

参赛队员姓名: 李知诚、康允博、田力

学校: 金陵中学

省份: 江苏省

国家/地区: 中国

指导教师姓名: 张启军、丁洋

论文题目: 古典水袖运动模式的研究

古典水袖运动模式的研究

李知诚 康允博 田力

摘 要

本论文研究了水袖运动的三种典型运动模式：拂袖及两种不同类型的绕袖。首先通过理论分析导出了描述拂袖形态的方程为对数螺线方程。对于螺旋形和驻点形绕袖，导出了描述其几何形态的公式。接下来通过实验研究了以上三种不同运动模式的形态特征：对于拂袖，验证了对数螺线的倾斜度与相关参量的关系；对于绕袖，运用可控的机械装置实现了两种绕袖形态的观测，测量得到运动稳态轨迹的相关数据，实验结果和理论模型相符合，最后实验结果进行了讨论。

关键词：水袖，拂袖，绕袖，对数螺线，空气阻力

目录

摘 要.....	3
参数 :	5
引言.....	6
第一章 理论模型.....	8
1.1 拂袖——水袖单层螺旋运动.....	8
1.2 绕袖——水袖螺旋形运动.....	9
1.3 绕袖——水袖的驻点形运动.....	12
第二章 实验.....	13
2.1 拂袖——水袖单层螺旋运动.....	13
2.1.1 实验器材.....	14
2.1.2 实验目的.....	14
2.1.3 实验数据.....	14
2.1.4 结论.....	16
2.2 绕袖——水袖螺旋运动.....	16
2.2.1 实验器材.....	16
2.2.2 实验目的.....	16
2.2.3 实验过程.....	16
2.3 绕袖——驻点形旋转运动.....	19
第三章 讨论与结论.....	21
致 谢.....	23
实验时间、地点.....	23
参考文献.....	24
诚信声明.....	25

参数：

k — 空气阻力系数

θ — 对数螺线倾斜度的余角

φ — 拂袖运动水平圆周运动水袖上一点与圆心连线与杆子的夹角 —

绕袖的螺旋运动水袖上微元与水平面的夹角

α — 绕袖的驻点形旋转运动，水袖上微元与水平面的夹角

λ — 水袖的线密度

ω — 角速度

引言

水袖起源于中国古典戏曲的水衣。是中国古典戏曲、舞蹈艺术的传统表现手法。水袖在古典舞中运用了转似回波的圆，行云流水的波浪线条等多种形态与技法，衬托了人物运动的动态之美。这种中国传统文化的审美特质，正是水袖之魅力所在。在水袖舞蹈之中，有数个典型的动作技法，如：“拂袖、抖袖、扬袖、冲袖、搭袖、绕袖、片花、推袖、抓袖”等^[1]，这些技法的实现结合了手指、手腕、手臂乃至腰部等全身动作的配合，往往通过经验的传承、反复练习才能领悟其奥妙，展示其神韵。作为传统艺术欣赏者以及物理爱好者，我们期望能通过实验测量建立物理模型，寻找水袖典型运动的规律，在欣赏艺术美的同时，也能给戏曲舞蹈提供一些科学的依据和指导。

本文主要研究的是拂袖和绕袖两种动作。拂袖即指舞者转动身体带动水袖，如图 1 所示，我们称之为单层螺旋运动；绕袖指舞蹈者手部的绕动带领水袖形成螺旋形状的运动轨迹，如图 2 所示。我们将对这两种运动进行理论分析，并采用可控的机械装置对水袖的动作进行模拟实验，再和理论分析进行对照。



图 1 水袖中的拂袖



图 2 水袖中的绕袖

第一章 理论模型

1.1 拂袖——水袖单层螺旋运动

在转动参考系中，水袖将形成稳定的形态。实验表明，对于较短或者密度较小的水袖（或者丝带），忽略重力的影响，水袖基本上处于一个水平面里面。考虑空

气阻力、离心力以及拉力的平衡。拉力增量的竖直分量充当向心力 [2]

$$dT \cos\theta = \omega^2 R dm = \omega^2 R \lambda dl \tag{1.1}$$

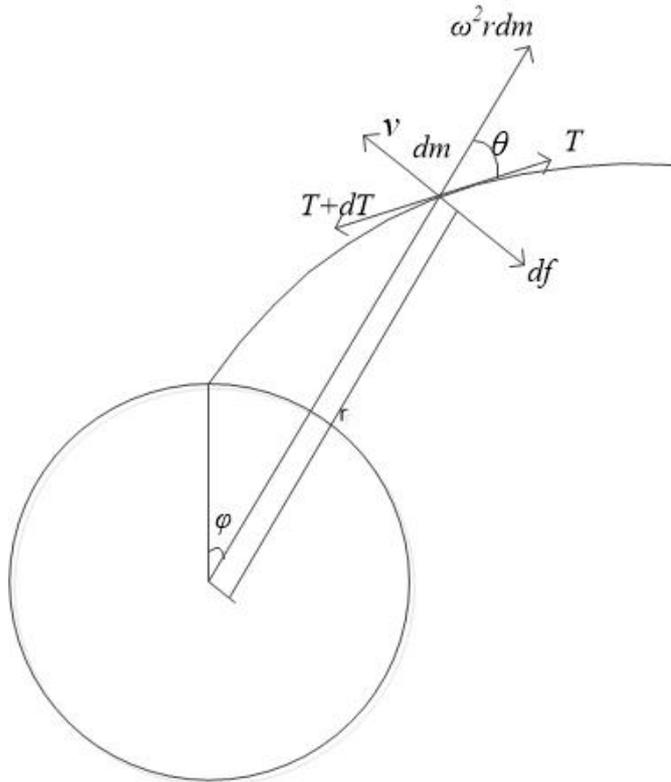


图 1.1 水袖拂袖螺旋运动受力图

阻力大小 $df = kvdl = k\omega r dl \tag{1.2}$

拉力增加量的水平分量和摩擦力平衡：

$$dT \sin\theta = df = k\omega r dl \tag{1.3}$$

(1.1) 式除以 (1.3) 式，得

$$\tan\theta = \frac{k\omega r dl}{\omega^2 r \lambda dl} = \frac{k}{\omega \lambda} = \text{const} \quad (1.4)$$

