

参赛队员姓名： 顾彦文 白云舟 辛雨茜

中学： 南京外国语学校

省份： 江苏省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 王思慧 潘志民

论文题目： 充液容器的动力学助稳

充液容器的动力学助稳

摘要

本文研究在空中抛掷水瓶，水瓶落地后的运动，分别考虑立起或倒地滚动，最终达到静止状态的过程。本文分别从理论方面分析了抛掷水瓶的一般情况，研究了瓶子无初始角速度竖直下落与有初始角速度旋转下落的运动情况，分析了其物理原理；讨论了碰撞角度、碰撞时线速度以及角速度，瓶中水量等情况对瓶子能否直立的影响。对于滚动情况，我们也从理论上建立了水与瓶子耦合运动的模型，给出了小振幅运动的解析解以及一般情况下的数值解。实验中，我们也分别研究了抛掷和滚动的两种情况。在抛掷过程的实验中，我们改变了水量，角速度，投掷高度并分析了这些因素的影响。研究表明在抛掷情况下，一定的水量和转动有助于直立。在滚动过程的实验中，我们首先验证了理论模型，然后讨论了初始条件以及水量对运动过程的影响。

关键词：抛掷，碰撞，立起的有利条件，滚动，运动模式，油罐车

目录

摘要	2
目录	3
引言	4
1. 理论分析	4
1.1 投掷	4
1.1.1 一般过程	4
1.1.2 自由下落	9
1.1.3 翻转下落	10
1.2 滚动	13
1.2.1 充液容器滚动的动力学	13
1.2.2 瓶子加钢珠系统的求解	13
2. 实验	17
2.1 投掷方式	17
2.1.1 初始测量——恢复系数	17
2.1.2 自由下落后立起的概率	19
2.1.3 旋转下落	21
2.2 滚动方式	24
2.2.1 模型验证	24
2.2.2 改变水量实验	26
2.2.3 改变释放高度实验	34
3. 实际应用	41
4. 结论	44
参考文献	45
致谢	46
实验时间与地点	46
附录 1 瓶内装钢珠的实验现象探究	47
附录 2 上传的实验视频	52
参赛队员简历	53

引言

有这样一个风靡一时的校园游戏：将瓶子旋转向空中抛起，尝试使其在落地时直立。在对这一现象的已有研究中，文献 *Water Bottle Flipping Physics* [1] 和《翻转水瓶平稳落地现象的研究》 [2] 给出了一些比较合理的假设和理论建模以及实验的验证，但对瓶子稳定的有利或不利条件的讨论不够充分，如只考虑了水的存在有利于角速度减小从而提高落体后站立的几率，而未考虑到转动对稳定落地有利的一面，未分析对瓶子立起有利或不利的条件等。在 IYPT 赛题中也有对此论题大致的研究 (*Problems for the 31st IYPT 2018* [3])，一般只限于讨论质心位置降低等静态描述。文献 *The complex physics of that viral water bottle trick* [4] 也基本只定性描述了瓶子从被抛弃到落下的过程。基于此，本文分析了瓶子投掷过程中的一般过程，分别讨论了自由下落和翻转下落的运动过程，探究投掷角度、投掷高度以及瓶中水量对瓶子翻转过程的影响与其变化规律，对恢复系数、高度、水量和角速度进行控制变量实验。本文还分析了瓶子倒地后的滚动过程，讨论了水量、线速度对其平动与振动过程的影响，控制变量进行理论分析并进行实验研究，完整分析其达到静止的过程以及导致稳定的原因。

1. 理论分析

1.1 投掷

1.1.1 一般过程

首先讨论最一般的情况。预实验中我们将瓶子从一定高度释放，可以通过施加一个打击获取初始角速度，瓶子在被抛出瞬间的初始角速度和瓶子质心的线速度都是非常难确定的，因此我们在理论推导中可以认为水瓶的初始角速度和线速度在一定范围内随机。

