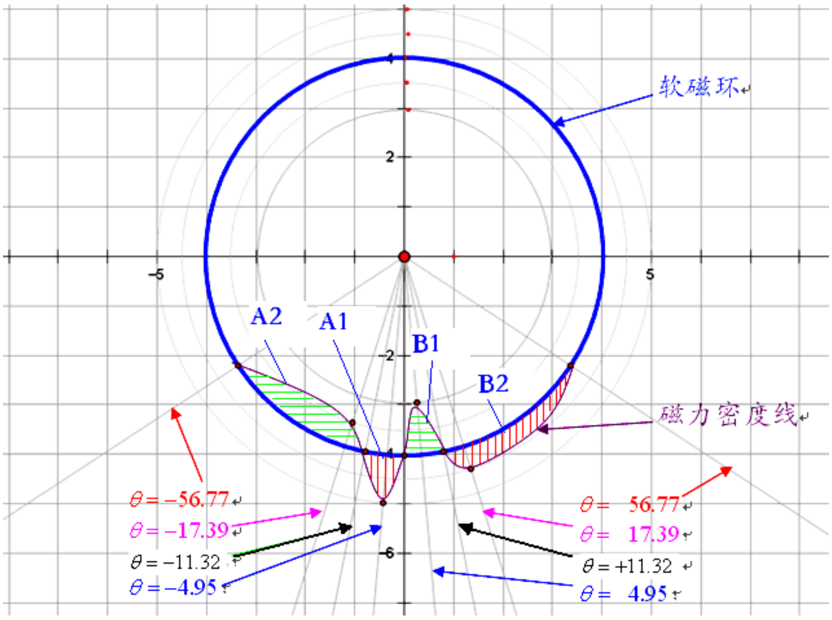


图 3.10 软磁环受磁力密度的示意图

计算得出的图 3.9 表明，在$\theta\in[-45^o,+45^o]$区间，除$\theta=0$外曲线还有两个零点（A，D），同时曲线还存在四个磁力极值点。图中$A1, A2, B1, B2$四个区域，每个区域的积分面积代表了软磁环各区段所受的磁力。由于四个区域面积距离磁体较近，它们代表了软磁环所受磁力的主要部分，以下的理论分析主要基于$A1, A2, B1, B2$四个区域展开。

$A2, B1$区域位于横轴上方，代表软磁环受到逆时针方向磁力的驱动；$A1, B2$区域位于横轴下方，代表软磁环受到顺时针方向磁力的驱动。

以上四个区域所代表磁力的合力决定了软磁环最终的转动方向。通过图 3.10 可以更直观的体现软磁环受磁力的分布情况。图 3.10 中，在软磁环的 A2、B1 区域和 A1、B2 区域对软磁环施加的磁力方向是相反的。A2 和 B1 区域的积分面积表示逆时针驱动力的合力大小，A1 和 B2 区域的积分面积表示顺时针驱动力的合力大小。

在热源位置恒定的条件下，磁体位置发生变化时，当（A2+B1）－（A1+B2）＞0 时，软磁环沿逆时针方向转动；当（A2+B1）－（A1+B2）=0 时，软磁环不发生转动；当（A2+B1）－（A1+B2）＜0 时，软磁环沿顺时针方向转动。

第四章 软磁环运动实验及数值拟合

4.1 磁体在软磁环上产生磁场的测量及分析

根据图 2.2 所示的测试环向磁场示意图，将圆盘状非金属托盘分成若干等份（按 $\frac{\pi}{16}$ 进行划分），将磁体固定在距非金属托盘的一定位置（距离=Y-R，选取 10mm、20mm、30mm 三个典型距离），以磁体正对方向位置为 0 点，采用特斯拉计沿托盘切线方向逐一放置进行测试。测量结果如表 4.1 所示。第一轮测试结束后，将磁体 N 极和 S 极互换，进行对比测量如表 4.2。测试结果表明互换 N、S 极对测量影响不大。最终以表 4.1 所示将测量结果进行汇总分析，与计算模型结果进行拟合。

表 4.1 磁体（N 极）产生的环向磁场（单位：mT）的测量结果

角度 \ 距离	$-\frac{5\pi}{16}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{16}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$
10mm	3	5	11	27	86	0	-81	-21	-8	-6	-2
20mm	3	5	10	22	40	0	-46	-18	-7	-6	-2
30mm	3	5	8	15	20	0	-30	-14	-7	-3	-2

表 4.2 磁体（S 极）产生的环向磁场（单位：mT）的测量结果

角度 \ 距离	$-\frac{5\pi}{16}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{16}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$
10mm	-2	-5	-10	-25	-82	0	81	20	8	6	2
20mm	-2	-5	-9	-23	-37	0	44	16	7	5	2
30mm	-1	-4	-8	-13	-20	0	28	13	6	3	2

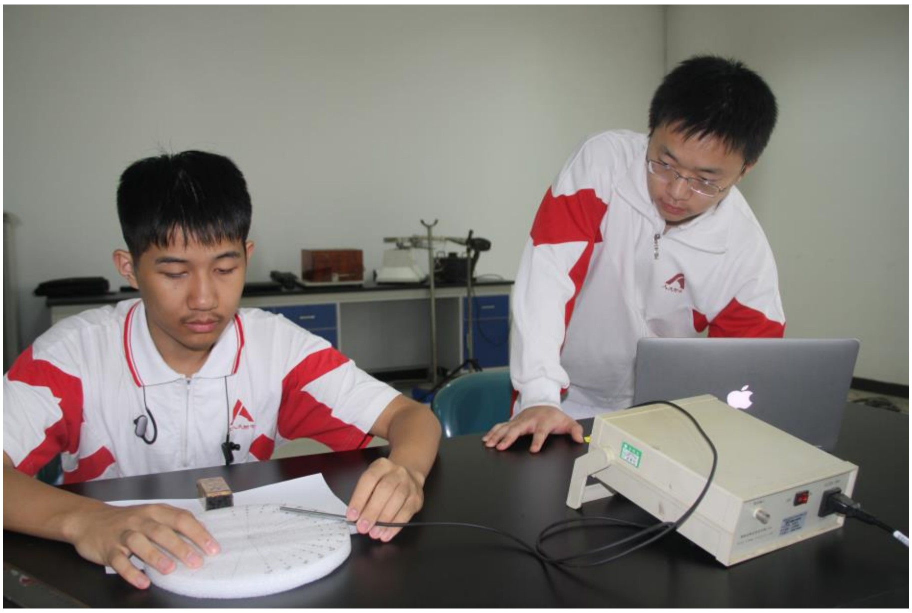


图 4.1 环向磁场测量过程

设 $R=0.114m$， $Y=0.124m$， $A=0.06m$， $D=0.015m$， 则 $\lambda=1.0877$，$\lambda'=1.6140$，$\beta=\dfrac{180D}{\pi Y}=6.9309$，$\beta'=\dfrac{180D}{\pi(Y+A)}=4.6709$。Y-R =10mm 时环向磁场测量结果与用（3.8）式计算结果在调节缩放系数后拟合情况如图 4.2 所示。