由于 k , ω , 和 λ 皆为常量, 所以每个微元到旋转中心连线和切线的夹角相等。由于此性质, 得知此运动轨迹是一个对数螺线 (等角螺线), 并且角度 θ 是对数螺线倾斜度的余角 [3]。可以导出在转动参考系中该螺线的轨迹为:

$$\begin{aligned} \frac{r d\varphi}{dr} &= \tan\theta \\ \int_0^\varphi d\varphi &= \tan\theta \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \\ (\ln r - \ln r_0) \cdot \tan\theta &= \varphi \\ \ln \frac{r}{r_0} \cdot \tan\theta &= \varphi \\ r &= r_0 \cdot e^{\frac{\varphi}{\tan\theta}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.2 绕袖——水袖螺旋形运动

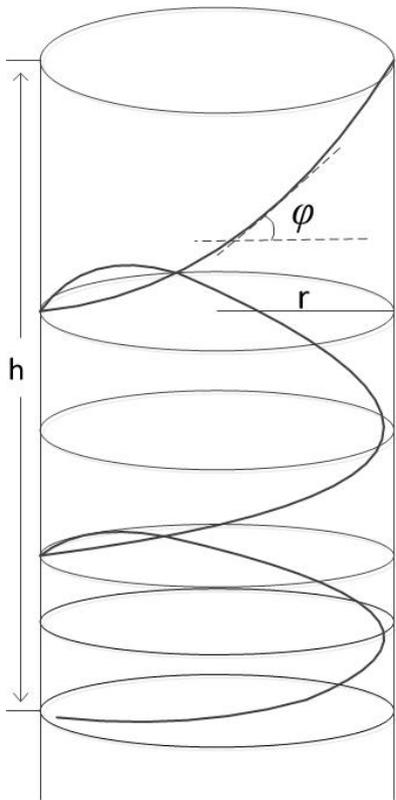
较长的水袖在转速快且旋转半径较小时, 水袖的稳定运动可看成等半径螺旋运动。

分析一个微元受力。拉力的竖直分量

$$T_z = m' g = \frac{l}{L} m \quad (1.6)$$

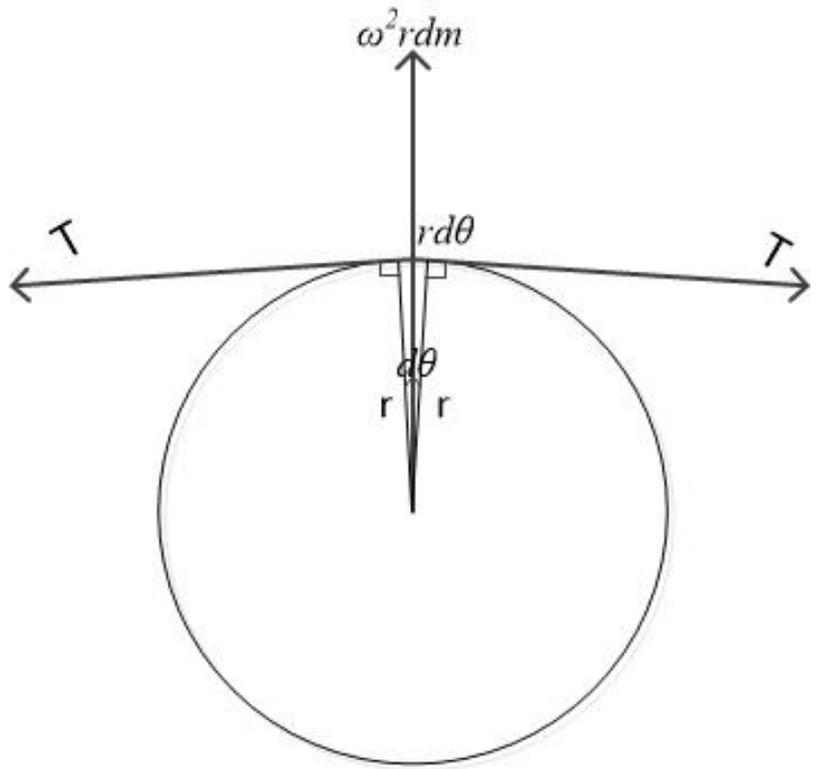
由于每个微元作圆周运动, 设此微元与水平面的夹角为 φ

$$dm\omega^2 r = d\theta T \cos\varphi \quad (1.7)$$



a. 运动示意图

化简



b. 受力分析

图 1.2 水袖绕袖螺旋

$$\lambda \frac{rd\theta}{\cos\varphi} \omega^2 r = d\theta T \cos\varphi$$

$$\lambda \omega^2 r^2 = T \cos^2 \varphi$$

$$T_x = \frac{T}{\cos\varphi} = \frac{\lambda \omega^2 R^2}{\cos\varphi} \tag{1.8}$$

所以,

$$\tan\varphi = \frac{T_z}{T_x} = \frac{m'g \cdot \cos\varphi}{\lambda \omega^2 R^2}$$

单位微元与水平面夹角

(1.7)和(1.8)得, 每一个微元可看作

$$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{m'g}{\lambda \omega^2 R^2} = \frac{lg}{\omega^2 r^2} \tag{1.9}$$

(1.9)式中的 l 表示微元以下的长度, 此式已经可以阐明运动的性质, 但是

由于旋转时 l 的长度并不是直线且要考虑 3-D 效应, 所以继续推导得到螺旋整体高度与 l 的关系:

设
$$\frac{lg}{\omega^2 r^2} = n$$

解
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4n^2}-1}{2n}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\left(\frac{lg}{\omega^2 r^2}\right)^2}-1}{2\frac{lg}{\omega^2 r^2}}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\omega^2 r^2 \sqrt{1+\frac{4 \cdot l^2 g^2}{\omega^4 r^4}}-\omega^2 r^2}{2l \cdot g}\right) \quad (1.10)$$