我们取随即范围在瓶身被击打后只要与竖直落地（即完全不倾倒）时所转过的角度之差在 $\frac{\pi}{2}$ 之内即可。例如瓶身在从被抛掷到竖直倒地共旋转一圈，即 2π ，则认为角速度的随机会使瓶身在倒地时的旋转角度为 $\frac{3}{2}\pi$ 到 $\frac{5}{2}\pi$ 之间。瓶子一经释放即获得一定角动量。

对于理论公式而言，我们的思路是先将系统初始的状态量转化为碰撞时的状态量，然后讨论出有利于瓶子竖立起的状态量。

首先计算系统的质心位置。假设容器形状为标准的圆柱体壳，底面半径为 r ，高度为 H ，质量为 M ；内部液体密度为 ρ ，高度为 h （见图 1.1）。

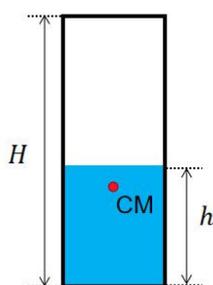


图 1.1 系统质心位置

则系统质心位置相对于容器底面的高度 h_{cm} 有表达式:

$$h_{cm} = \frac{\rho\pi r^2 h^2 + MH}{2(\rho\pi r^2 h + M)}$$

然后我们计算在瓶子静态条件下能够立起时倾角的最大值, 而临界角度对应于系统重力作用线刚好经过碰撞作用点的情况 (见图 1.2)。

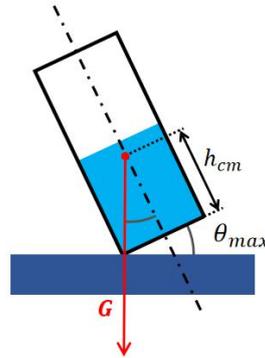


图 1.2 接触角临界情况示意图

容易发现 $\theta_{max} = \arctan\left(\frac{r}{2h_{cm}}\right) = \arctan\left(\frac{r(\rho\pi r^2 h + M)}{\rho\pi r^2 h^2 + MH}\right)$ 。

接下来建立碰撞的基本模型:

假设瓶子落地时与地面成角度 θ , x 轴方向速度为 V_{x0} , 垂直方向的速度为 V_{y0} , 角速度为 ω_0 , 反弹后 x 轴方向速度为 V_{x1} , y 轴方向速度为 V_{y1} , 角速度为 ω_1 , 瓶子与地面之间的恢复系数为 e , 静摩擦系数为 μ , 碰撞过程中地面提供给容器的支持力为 N , 摩擦力为 f (见图 1.3)。

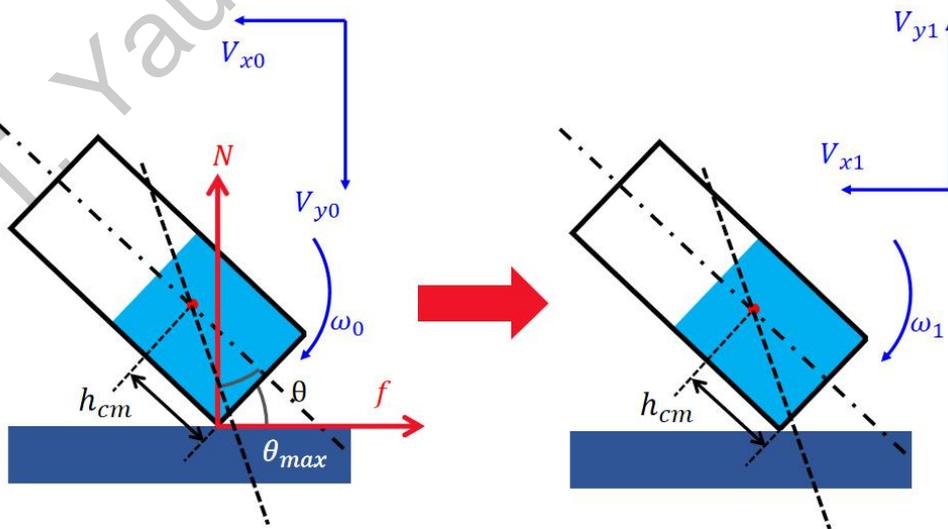


图 1.3 基本碰撞模型

则首先根据动量定理:

$$\int f dt = (M + m)(V_{x0} - V_{x1}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\int N dt = (M + m)(V_{y0} + V_{y1}) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f = \mu N \cdots \cdots \textcircled{3}$$