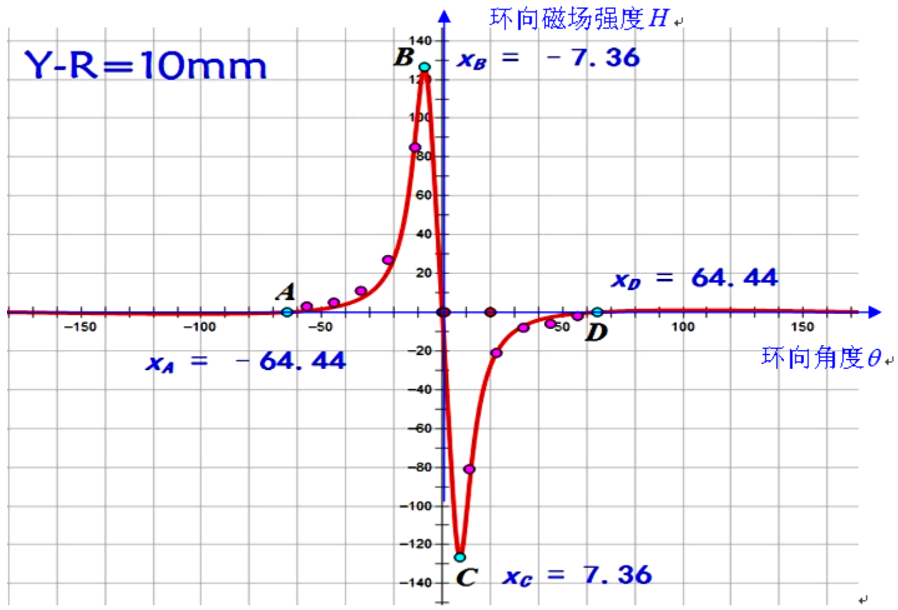


图 4.2 Y-R =10mm 时环向磁场测量结果与计算结果拟合

设 $R=0.114m$， $Y=0.134m$， $A=0.06m$， $D=0.015m$， 则 $\lambda=1.1754$，$\lambda'=1.7018$，$\beta=\dfrac{180D}{\pi Y}=6.4137$，$\beta'=\dfrac{180D}{\pi(Y+A)}=4.4301$。Y-R =20mm 时环向磁

场测量结果与用（3.8）式计算结果在调节缩放系数后拟合情况如图 4.3 所示。

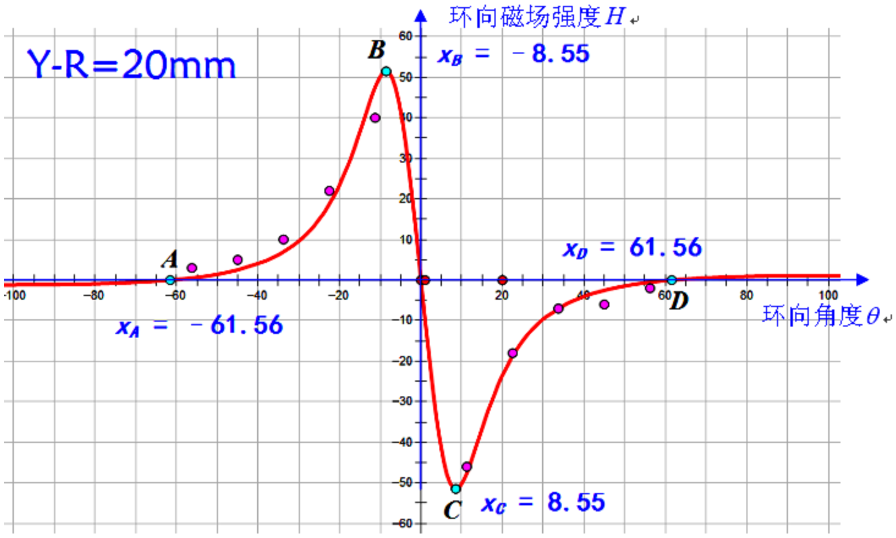


图 4.3 Y-R =20mm 时环向磁场测量结果与计算结果拟合

设 $R=0.114m$， $Y=0.144m$， $A=0.06m$， $D=0.015m$， 则 $\lambda=1.2632$，$\lambda'=1.7895$， $\beta=\dfrac{180D}{\pi Y}=5.9713$， $\beta'=\dfrac{180D}{\pi(Y+A)}=4.2151$。Y-R =30mm 时环向磁场测量结果与用（3.8）式计算结果在调节缩放系数的拟合情况如图 4.4 所示。

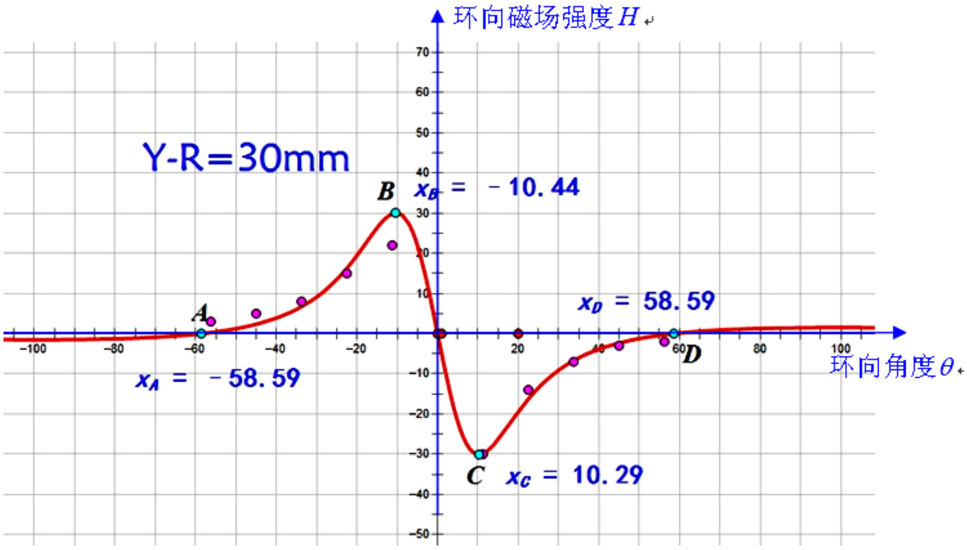


图 4.4 Y-R =30mm 时环向磁场测量结果与计算结果拟合

经过以上三组的测量及计算模型拟合，结果十分接近。证明本论文采用的计算公式（3.8 式）较为真实的反应出环向磁场的分布情况。

4.2 软磁环材料磁化强度与温度关系的测量及分析

图 4.5 不同温度下的磁性材料的磁化强度的测量过程

采用 NIM-2000S 软磁材料直流磁性测量系统测量软磁环材料在不同温度下的磁极化强度（图 4.5），得到的数据如表 4.3。

表 4.3 软磁环材料的磁极化强度 $\mu_0 M_S$（单位：T）随温度变化测量结果

温度℃	24	40	60	80	100	130	160	190	200
$\mu_0 M_S$	1.324	1.293	1.239	1.176	1.041	0.887	0.715	0.477	0.276