设微元以下的距离为 h

$$dh = dl \cdot \sin\varphi = \left(\frac{\omega^2 r^2 \sqrt{1+\frac{4 \cdot l^2 g^2}{\omega^4 r^4}}-\omega^2 r^2}{2l \cdot g} \right) \cdot dl$$

两边积分得

$$\int_0^h dh = \int_0^l \frac{\omega^2 r^2 \sqrt{1+\frac{4 \cdot l^2 g^2}{\omega^4 r^4}}-\omega^2 r^2}{2l \cdot g} \cdot dl = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \cdot \int_0^l \frac{\sqrt{1+\frac{4 \cdot l^2 g^2}{\omega^4 r^4}}-1}{l} \cdot dl$$

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \cdot \left[\sqrt{\frac{4 \cdot l^2 g^2}{\omega^4 r^4}+1} - \log\left(\sqrt{\frac{4 \cdot l^2 g^2}{\omega^4 r^4}+1}+1\right) \right] \quad (1.11)$$

此公式给出了角速度和螺旋形水袖高度的关系, 见图 2.5a, 其结果将与实验结果比较。

1.3 绕袖——水袖的驻点形运动

当转速较慢且旋转半径较大时，水袖的稳定形态是做绕一个或者多个固定点的旋转运动，我们称之为驻点形运动。每个圆弧的运动是在旋转参照系中的离心力和重力共同作用完成的。

某微元处拉力的水平分量提供微元下方半个圆弧的向心力，此拉力的相互作用力水平分量提供微元上方半个圆弧向心力。整个弧线的半径变化不规则，取平均数来近似完成，由于角速度相同：

$$T_{Nx} = \frac{M_N}{2} \omega^2 \bar{R}_N = \frac{M_N}{4} \omega^2 R_N \quad (1.12)$$

拉力的竖直分量完成提供以下的重力：

$$T_{Ny} = M'g \quad (1.13)$$

某个驻点处的斜率方向与和拉力方向一致：

$$\tan \alpha = \frac{T_{Ny}}{T_{Nx}} = \frac{4M'g}{M_N \omega^2 R_N} \quad (1.14)$$