接下来根据角动量定理:

$$J(\omega_0 - \omega_1) = (M + m)\sqrt{r^2 + h_{cm}^2} [(V_{x0} - V_{x1}) \cos(\theta - \theta_{max}) + (V_{y0} + V_{y1}) \sin(\theta - \theta_{max})] \cdots \cdots \textcircled{4}$$

接下来根据恢复系数 e 的定义得:

$$e = \frac{V_{y1} - \omega_1 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} \sin(\theta - \theta_{max})}{V_{y0} + \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} \sin(\theta - \theta_{max})} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

根据方程①②③④⑤解得:

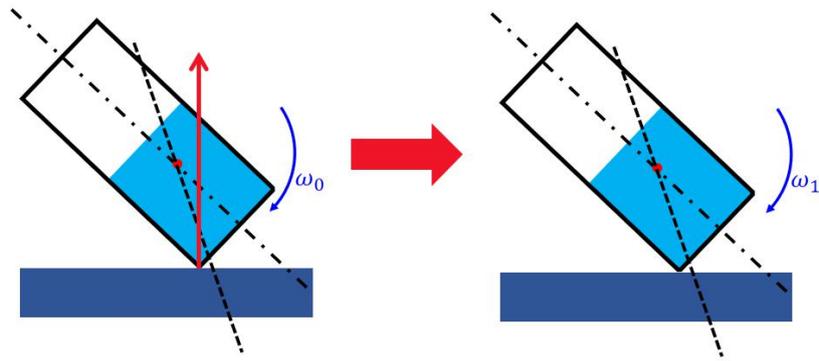
$$\begin{aligned} \omega_1 = \{ & \left[(eV_{y0}J + e \sin(\theta - \theta_{max})J) \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{max})m(r^2 + h_{cm}^2) \right. \\ & - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{max})M(r^2 + h_{cm}^2) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{max})m(r^2 \\ & + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{max}) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{max})M(r^2 + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta \\ & - \theta_{max}) + \sin(\theta - \theta_{max})J \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} / [\sin^2(\theta - \theta_{max})m(r^2 \\ & + h_{cm}^2) + \sin^2(\theta - \theta_{max})M(r^2 + h_{cm}^2) + \sin(\theta - \theta_{max})m(r^2 \\ & + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{max}) + \sin(\theta - \theta_{max})M(r^2 + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{max}) \\ & + J)] - eV_{y0} - e \sin(\theta - \theta_{max})\omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} \} / [\sin(\theta \\ & - \theta_{max}) \sqrt{r^2 + h_{cm}^2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{x1} = V_{x0} - V_{y0}\mu - \mu[eV_{y0}J + gJ \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} + e \sin(\theta - \theta_{max})J \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} \\ - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{max})(M + m)(r^2 + h_{cm}^2) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{max})(M \\ + m)(r^2 + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{max})] / [J + \sin^2(\theta - \theta_{max})(M + m)(r^2 \\ + h_{cm}^2) + \sin(\theta - \theta_{max})(M + m)(r^2 + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{max})] \end{aligned}$$

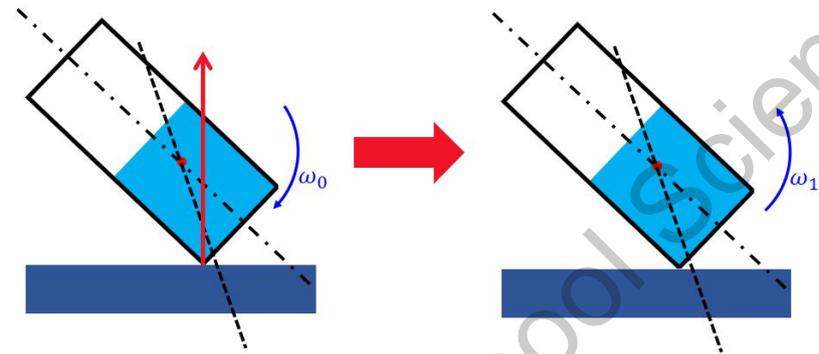
$$\begin{aligned} V_{y1} = [eV_{y0}J + \sin(\theta - \theta_{max})J \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} + e \sin(\theta - \theta_{max})J \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{cm}^2} \\ - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{max})(M + m)(r^2 + h_{cm}^2) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{max})(M \\ + m)(r^2 + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{max})] / [J + \sin^2(\theta - \theta_{max})(M + m)(r^2 \\ + h_{cm}^2) + \sin(\theta - \theta_{max})(M + m)(r^2 + h_{cm}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{max})] \end{aligned}$$