将温度转换为开氏温度，对磁极化强度 $\mu_0 M_S$ 与温度 T 的关系进行线性回归处理，得到：

$$\mu_0 M_S = a + bT \qquad (4.1)$$

将实测点与回归直线拟合到同一个图中，如图 4.6 所示。

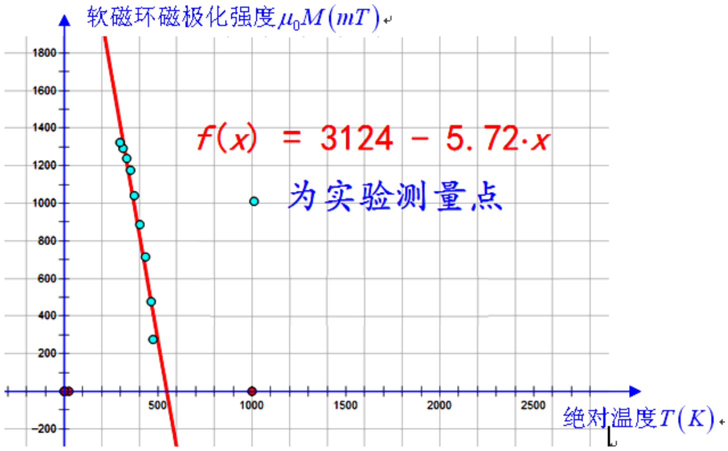


图 4.6 实测磁极化强度与温度的关系图

由 $\dfrac{5.72}{3124} = 0.00183$，得：

$$\chi = \chi_0 (1 - 0.00183T) \qquad (4.2)$$

其中，线性相关系数为 $r = -0.978$。

在 $T = 298K$、$H = 3200\,A/m = 40Oe$ 时，$B = 1.324T = 13240Gs$，即：

$$\chi_{298} = \frac{B_H}{\mu_0 H} \approx \frac{13240}{40} = 728$$

则：

$$\chi_0 = \frac{\chi_{298}}{1 - 0.00183 \times 298} = 1601$$

由此得到回归方程：$\chi = 1601(1 - 0.00183T)$ （4.3）

由于软磁材料的磁化率受温度等因素影响，这里只能给出在一定范围的近似值。本线性近似的适应范围在 T=290-500K。

4.3 软磁环温度分布的测量及分析

实验测量了局部加热软磁环时软磁环上的温度，得到了一个的单峰温度分布。温度曲线关于加热位置呈对称分布，在较热源比较远端，温度趋于一个稳定值。

经过分析，用一个在正区间是单调递减函数、且满足对称分布、在较远处趋于零的函数来拟合，将此函数加上背景温度后，基本上与实验的结果相吻合。拟合函数如下：

$$T(\theta)=\xi\left[(\theta+b)^{\frac{1}{3}}-(\theta-b)^{\frac{1}{3}}\right]+T_r \qquad (4.4)$$

式中，T_r 是背景温度，也可称为环境温度。

图 4.7 软磁环温度测量过程

根据第二章的测试方法，搭建起实际的测试平台，将软磁环固定在非磁性金属托盘上，并将软磁环分成若干等份（约每隔 6 度），将磁体移去，将测温仪固定在距软磁环的特定位置。通过快速旋转软磁环指定测试点到达测温仪有效测试范围进行数据采集，采集完成后快速将软磁环转回到起始位置，经过 30s 加热稳定后，进行下一个点的测量（图 4.7）。以此往复，测量距热压±57 度范围内的软磁环温度梯度分布得到表 4.4。

表 4.4 软磁环温度分布测量结果

位置 $\theta\left(^{o}\right)$	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3
温度 $T\left(^{o}C\right)$	48.4	49.3	49.6	51.9	51.9	57.6	61.5	85.8	95.8	101.9

位置 $\theta\left(^{o}\right)$	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57
温度 $T\left(^{o}C\right)$	100.7	98.5	89.1	66.3	53.1	52.0	51.4	49.3	50.1	48.2

根据测量结果分析，结合软磁环温度分布（4.4）方程进行拟合，得到图 4.8。拟合出来的结果是 $b=16^{o}$， $T_r=40^{o}C$，换算成开氏温度则为 $T_r=313K$ 。

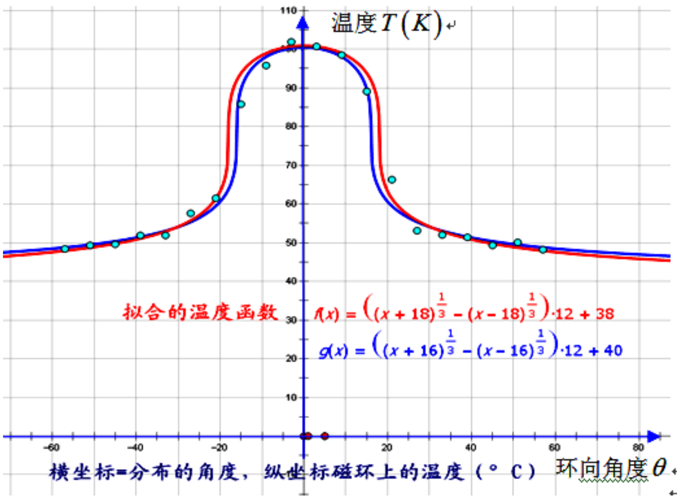


图 4.8 软磁环温度分布测量结果与计算结果拟合

4.4 软磁环在热和磁作用下运动情况的观测及分析

本节将针对第三章建模计算得出的随磁体距离 Y 变化，软磁环将产生顺时针转动、逆时针转动、临界条件附近停止转动三个状态进行实验验证。为剔除转动过程中其他干扰因素的影响，测试过程中，只改变磁体距离软磁环圆心 Y 值，其它参数不变。