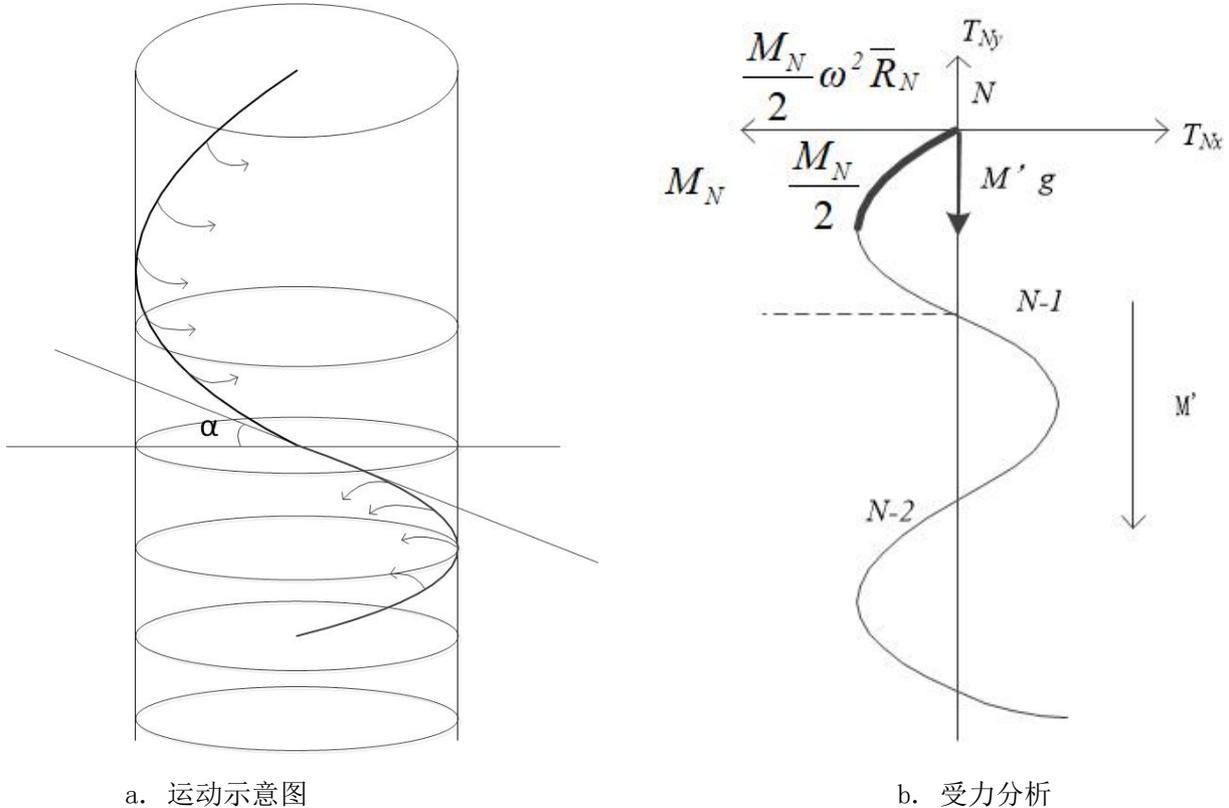


图 1.3 水袖绕袖驻点

第二章 实验

2.1 拂袖——水袖单层螺旋运动

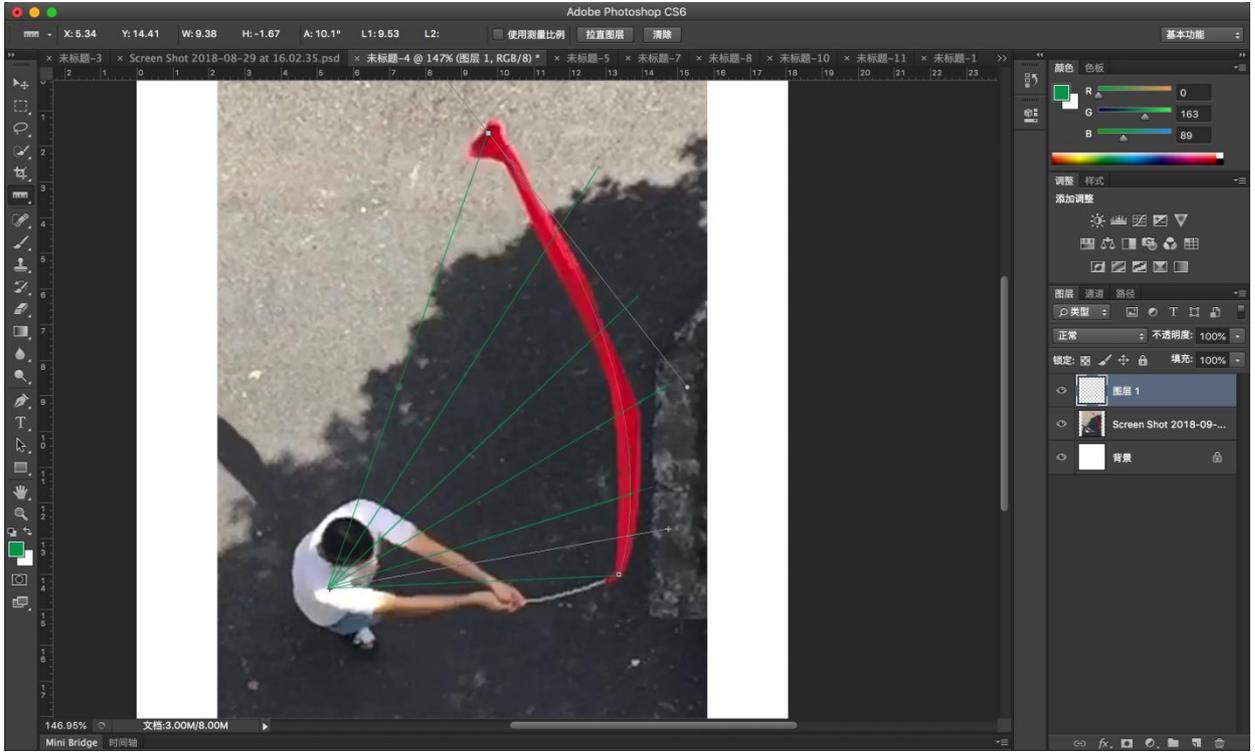


图 2.1a 拂袖实验稳态轨迹

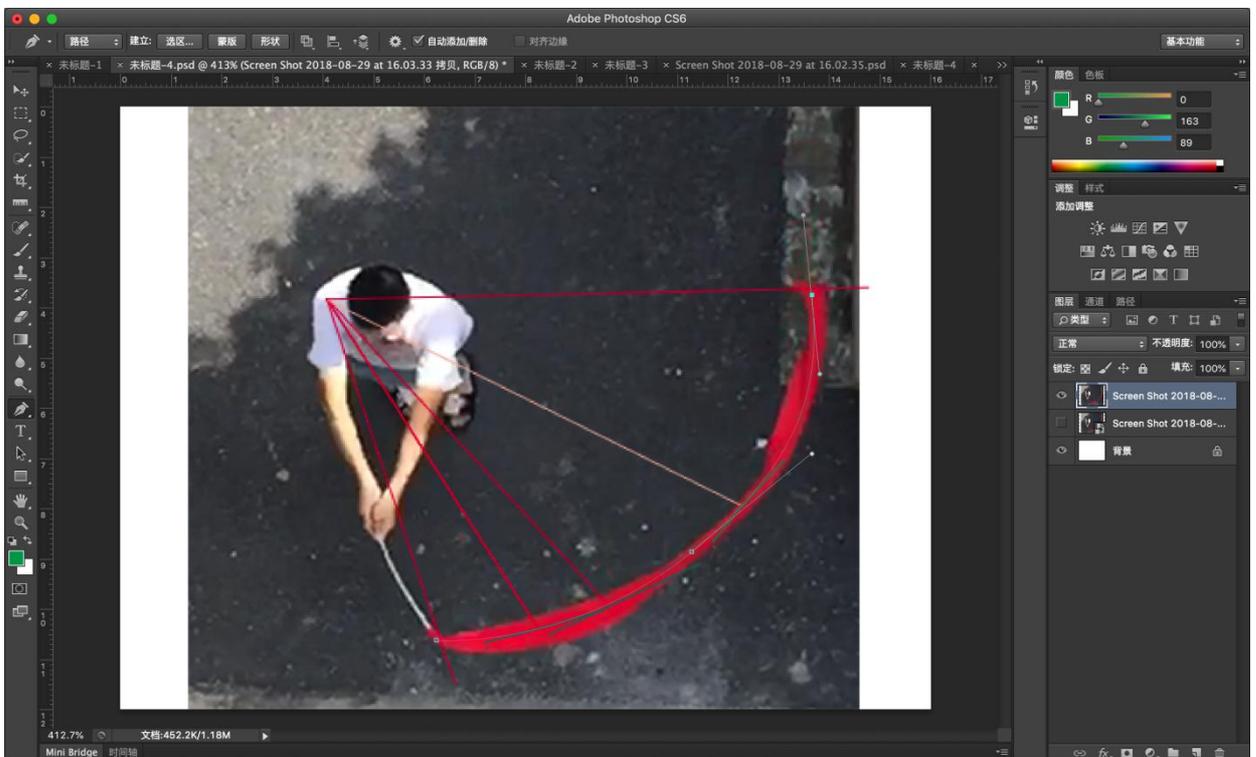


图 2.1b 拂袖实验稳态轨迹 (同一组实验实验轨迹相同)