仅考虑第一和第二碰撞;若使瓶子能够立起,则第二次碰撞的碰撞角 θ_2 必须在 θ_{max} 以内。

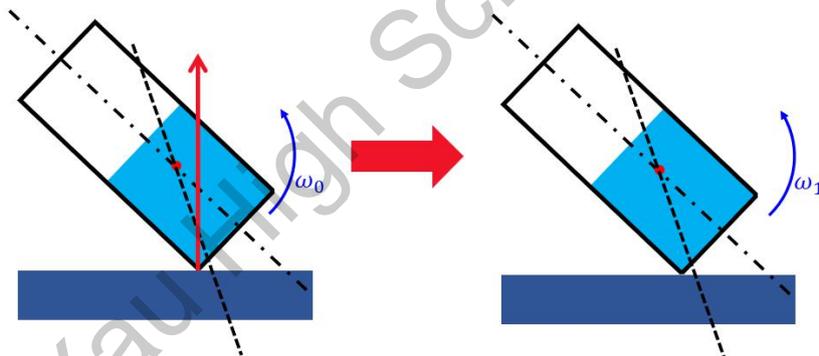
然后根据碰撞角度,碰撞后角速度方向,碰撞点的差别,将瓶子的碰撞分为以下6种模式(见图1.4):



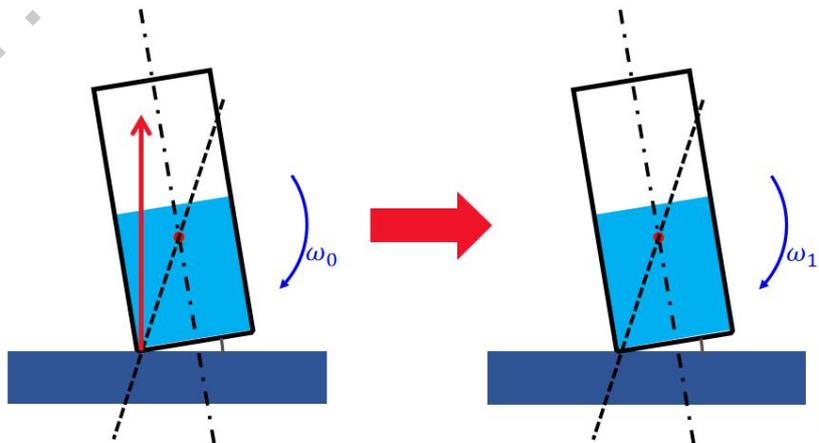
a. 碰撞前角速度朝向地面，支持力过质心，角速度不反向



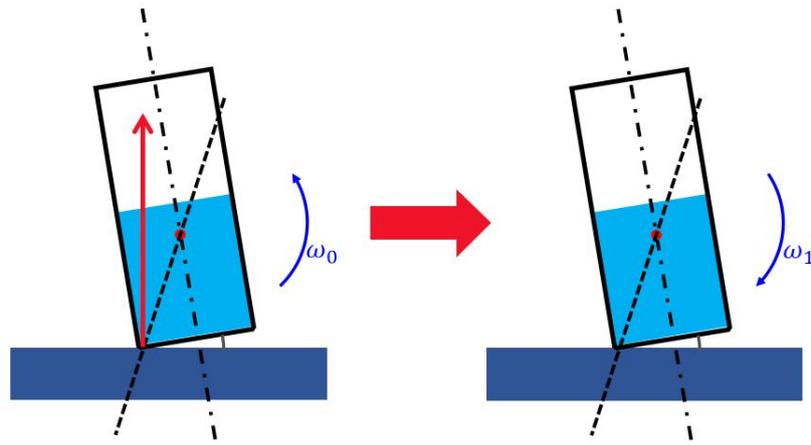
b. 碰撞前角速度朝向地面，支持力过质心，角速度反向



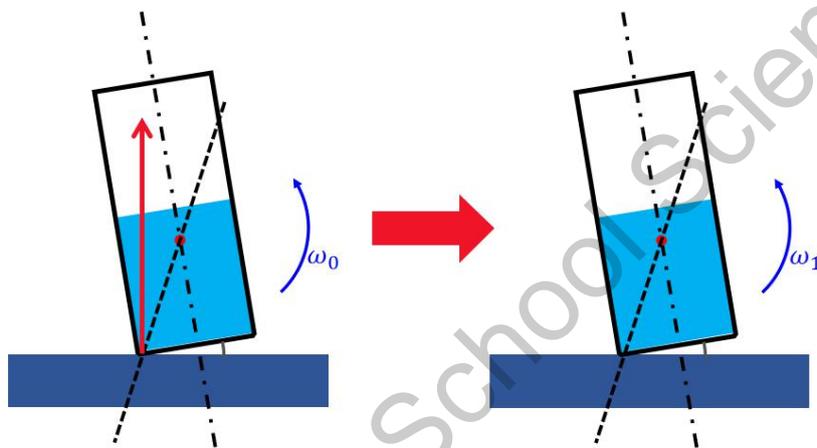
c. 碰撞前角速度反向地面，支持力过质心，角速度不反向



d. 碰撞前角速度朝向地面，支持力不过质心，角速度不反向



e. 碰撞前角速度反向地面，支持力不过质心，角速度反向



f. 碰撞前角速度反向地面，支持力不过质心，角速度不反向

图 1.4 碰撞前后示意说明

瓶子在进行第一次碰撞后在空中旋转一段时间，而若当瓶子再次在另一边旋转到 θ_{\max} 时，若第二次碰撞还未发生，则瓶子将无法立起（不考虑旋转 180° 立起等情况）。

则此情况允许的时间 t_{\max} 为：

$$t_{\max} = \frac{\theta + \theta_{\max}}{\omega_1}$$

对于情况 2, 3，瓶子不可能立起，无需讨论。

对于支持力是否过质心的讨论，由于当支持力不过质心的时候 $\sin(\theta - \theta_{\max}) < 0$ ，方程组以及其解仍然适用。

对于碰撞前角速度反向地面的情况，只需在方程中的 ω_0 前加上负号即可。

对于碰撞后角速度反向地面的情况，对于方程的条件改变， $\omega_1 < 0$ ，此时

$$t_{\max} = \frac{\theta - \theta_{\max}}{\omega_1}$$

根据实验和观察，在碰撞过程中，情况 f 占的比例较小，不对最后瓶子立起概率起决定性作用，因此我们着重讨论情况 1, 4, 5 的物理图景。

1.1.2 自由下落

在此过程中，瓶子不具备初始的角速度以及水平方向的线速度，因此：

$$\omega_1 = \{[(eV_{y0}] - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{\max}) m(r^2 + h_{\text{cm}}^2) - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{\max}) M(r^2 + h_{\text{cm}}^2) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{\max}) m(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max}) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{\max}) M(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max})] / [\sin^2(\theta - \theta_{\max}) m(r^2 + h_{\text{cm}}^2) + \sin^2(\theta - \theta_{\max}) M(r^2 + h_{\text{cm}}^2) + \sin(\theta - \theta_{\max}) m(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max}) + \sin(\theta - \theta_{\max}) M(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max}) + J] - eV_{y0}\} / [\sin(\theta - \theta_{\max}) \sqrt{r^2 + h_{\text{cm}}^2}]$$

$$V_{x1} = -V_{y0} \mu - \mu [eV_{y0}] - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max})] / [J + \sin^2(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) + \sin(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max})]$$

$$V_{y1} = [eV_{y0}] + e \sin(\theta - \theta_{\max}) \omega_0 \sqrt{r^2 + h_{\text{cm}}^2} - V_{y0} \sin^2(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) - V_{y0} \sin(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max})] / [J + \sin^2(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) + \sin(\theta - \theta_{\max}) (M + m)(r^2 + h_{\text{cm}}^2) \mu \cos(\theta - \theta_{\max})]$$