4.4.1 磁体位置 Y =0.20m 时对软磁环运动的观测与分析

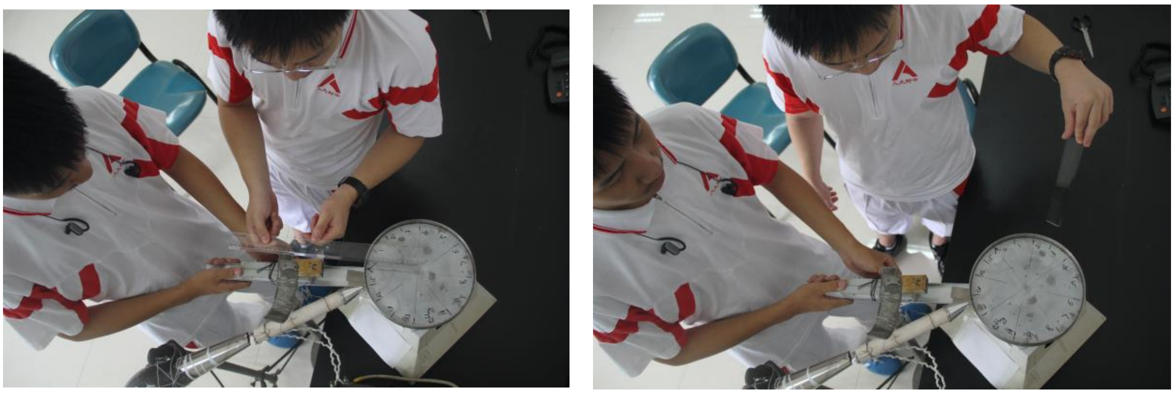


图 4.9 转动平台顺时针转动状态

按 2.2.4 中实验要求将实验平台格实验参数调整到位，测量并记录 N 极端面与软磁环圆心的距离 Y，在 Y=0.20m 时进行实验观察，用视频和图像记录软磁环顺时针转动的全过程，如图 4.9 所示，之后停止热源加热并使转动平台冷却至室温。

通过实验观察发现，磁体在 Y=0.20m 时，受恒定热源加热的软磁环经一段时间后，开始顺时针转动。经过对此时软磁环受到总磁力的计算得到图 4.10 曲线。图 4.10 中横坐标为环向角度，总磁力 F 通过计算结果为负值，应该发生顺时针的转动。且 B 点位于热源 O 的右侧，与磁体负向呈大约 15.77° 角。

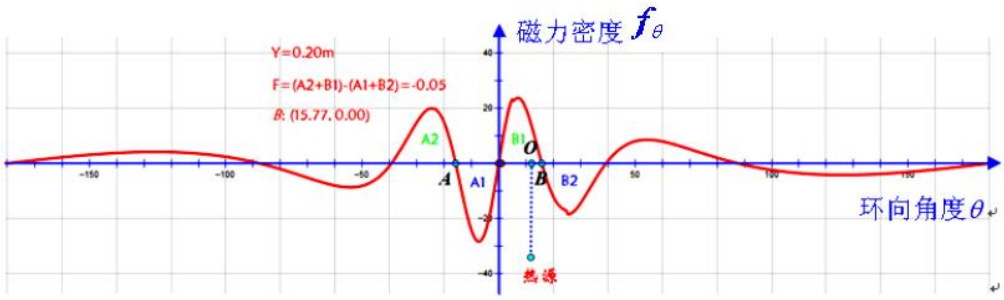


图 4.10 Y=0.20m 软磁环上相对磁力密度分布情况

4.4.2 磁体位置 Y =0.16m 时对软磁环运动的观测与分析

调整 Y 的距离，在 Y=0.16m 时，进行恒定热源加热 5min，找到并记录软磁环静止不动的位置，用视频和图像记录软磁环顺时针转动的全过程，如图 4.11

所示，之后停止热源加热并使转动平台冷却至室温。

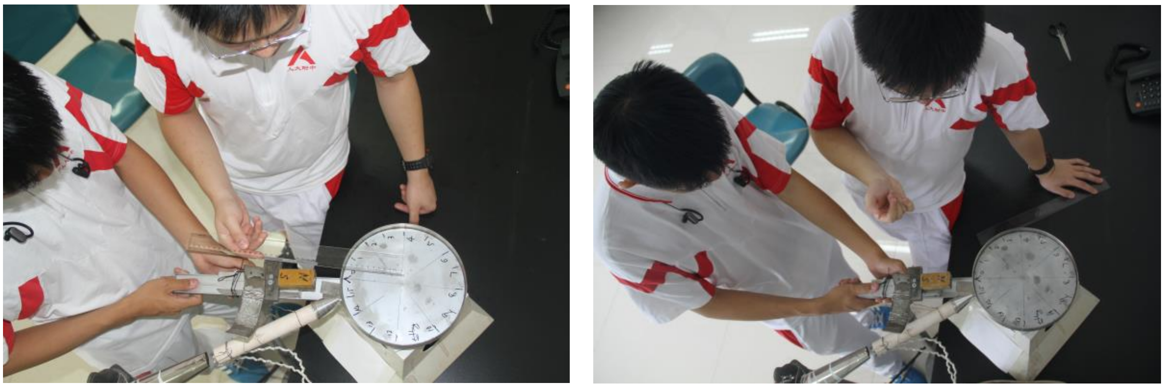


图 4.11 转动平台在在 Y=0.16m 时处于静止状态

通过实验观察，磁体在 Y=0.16m 时，受恒定热源加热的软磁环经一段时间后，仍处于静止状态。经过对此时软磁环受到总磁力的计算得到图 4.12 曲线。图 4.12 中横坐标为角度，总磁力 F 通过计算结果约等于 0，应该处于一个临界位置。 此时曲线上 B 点的坐标与热源 O 的坐标重合，与磁体负向呈大约 12.00°角。

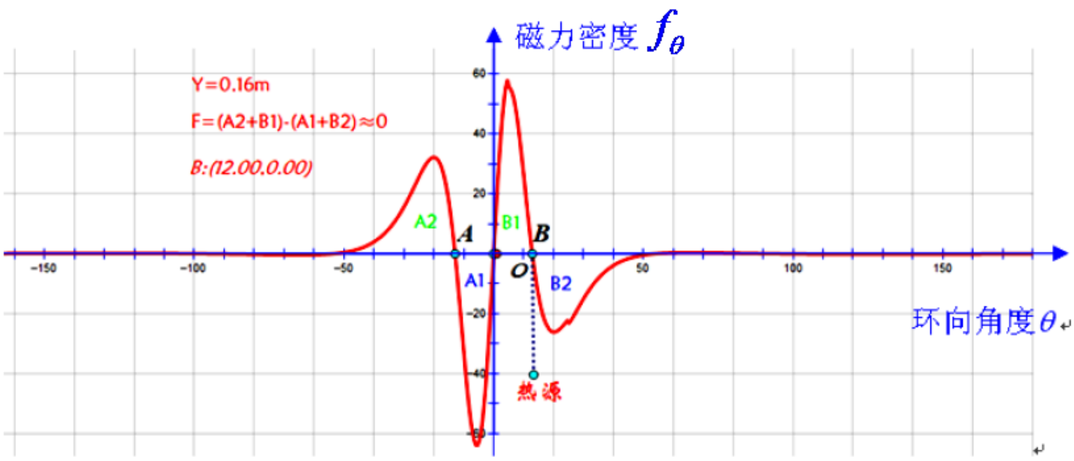


图 4.12 Y=0.16m 软磁环上相对磁力密度分布情况

4.4.3 磁体位置 Y =0.14m 时对软磁环运动的观测与分析

继续调整 Y 的距离，在 Y=0.14m 时，进行恒定热源加热 5min，用视频和图像记录软磁环逆时针转动的全过程，如图 4.13 所示。之后停止热源加热并使转动平台冷却至室温。