为了模拟真实的运动状态，我们选用与真实情况类似的宽织物带作为实验器材。由于大扭力电机通常转速较低无法模拟实际舞者的快速旋转，而高转电机在高负荷下又会严重掉频，因此这一部分我们使用真人来进行实验模拟。用右臂带动了长 30cm 和水袖相连的玻璃纤维杆，以右脚为圆心，在不同的角速度下匀速运动并从顶部拍摄高帧视频。见图 2.1ab。截取多个单帧截点用 Photoshop 分析数据。

2.1.1 实验器材

4mm*300mm 玻璃纤维棒，水袖（织物带），胶枪，三脚架，240 帧/秒高帧摄影机。

2.1.2 实验目的

研究拂袖运动轨迹方程和特征

2.1.3 实验数据

表 2.1. $\omega=11\text{rad/s}$ 时水袖各点实验数据

$\theta / ^\circ$	$\phi / ^\circ$	ρ / cm	$\tan(\theta)$	$k/\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$
74.1	0	67.3	3.51	2.58
73.9	10	71.3	3.464	2.55
74	20	75.6	3.49	2.56
74.3	30	80.1	3.56	2.61
73.8	40	84.0	3.44	2.53
74.1	50	88.2	3.51	2.58
74.2	60	91.0	3.53	2.60

表 2.2 $\omega=7.41\text{rad/s}$ 时水袖各点实验数据

$\theta / ^\circ$	$\phi / ^\circ$	ρ / cm	$\tan(\theta)$	$k/\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$
84.7	0	79.25	10.78	5.33
80.2	10	80.94	5.79	2.90
80.6	20	83.68	6.04	2.98
80.3	30	86.32	5.85	2.89
80.2	40	90.47	5.79	2.86
80.8	50	95	6.17	3.05
80.1	60	100.28	5.73	2.83

$$\tan\theta = \frac{k\omega r d l}{\omega^2 r \lambda d l} = \frac{k}{\omega \lambda} = \text{const}$$

为了验证公式 (1.4) 取了六种更多的不同角速度 (包括上面的两个表格), 做出图 7 的上下两条拟合直线分别对应于 7.4rad/s 和 11.41rad/s 数, $\tan\theta$ 的值果然为一个常数并与 ω 负相关。图 8 是 $\tan\theta$ 与 $1/\omega$ 的图像, 得到了两者存在线性关系, 由此还可以推算阻力系数 k , 参见表 2.1、2.2。

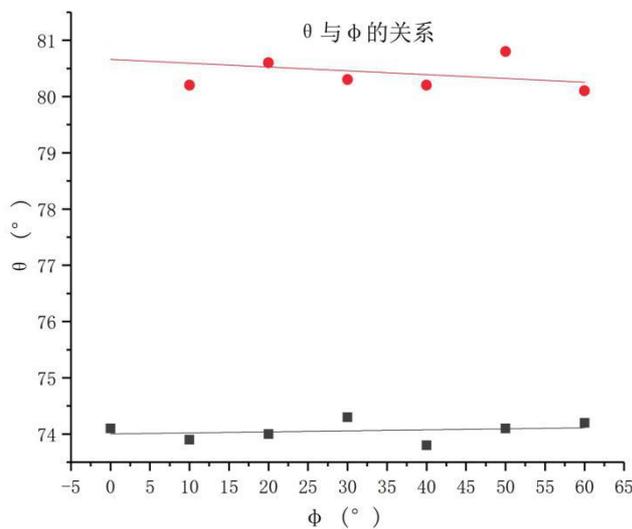


图 2.2 稳态轨迹下倾斜角 (θ 的余角) 为常数

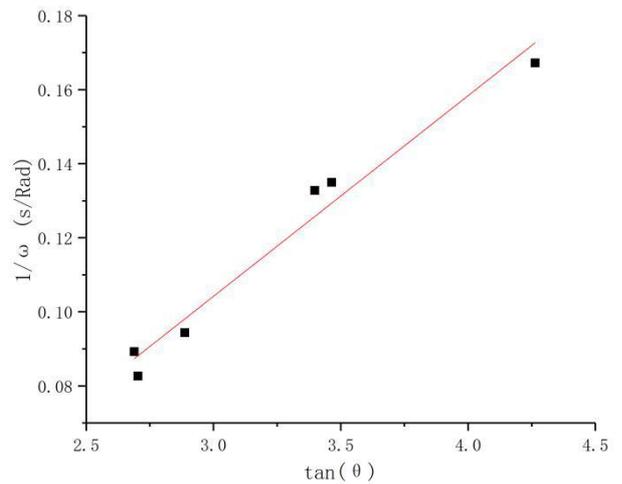


图 2.3 稳态轨迹下是 $\tan\theta$ 与 $1/\omega$ 的图像, 两者存在线性关系

2.1.4 结论

在角速度大体不变的情况下，半径与水袖切线的夹角保持不变，验证了水袖的轨迹是对数螺线的结论。

2.2 绕袖——水袖螺旋运动

绕袖动作的完成度通常标志着水袖表演者的进阶。为了模拟在不同手指抖动幅度的情况，我们进行了以下实验。

2.2.1 实验器材

可调功率三档交流电机，4mm*300mm 玻璃纤维棒，水袖，胶枪，三脚架，240 帧/秒高帧摄影机。

2.2.2 实验目的

本实验研究在不同转速，旋转半径的条件下的水袖运动轨迹包括整体长度，节数和节数长度。

2.2.3 实验过程

1. 将可功率交流电机的电流保护器拆下，安装滑动变阻器
2. 把水袖裁剪用胶枪粘在较粗的玻璃纤维上面，尽可能模拟人手控制水袖的方式
3. 把粘有水袖的玻璃纤维粘在电机的转动中轴上面，控制玻璃纤维与旋转中心轴的夹角以致控制旋转的半径
4. 把三档变速电机固定在竖直方向上
5. 将三脚架固定摄像仪器保持距离拍摄，控制距离保证拍摄到水袖螺旋运动的整体结构
6. 改变电机的功率完成三次实验，并且记录数据
7. 改变玻璃纤维和转动中轴的夹角以改变旋转半径并且重复实验以致电机的最小功率无法带动水袖，完成 9 次实验。
8. 在不同的转动频率和半径下，通过高帧摄像机分离单帧图像，在用 photoshop 进行曲线同步模拟之后，采集的实验数据，并且画出实验图像。