由于方程较为复杂，我们带入实验数据并用 matlab 解出 V_{y0} 与角速度所带来的线速度垂直分量 V' 和 V_{y1} 的图像（见图 1.5）：

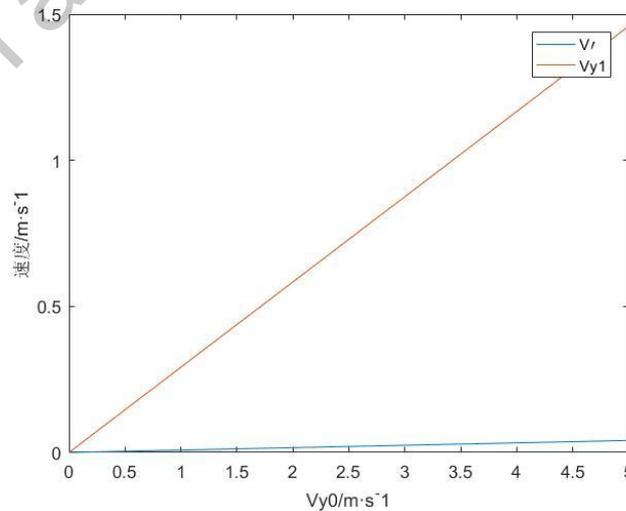


图 1.5 无初始角速度的运动情况

可以看出，当 V_{y0} 增加时，两者的差距将会增大，并且 $V' \leq V_{y1}$ 恒成立。这表

明当抛掷高度增大时，瓶子在反弹后将会在空中停留更长时间，并且其碰撞后角速度将会增大，造成瓶子更不容易稳定，这将被我们之后的实验所验证。同时，预实验表明恢复系数是个变量，跟水量等因素之间存在关系。一定水量可以使得瓶子碰地的恢复系数最小。因此，在所有情况下，当瓶内的水量使得水的质量与恢复系数之前达到较好的匹配关系时，瓶子的直立关系将会增大。但由于图像中两个速度的斜率差实在太太大，这使得总体来说，不管是有水还是没水，瓶子都很容易翻倒。在正式实验中，即使是从一两厘米的高度释放，自由下落的瓶子也有很大概率翻倒。