图 4.13 转动平台逆时针转动状态

通过实验观察发现，磁体在 Y=0.14m 时，受恒定热源加热的软磁环经一段时间后，开始逆时针转动。经过对此时软磁环受到总磁力的计算得到图 4.14 曲线。图 4.14 中横坐标为角度，总磁力 F 通过计算结果为正值，应该发生逆时针的转动。且此时曲线上 B 点位置已经位于热源 O 的左侧，与磁体负向呈大约 9.57° 角。

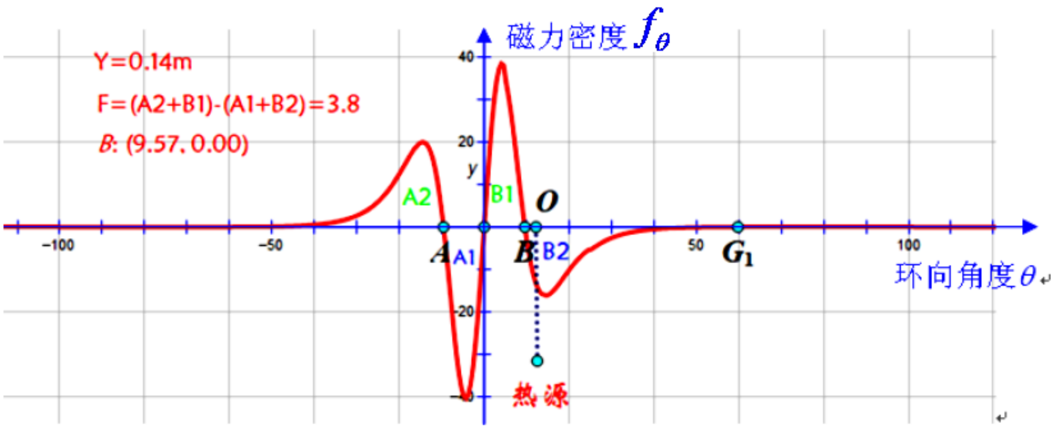


图 4.14 Y=0.14m 软磁环上相对磁力密度分布情况

以上实验结果表明，软磁环在热和磁共同作用下失去力的平衡而开始运动，运动方向和磁体到软磁环圆心的距离有密切的关系，距离从 0.2m 变化到 0.16m 时，软磁环从顺时针转动变为静止不动；继续减小距离至 0.14m，软磁环将发生逆时针转动。图 4.10 所示的零点位置 B 在热源的右侧，随着 Y 值的减小，到图 4.14 所示零点位置 B 已经移动到热源的左侧。同时，总磁力也因磁体位置 Y 值的逐渐减小而发生了顺时针转动、静止、逆时针转动的三个不同状态。

以上软磁环运动实验得到的结果验证了第三章所建立的运动模型，推演的软磁环运作规律，证明了本论文所建立的软磁环运动模型及分析的运动规律是准确、可靠的。

第五章 结论

1. 证实了软磁环在热磁作用下发生转动的物理现象，首次发现软磁环运动方向随磁体距离的变化可以发生双向转动；
2. 通过磁荷理论建立了软磁环的磁场强度和磁场梯度分布方程

2.1 磁场强度方程：

$$H_\theta(\theta)=H_\theta(\lambda,\theta)-H_\theta(\lambda',\theta)=\frac{M_P S}{4\pi R^2}\left[\varPhi(\lambda,\theta)-\varPhi(\lambda',\theta)\right]$$

其中

$$\Phi(\lambda,\theta)=\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}}-\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}}\right]$$

$$\Phi(\lambda',\theta)=\frac{1}{\lambda'^2}\left[\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}}-\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}}\right]$$

2.2 磁场梯度方程：

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H_\theta(\theta)}{\partial\theta}=\frac{M_P S}{4\pi R^3}\left[G(\lambda,\theta)-G(\lambda',\theta)\right]$$

其中

$$G(\lambda,\theta)=\left[\frac{\lambda\sin(\theta+\beta)-\sin 2(\theta+\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)\right)^{3/2}}-\frac{\lambda\sin(\theta-\beta)-\sin 2(\theta-\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)\right)^{3/2}}\right]$$

$$G(\lambda',\theta)=\left[\frac{\lambda'\sin(\theta+\beta')-\sin 2(\theta+\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')\right)^{3/2}}-\frac{\lambda'\sin(\theta-\beta')-\sin 2(\theta-\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')\right)^{3/2}}\right]$$

3. 通过实验测量，得到温度及相对磁化率在软磁环上分布的拟合方程

3.1 温度沿软磁环分布方程：

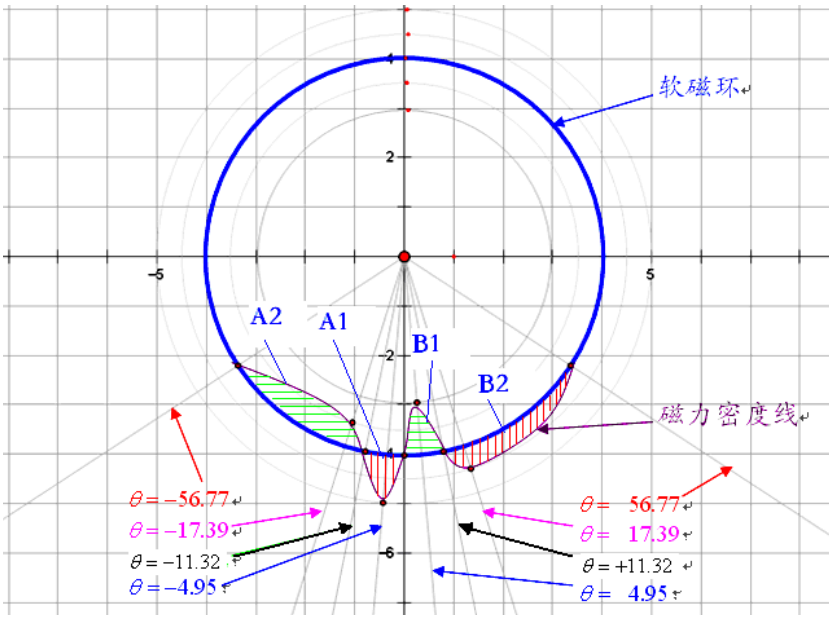
以热力学温标表示的（3.22）式

$$T(\theta)=12\cdot\left[(\theta-\theta_0+16)^{\frac{1}{3}}-(\theta-\theta_0-16)^{\frac{1}{3}}\right]+313$$

3.2 金属软磁环材料相对磁化率的环向分布方程：

$$\chi(\theta)=684\left\{1-0.0514\left[\left(\theta-\theta_0+b\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\theta-\theta_0-b\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}$$