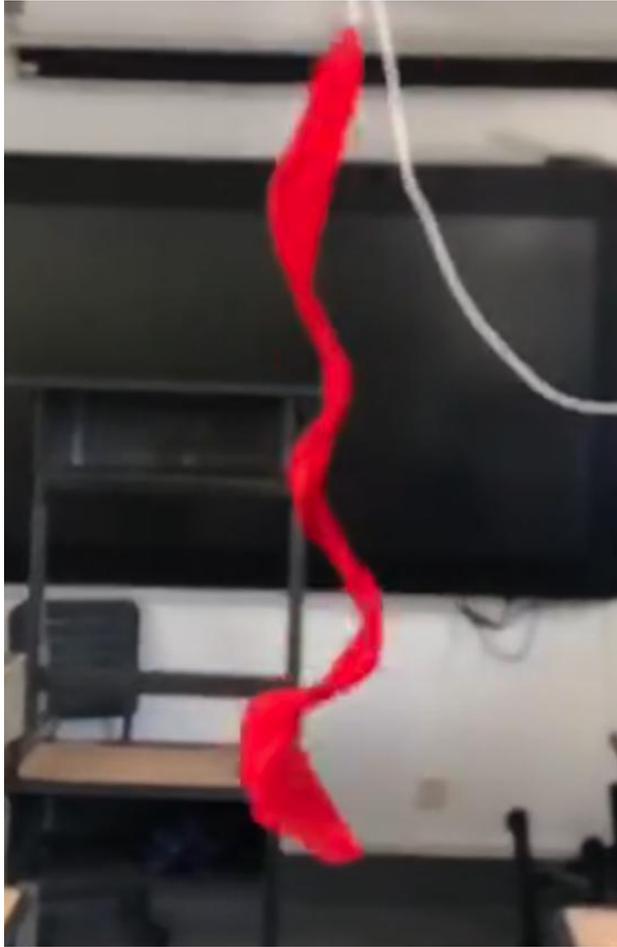


图 2.4 绕袖—螺旋形运动

当转速较快半径较小的时候，水袖的运动轨迹呈现螺旋形运动。见图 2.4。
 当角速度增大，波峰数变多，整体高度减小。具体数据见表 3。

表 2.3 绕袖的螺旋形运动的实验数据

角速度/rad/s	平均半径/cm	波峰数	总长度/cm
43.0	11.5	5.4	93.1
39.8	11.3	4.4	101.8
23.5	11.1	3.2	122.4

按照公式(1.11), 代入水袖的总长度(拉直)1.5米, 和旋转半径0.11米, 得图2.5a理论结果。绕袖螺旋形运动高度与角速度的关系的实验结果见图2.5b。比较两图, 发现实验结果和理论关系对应, 当角速度增加时, 整体高度减小。由于电机功率被限制为三档, 所以实验数据点只有三个, 但是实验结果和理论趋势吻合。高度的理论和实验值略有偏离。在理论中做了半径相等的简化假设, 而实验中, 半径在逐渐增大。见图2.4。

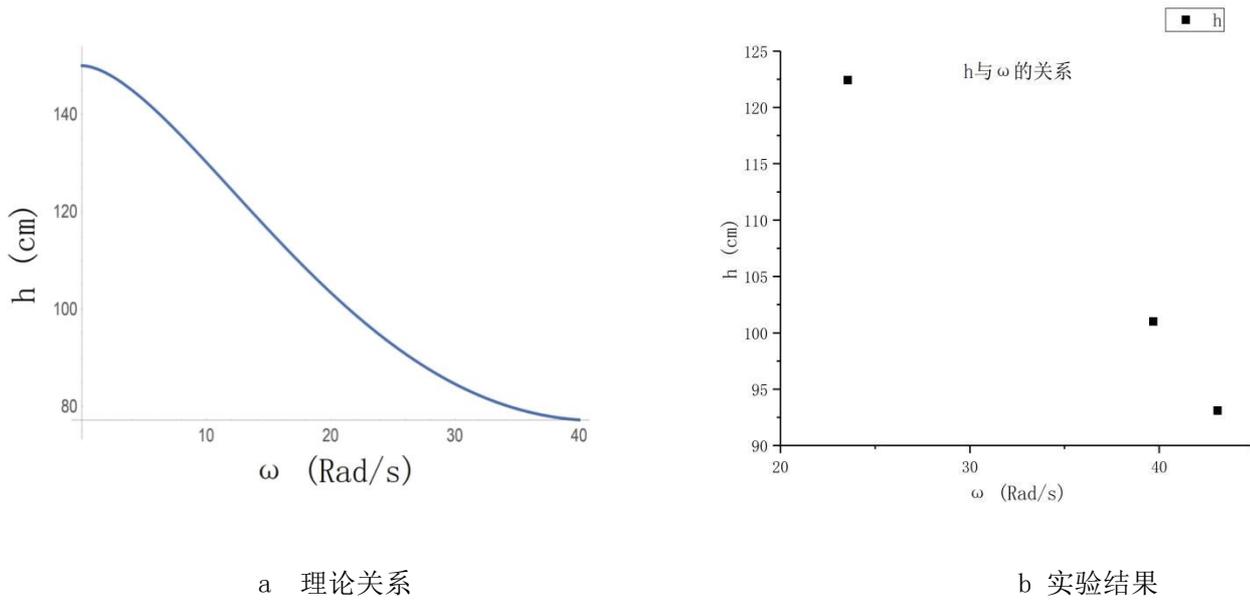


图 2.5 绕袖螺旋形运动高度与角速度的关系

2.3 绕袖——驻点形旋转运动

实验器材和实验步骤与 2.1 相同。实验参数有所不同，半径为 21.4cm。当转速较慢且旋转半径较大时，水袖做绕一个或者多个固定点的旋转运动，即驻点形旋转运动。达到稳定运动时，随着角速度的增大，波峰数变多，整体高度减小。图 2.6、图 2.7 是最低转速(11.5rad/s)，最高转速(16.4rad/s)的水袖形状。