1.1.3 翻转下落

接下来我们让瓶子旋转起来，即带有一定的初始角速度，我们逐个分析相关参数的影响。

首先，我们改变瓶子的水量。

我们沿用之前求得的系统质心位置公式以及极限碰撞角公式：

$$h_{cm} = \frac{\rho\pi r^2 h^2 + MH}{2(\rho\pi r^2 h + M)}$$

$$\theta_{max} = \arctan\left(\frac{r}{2h_{cm}}\right)$$

当水量增加时， h 对应增加；分别画出 h 与 h_{cm} 和 θ_{max} 之间的关系图（见图 1.6 和图 1.7）：

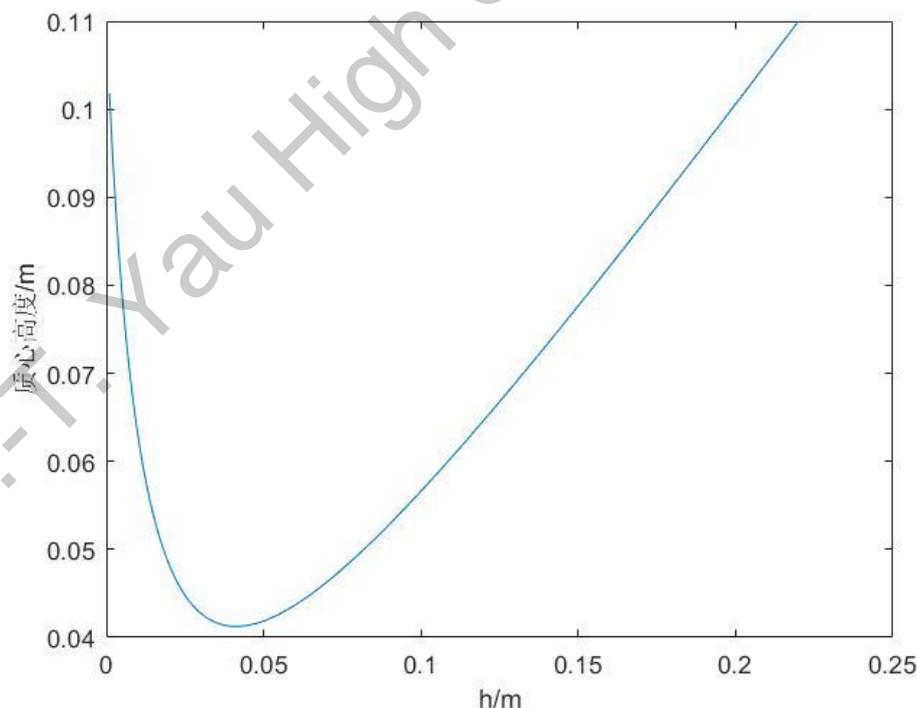


图 1.6 系统质心和水面高度关系

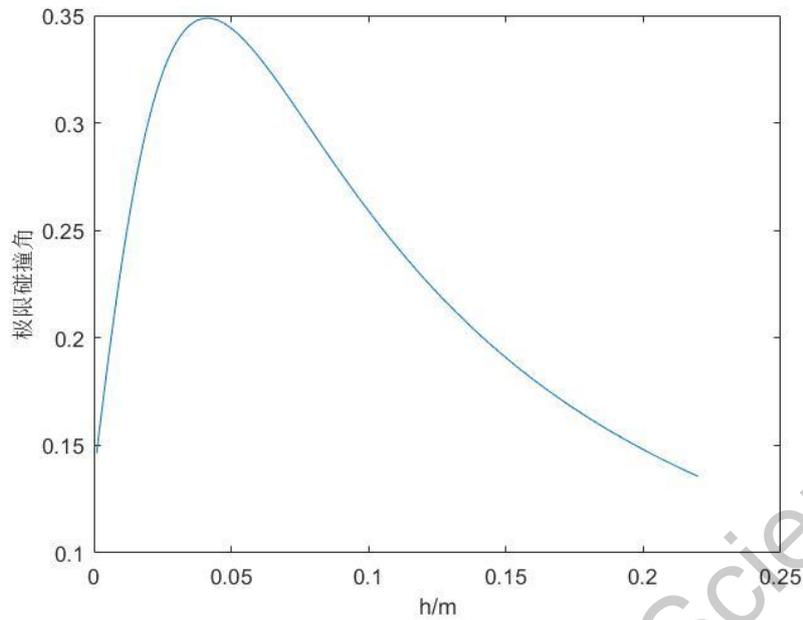


图 1.7 极限碰撞角和水面高度关系

可以看出，当 h 增加时，质心高度先下降再上升，极限碰撞角先上升再下降；而更大的极限碰撞角直接对应更大的立起概率。因此，控制水量使瓶子的质心较低并使其与恢复系数之间有一个较好的匹配关系可以增加瓶子立起的概率，这将被后面的实验证实。