4. 通过结论 2、3 建立起软磁环在磁场和温度场双重作用下的运动模型，采用磁力密度方程 $f_\theta(\theta)=k\chi\left[\Phi(\lambda,\theta)-\Phi(\lambda',\theta)\right]\left[G(\lambda,\theta)-G(\lambda',\theta)\right]$ 针对软磁环双向运动现象进行解释。软磁环受磁力密度示意图如下



软磁环受磁力密度的示意图

从上图可以看出，在软磁环的 A2、B1 区域和 A1、B2 区域对软磁环施加的磁力方向是相反的。A2 和 B1 区域的积分面积表示逆时针驱动力的大小，A1 和 B2 区域的积分面积表示顺时针驱动力的大小。当（A2+B1）-（A1+B2）＞0 时，软磁环沿逆时针方向转动；当（A2+B1）-（A1+B2）=0 时，软磁环不发生转动；当（A2+B1）-（A1+B2）＜0 时，软磁环沿顺时针方向转动。可见该运动模型可以很好的对软磁环双向运动现象进行解释。

5. 通过实验观测，当 Y=0.20m 时顺时针转动，Y=0.16m 时不发生转动，Y=0.14m 时逆时针转动，实验结果证明上述理论分析的合理性。

附录

附录 1. 静电场和静磁场

描述电磁场规律的是麦克斯韦方程组[13,14]:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\&\nabla\cdot\vec{B}=0\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

当电场和磁场不随时间变化时，称之为静电场和静磁场。对于静电场和静磁场则有:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\vec{E}=0\\&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\\&\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\&\nabla\cdot\vec{B}=0\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

式中，$\vec{E}$ 表示静电场，$\vec{H}$ 表示静磁场，$\vec{B}$ 表示磁感应强度，$\vec{D}$ 表示电位移矢量，$\vec{J}$ 是自由电流密度，ρ 是自由电荷密度。

对磁介质有:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}\tag{1-3}$$

$$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)\tag{1-4}$$

式中，ε_0 为真空介电常数，μ_0 为真空磁导率，$\vec{M}$ 为介质的磁化强度。

则将（1-3）式代入麦氏方程组（1-2）第三式得:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\tag{1-5}$$

该式为自由电荷在空间产生电场计算公式，称为静电场的泊松方程（因为其势函

数的方程$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$常称为泊松方程)。

由（1-4）式代入麦氏方程组（1-2）第四式得:

$$\mu_0\nabla\cdot\vec{M} + \mu_0\nabla\cdot\vec{H} = 0 \tag{1-6}$$

如果定义磁荷密度为:

$$\rho_m = -\mu_0\nabla\cdot\vec{M} \tag{1-7}$$

则将（1-7）式代入（1-6）式得:

$$\nabla\cdot\vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \tag{1-8}$$

与（1-5）式对比,（1-8）式为静磁场泊松方程（同样,磁场标势方程$\nabla^2\varphi_m = -\dfrac{\rho_m}{\varepsilon_0}$也为泊松方程)。

由于按（1-7）式定义的磁荷得到的静磁场公式（1-8）与静电场公式（1-5）完全相同,因此可以采用电场公式表示磁荷模型。

附录 2. 均匀磁化的磁体磁荷仅存在于表面

如图 A 所示，在磁体表面取一小体积V，面积为dS，厚度为h。

当$h\to 0$时，由散度的定义$\nabla\bullet\overline{M}=\lim\limits_{V\to 0}\dfrac{1}{V}\oiint\limits_S\overline{M}\cdot\overline{dS}$得：

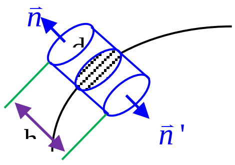


图 A 磁介质表面

$$\rho_m=-\mu_0\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint\limits_S\overline{M}\cdot\overline{dS}$$

$$=-\mu_0\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\left(\overline{M}_{外}\cdot\overline{dS}_{外}+\overline{M}_{内}\cdot\overline{dS}_{内}+\overline{M}_{侧}\cdot\overline{dS}\right)$$

因为$M_{外}$=0，$M_{内}$=M，$dS_{侧}\to 0$，$\vec{n}'=-\vec{n}$，所以：

$$\rho_m=-\mu_0\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\overline{M}\cdot\overline{dS}=-\mu_0\lim_{h\to 0}\frac{dS\cdot\overline{M}\cdot\vec{n}'}{h\cdot dS}=\mu_0\lim_{h\to 0}\frac{\overline{M}\cdot\vec{n}}{h}$$

而$\rho_m=\dfrac{q_m}{V}=\dfrac{\sigma_m\cdot dS}{h\cdot dS}=\dfrac{\sigma_m}{h}$，即$\sigma_m=\rho_m h$，$\sigma_m$称为磁荷的面密度。故：

$$\sigma_m=\mu_0\overline{M}\cdot\vec{n}\qquad(2\text{-}1)$$

所以，磁体端面所带磁荷为：

$$q_m=\sigma_m S=\mu_0 MS\qquad(2\text{-}2)$$

式中，S为永磁体端面的面积。

则：

$$\sigma_m=\mu_0 M_P\qquad(2\text{-}3)$$

这就是正文中的（3.5）式。

附录 3. 二维模型的库仑定律

模型在轴向 z 方向上的磁环和永磁体的尺度比较小，可以简化为二维模型处理。

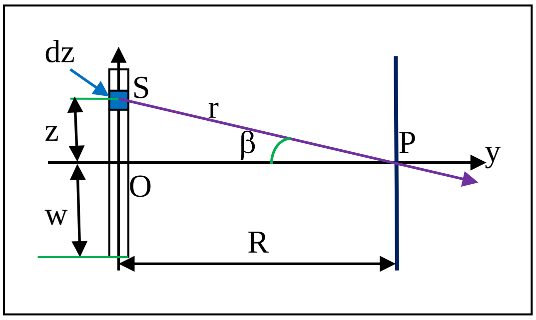


图 B.磁环与永磁体的位置图

如图 B 所示，软磁环和永磁体在 z 方向（图中向上方向）尺度为 $2w$，永磁体 O 点到磁环（观察点）P 的距离是 R， 在 S 点取一很小尺寸 dz， 这时满足平方反比的库仑定律，故:

$$dH_y = \frac{Mdz}{4\pi r^2}\cos\beta = \frac{M}{4\pi}\cdot\frac{\cos^2\beta}{R^2}\cdot\cos\beta\cdot dz$$

由于角度 β 很小，所以 $z = R\tan\beta \approx R\beta$， 即:

$$dz = Rd\beta$$

故:

$$dH_y = \frac{M}{4\pi}\cdot\frac{\cos^3\beta}{R^2}\cdot Rd\beta = \frac{M}{4\pi}\cdot\frac{\cos^3\beta}{R}\cdot d\beta$$