表 2.4 绕袖驻点形旋转运动的实验数据

角速度 / rad / s	波峰数
11.5	1
13.3	1
16.4	2

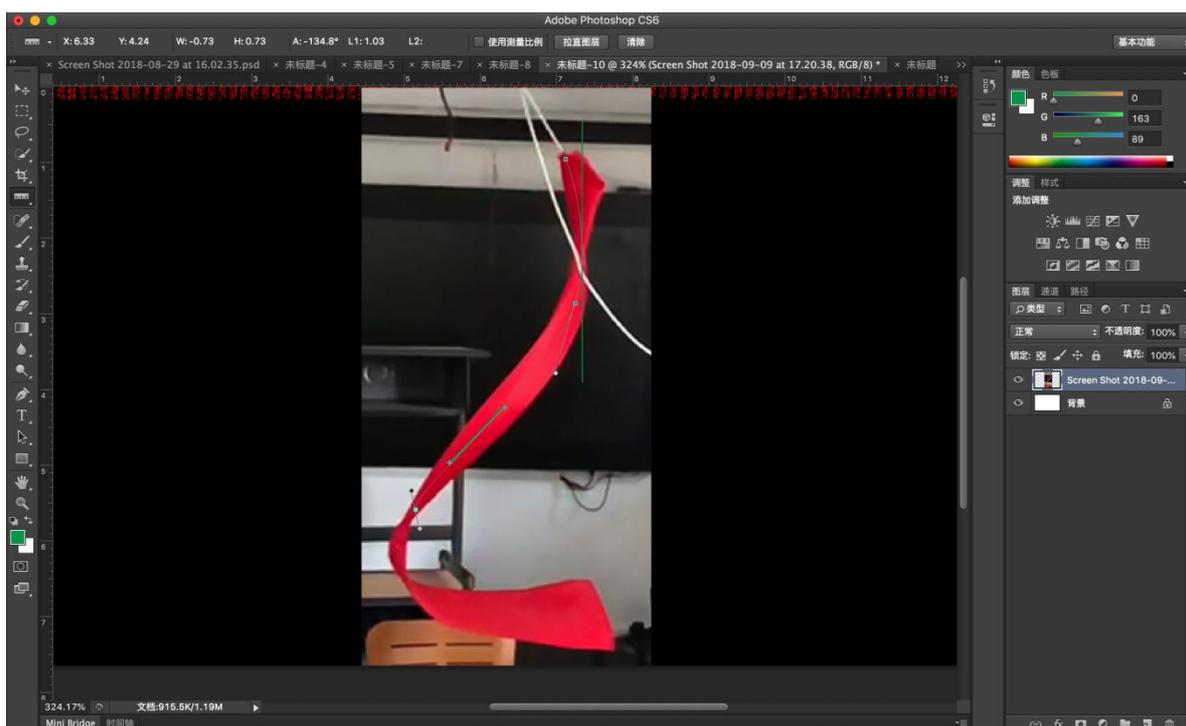


图 2.6 绕袖的驻点形运动，角速度 11.5rad/s



图 2.7 绕袖的驻点形运动，角速度 11.5rad/s

由于理论中用到了近似条件，可以给出半定量的结果。

根据公式(1.14)可知：当节点下方质量较大时，夹角 α 较大。因此上方节点处切线与水平面夹角较大，下方相对趋于水平。当角速度增加，每个节点处切线与水平面的夹角减小，随之带来的便是整体高度的减小。与实验结果相一致。

第三章 讨论与结论

在实际测量中, 还观察到与理论公式偏离的情况。在拂袖实验中, 如果使用长而轻的丝带重复实验一, 无法得到对数螺线轨迹。而是随着角度的增大, 微元到转轴的距离先减小再增加。见图 3.1, 图 3.2。以下将对此现象进行分析。由于丝带过轻且过长, 旋转过程尾部中产生压力差, 压力方向向着旋转中心, 即阻力不只是简单的沿着速度的反方向, 由于后端的牵引, 前端也产生形变。而如果使用水袖这种较重的物体进行挥舞, 即可产生近似的对数螺线。此外, 实验中丝带尾部发生抖动, 有湍流的存在, 在此不予讨论。