其中，β 角的取值范围是 $-\frac{w}{R} \sim +\frac{w}{R}$， 记 $\phi = \frac{w}{R}$。

将上式积分得:

$$\begin{aligned}
H_y &= \int_{-\phi}^{+\phi}\frac{M}{4\pi}\cdot\frac{\cos^3\beta}{R}\cdot d\beta = \frac{M}{4\pi R}\int_{-\phi}^{+\phi}\left(1-\sin^2\beta\right)d\sin\beta \\
&= \frac{M}{4\pi R}\left[\sin\beta - \frac{1}{3}\sin^3\beta\right]_{-\phi}^{+\phi} = \frac{M}{4\pi R}\left(2\sin\phi - \frac{2}{3}\sin^3\phi\right) \\
&\approx \frac{M}{4\pi R}(2\phi) = \frac{M}{4\pi R}\cdot\frac{2w}{R} = \frac{M\cdot 2w}{4\pi R^2} = \frac{M_S}{4\pi R^2}
\end{aligned}$$

该模型近似满足磁场 H_y 与距离 R 成平方反比的库仑定律。

附录 4. 磁体在软磁环上产生的环向磁场

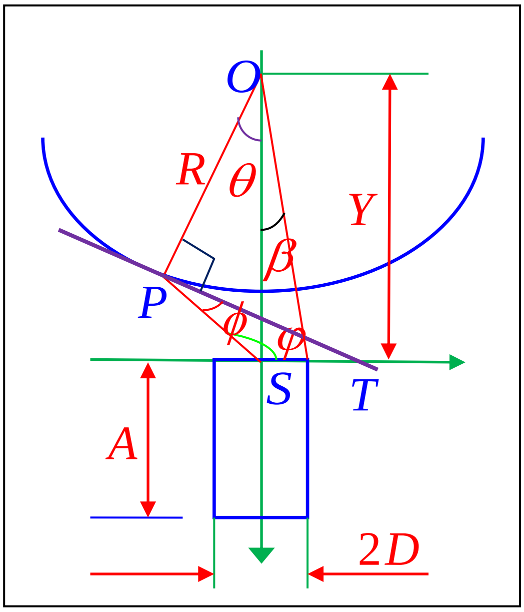


图 C 二维极坐标图

如图 C 所示，设 PS 与 P 点的切线夹角为ϕ，则 S 点的磁荷在 P 点产生的环向磁场为:

$$H_\theta = \frac{\sigma_m S}{4\pi\mu_0}\frac{\cos\phi}{r^2} \tag{4-1}$$

（4-1）式下标θ表示环向分量。

记 $PS=r$，$OP=R$，$OS=Y$，$\angle POS=\theta$，$\angle PST=\varphi$。由于 $OS\perp ST$，$OP\perp PT$，所以$\angle PTS=\angle POS=\theta$。在$\Delta PST$中有$\phi=180^o-(\varphi+\theta)$，故:

$$\cos\phi=-\cos(\theta+\varphi)=-\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi \tag{4-2}$$

由图可知:

$$\sin\varphi=\frac{Y-R\cos\theta}{\sqrt{R^2+Y^2-2RY\cos\theta}},\quad \cos\varphi=\frac{R\sin\theta}{\sqrt{R^2+Y^2-2RY\cos\theta}} \tag{4-3}$$

设$\lambda=\dfrac{Y}{R}$，则:

$$\cos\phi=\frac{-R\sin\theta\cos\theta+(Y-R\cos\theta)\sin\theta}{\sqrt{R^2+Y^2-2RY\cos\theta}}=\frac{\lambda\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos\theta}} \tag{4-4}$$

在 ΔOPS 中应用余弦定理得：

$$r^2 = R^2 + Y^2 - 2RY\cos\theta \tag{4-5}$$

将（4-4）（4-5）代入（4-1）式得：

$$H_\theta(\theta) = \frac{\sigma_m S}{4\pi\mu_0 R^2}\frac{\lambda\sin\theta - \sin 2\theta}{\left(1+\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta\right)^{3/2}} \tag{4-6}$$

（4-6）式是 $\theta' = 0$ 时的磁场，当 $\theta' \neq 0$ 时，磁场为：

$$H_\theta(\theta) = \frac{\sigma_m S}{4\pi\mu_0 R^2}\frac{\lambda\sin(\theta-\theta') - \sin 2(\theta-\theta')}{\left[1+\lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta-\theta')\right]^{3/2}} \tag{4-7}$$

- 扩展后的磁场

当 $\sigma_m dS = \mu_0 M_p dS$ 时，其磁场为：

$$dH_\theta = \frac{M_p dS}{4\pi R^2}\frac{\lambda\sin(\theta-\theta') - \sin 2(\theta-\theta')}{\left[1+\lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta-\theta')\right]^{3/2}} \tag{4-8}$$

将 θ' 从 $-\beta$ 到 $+\beta$ 积分得：

$$H_\theta(\lambda,\theta) = \frac{M_p S}{4\pi R^2}\Phi(\lambda,\theta) \tag{4-9}$$

式中，$\beta \approx \dfrac{D}{Y}$。

设 $\lambda = \dfrac{Y}{R}$，将 $dS = S\cdot d\theta$ 和 $\sigma_m S = \mu_0 M_p S$ 代入（4-6）式：

$$\begin{aligned}
dH_\theta(\theta) &= \frac{\sigma_m dS}{4\pi\mu_0 R^2}\frac{\lambda\sin\theta - \sin 2\theta}{\left(1+\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta\right)^{3/2}} \\
&= \frac{M_p S}{4\pi R^2}\cdot\frac{\lambda\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{\left[1+\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta\right]^{3/2}}\cdot d\theta \\
&= \frac{M_p S}{4\pi R^2}\cdot\frac{\lambda - 2\cos\theta}{\left[1+\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta\right]^{3/2}}\cdot d(-\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{M_p S}{4\pi R^2}\cdot\frac{\lambda - 2\cos\theta}{\left[1+\lambda(\lambda - 2\cos\theta)\right]^{3/2}}\cdot d(\lambda - 2\cos\theta)
\end{aligned} \tag{4-10}$$

其中 θ 角从 $\theta-\beta$ 到 $\theta+\beta$ 积分，而 $\beta \approx \dfrac{D}{Y}$。

设 $z = \lambda - 2\cos\theta$，则（4-10）式蓝色部分的积分：

$$\int \frac{z}{(1+\lambda z)^{3/2}}dz=\frac{1}{\lambda^2}\int\frac{\lambda z}{(1+\lambda z)^{3/2}}d(\lambda z)=\frac{1}{\lambda^2}\int\left[\frac{1+\lambda z}{(1+\lambda z)^{3/2}}-\frac{1}{(1+\lambda z)^{3/2}}\right]d(1+\lambda z)$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int\left[\frac{1}{(1+\lambda z)^{1/2}}-\frac{1}{(1+\lambda z)^{3/2}}\right]d(1+\lambda z)=\frac{1}{\lambda^2}\left[2\sqrt{1+\lambda z}+\frac{2}{\sqrt{1+\lambda z}}\right]$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}\cdot\frac{2+\lambda z}{\sqrt{1+\lambda z}}$$

所以（4-10）式积分可得:

$$H_\theta(\lambda,\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{M_pS}{4\pi R^2}\cdot\frac{2}{\lambda^2}\cdot\left[\frac{2+\lambda(\lambda-2\cos\theta)}{\sqrt{1+\lambda(\lambda-2\cos\theta)}}\right]_{\theta-\beta}^{\theta+\beta}$$

$$=\frac{M_pS}{4\pi\lambda^2R^2}\left[\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}}-\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}}\right] \tag{4-11}$$

考虑另一个磁体端面，记$\lambda'=\frac{Y+A}{R}$，$\beta'=\frac{D}{Y+A}$，则:

$$H_\theta(\lambda',\theta)=\frac{M_pS}{4\pi\lambda'^2R^2}\left[\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}}-\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}}\right] \tag{4-12}$$

记:

$$\Phi(\lambda,\theta)=\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)}}-\frac{2+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)}}\right] \tag{4-13}$$

$$\Phi(\lambda',\theta)=\frac{1}{\lambda'^2}\left[\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')}}-\frac{2+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}{\sqrt{1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')}}\right] \tag{4-14}$$

故总的磁场环向分量为:

$$H_\theta(\theta)=\frac{M_pS}{4\pi R^2}\left[\Phi(\lambda,\theta)-\Phi(\lambda',\theta)\right] \tag{4-15}$$

该式为正文中的（3.8）式。

附录 5.磁体产生的环向磁场梯度

由（4-15）式对环向求导数可得：

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H_\theta(\lambda,\theta)}{\partial\theta}=\frac{M_P S}{4\pi\lambda R^3}\left[\frac{\sin(\theta+\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)\right)^{1/2}}-\frac{\sin(\theta+\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)\right)^{3/2}}\right]$$

$$-\frac{M_P S}{4\pi\lambda R^3}\left[\frac{\sin(\theta-\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)\right)^{1/2}}-\frac{\sin(\theta-\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)\right)^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{M_P S}{4\pi R^3}\left[\frac{\lambda\sin(\theta+\beta)-\sin 2(\theta+\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)\right)^{3/2}}-\frac{\lambda\sin(\theta-\beta)-\sin 2(\theta-\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)\right)^{3/2}}\right] \tag{5-1}$$

同样，

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H_\theta(\lambda',\theta)}{\partial\theta}=\frac{M_P S}{4\pi R^3}\left[\frac{\lambda'\sin(\theta+\beta')-\sin 2(\theta+\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')\right)^{3/2}}-\frac{\lambda'\sin(\theta-\beta')-\sin 2(\theta-\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')\right)^{3/2}}\right] \tag{5-2}$$

故磁体产生的环向磁场梯度为：

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H_\theta(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{R}\left[\frac{\partial H_\theta(\lambda,\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta(\lambda',\theta)}{\partial\theta}\right] \tag{5-3}$$

$$G(\lambda,\theta)=\left[\frac{\lambda\sin(\theta+\beta)-\sin 2(\theta+\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta+\beta)\right)^{3/2}}-\frac{\lambda\sin(\theta-\beta)-\sin 2(\theta-\beta)}{\left(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\theta-\beta)\right)^{3/2}}\right] \tag{5-4}$$

$$G(\lambda',\theta)=\left[\frac{\lambda'\sin(\theta+\beta')-\sin 2(\theta+\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta+\beta')\right)^{3/2}}-\frac{\lambda'\sin(\theta-\beta')-\sin 2(\theta-\beta')}{\left(1+\lambda'^2-2\lambda'\cos(\theta-\beta')\right)^{3/2}}\right] \tag{5-5}$$

则（5-1）式可写为：

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H_\theta(\theta)}{\partial\theta}=\frac{M_P S}{4\pi R^3}\left[G(\lambda,\theta)-G(\lambda',\theta)\right] \tag{5-6}$$

这正是正文中的（3.9）式。

附录 6.本文涉及物理量符号表

符号	名称	单位名称	单位符号
$\vec{M}$	磁化强度	安培 · 米$^{-1}$	$A \cdot m^{-1}$
μ_0	真空磁导率	亨利 · 米$^{-1}$	$H \cdot m^{-1}$
$\vec{H}$	磁场强度	安培 · 米$^{-1}$	$A \cdot m^{-1}$
B	磁感应强度	特斯拉	T
T	绝对温度	开尔文	K

参考文献

[1] J. F. Elliott. Thermomagnetic Generator. Journal of Applied Physics, 1959, 30(11):1774-1777

[2] Efficiency of Thermomagnetic Generator, Journal of Applied Physics, 1959, 30:1622-1623

[3] K. Murakami. The Characteristics of Ferrite Cores with Low Curie Temperature and their Application. IEEE Transactions on Magnetics 1965,(2): 96-100

[4] L.D.Kirol, J.I.Mills. Numerical analysis of thermomagnetic genetator. Journal of Applied Physics, 1984, 56(3): 824-828

[5] 李东辉,罗二仓,吴张华,戴巍.一种新型的发电方式—热磁发电研究.中国工程热物理学会学术会议论文.

[6] 瞿清昌,王京平,林安利,李之彬. 磁性材料自动测量装置的研究.第十届全国磁学和磁性材料会议.1999年，689-690

[7] 赵凯华,陈熙谋.《电磁学》(上册).第1版,第1章: 静电场§1静电的基本现象和基本规律.

[8] 赵凯华,陈熙谋.《电磁学》(上册).第1版.第1章:静电场§2电场 电场强度.

[9] 赵凯华,陈熙谋.《电磁学》(下册).第1版,第6章:磁介质§2等效磁荷观点.

[10] 钟文定.《铁磁学》(中册).第1版:7.2.3磁荷（极）与退磁.

[11] 戴道生,钱昆明.《铁磁学》(上册).第1版:绪论.

[12] 戴道生,钱昆明.《铁磁学》(上册).第1版,第2章:§2.1铁磁性的基本特点和基本现象.

[13] 郭硕鸿.《电动力学》.第3版,第1章:电磁现象的普遍规律§3麦克斯韦方程组.

[14] 郭硕鸿.《电动力学》.第3版,第1章:电磁现象的普遍规律§4介质的电磁性质.

致谢

本论文在中国人民大学附属中学的张永平老师悉心指导下完成，他严谨认真的工作作风为我们论文写作起到非常好的模范作用。研究过程中，李岚凇负责选题、实验设计和实施、模型建立及论文撰写工作；赵俊宁参与了模型建立、实验操作及部分论文撰写工作。

感谢宋保钢老师为我们论文提供了金属软磁环等部分实验材料，磁性测试设备，使我们得以顺利完成实验测试并得到预期成果。

感谢我们的父母，他们在我们研究过程中对我们的理解和支持是我们最大的动力。

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：李岚淞 赵俊宇 指导老师：张永年

2018 年 9 月 7 日