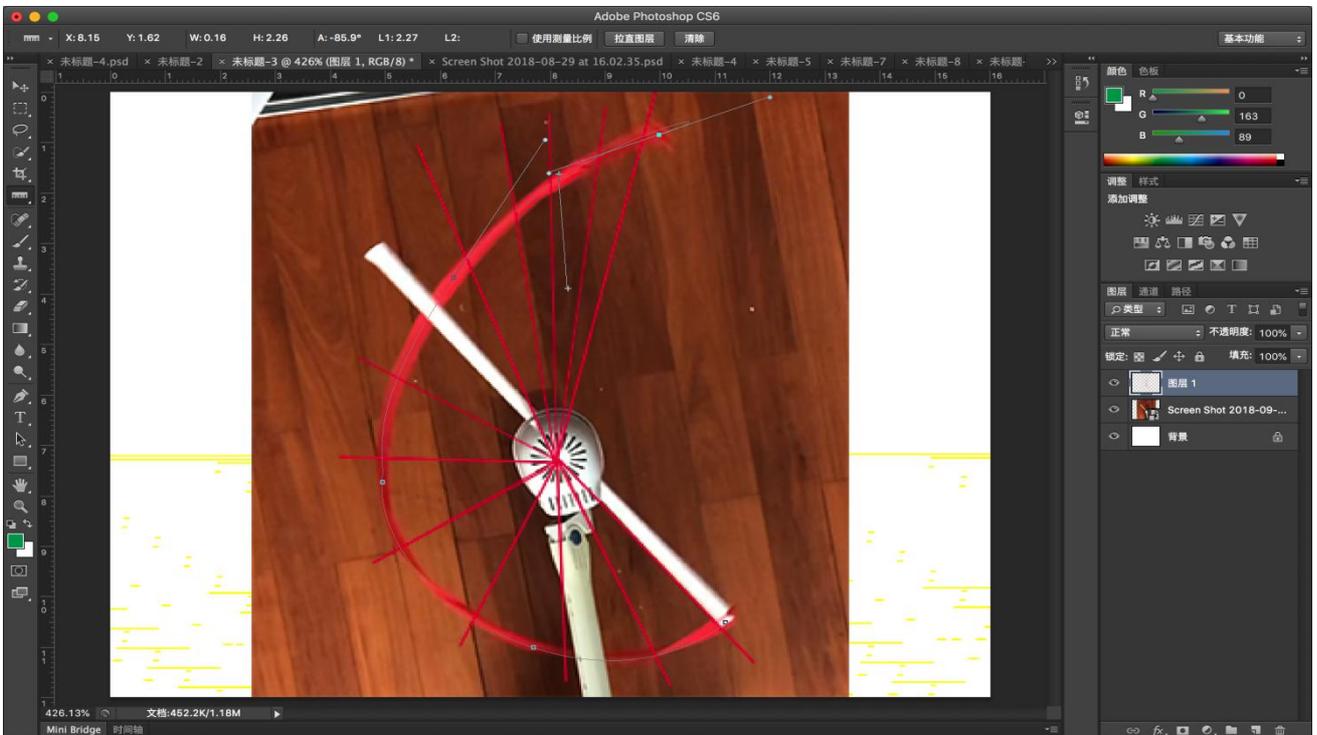


图 3.1 长而轻的丝带形状偏离对数螺线

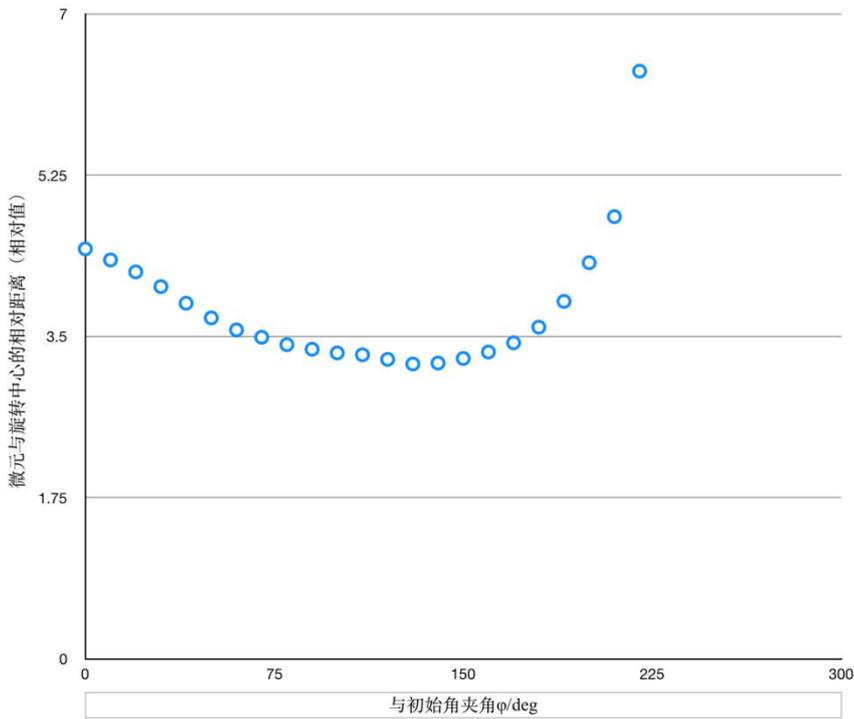


图 3.2 长而轻的丝带到轴线距离与角度 ϕ 的关系

本文通过实验观测和理论分析，对拂袖和绕袖的运动模式有了更深的认识。导出的多组数据在经过拟合后的函数图像证实了先前的理论分析：包括对于密度较大的水袖的拂袖的对数螺线方程及绕袖的理论公式。对于密度较小的丝带的实验结果与理论的偏离也进行了分析。利用类似的实验方法，往复运动的实验装置还可以研究抖袖，甩袖等其他动作的运动性质和模型。此外，本文的理论模型和结论还可以用于解释部分甩动的体操带，头发，马尾，流苏和舞动的旗帜等柔软物体实际运动的情形。

致 谢

在此我们衷心感谢南京市金陵中学张启军和丁洋老师, 作为我们的指导老师, 从我们开始的实验器材的购买, 和学校协调实验地点、论题的确定、理论模型的建立, 两位老师给了我们很大的帮助和指导; 本次研究有幸通过指导老师的引见认识了南师大物理系王思慧教授, 她的谦和严谨以及博学让我们深深折服, 在我们遇到难题的时候总是不厌其烦的解决, 在此向她深深的感谢和致敬; 同时也感谢南京大学物理系大二罗遥学长给予我们计算机绘图和微积分解题方面的指导。

我们三位在研究过程中始终坚持团结协作精神, 我们共同完成了整个实验, 在撰写论文过程中, 康允博负责撰写了第一章, 李知诚负责撰写了 2.3 和第三章, 田力负责撰写了 2.1 和 2.2 章节。

实验时间、地点

在前期确定课题和理论研究成型后, 我们从 7 月 5 号开始实验, 在进行和记录实验的同时完成报告的撰写, 期间不断补充实验, 完善实验报告, 一直到 8 月 31 号结束。8 月 31 号之后对论文进行了整体的补充和修改。

地址基本在金陵中学汇贤楼 304 室完成, 为了需要, 我们选择在李知诚家里进行过一次实验。

参考文献

- [1] 蔡璨. 中国古典舞中的水袖技法研究. 《戏剧之家》2015(1): 119-119
- [2] 严导淦. 对数螺线及其物理意义. 上海: 同济大学物理教研室, 2013
- [3] 梁昆淼. 力学(第四版). 北京: 高等教育出版社, 2010

诚信声明

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知,除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处,本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员: 康代博 李斌
田力

指导老师: 张军. 丁济

2018年9月8日