接下来我们考虑让瓶子在同一高度释放，但改变初始释放的角度。我们继续用 matlab 画出 ω_0 与 V' 和 V_{y1} 的图像（见图 1.8）：

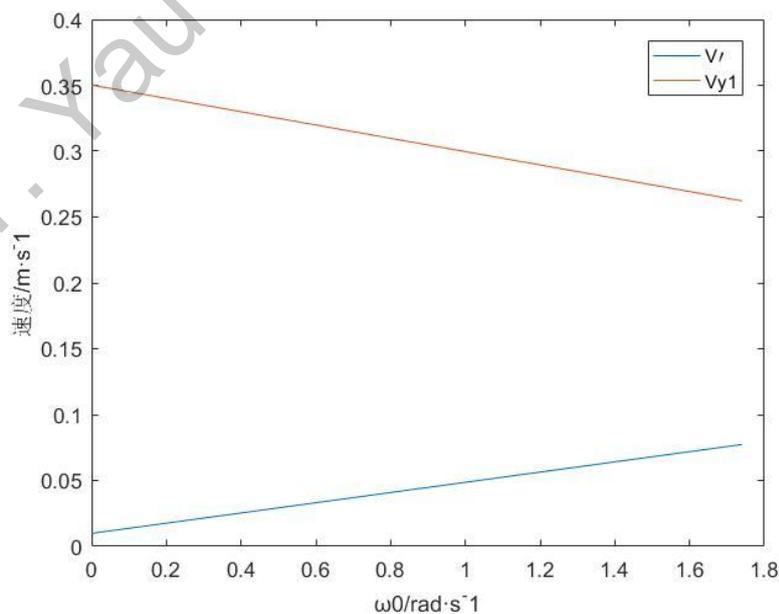


图 1.8 改变初始角速度时的运动情况

可以看出，当碰撞角速度增加的时候，碰撞后的角速度所带来的线速度垂直分量 V' 将会增大，而线速度垂直分量将会减小。由此图像我们不能确定增加初始角速度是否会影响瓶子立起的概率；因此我们需要比较在瓶子的线速度刚好使其落地时经过的角度。忽略角速度带来的瓶子离地高度的变化，瓶子落地时间 t' 有如下表达式：

$$t' = \frac{2V_{y1}}{g}$$

即 t' 与 V_{y1} 成正比。而瓶子在空中所转过的角度 $\theta' = \omega_1 t'$ ，因此我们画出 ω_1 与 V_{y1} 乘积的图像（见图 1.9）：

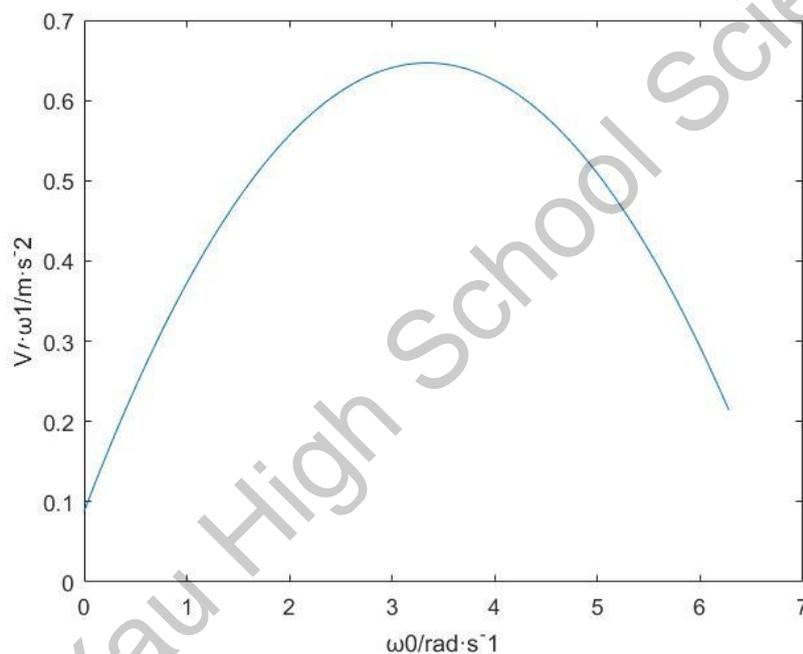


图 1.9 ω_1 与 V_{y1} 乘积的图像

假设瓶子在第二次碰撞后速度和角速度几乎为 0，则若当瓶子在第二次碰撞时能够与地面刚好垂直，即在空中转过一个特定的角度，瓶子最有可能立起。因此可以看出适当的碰撞角速度可以增加瓶子立起的概率。

而当瓶子的角速度持续增大时，瓶子转过的角度将会到达一个峰值，然后减小，从理论上来说，存在另外一个点使得瓶子立起的概率最大化。但从实际情况出发，此时瓶子的角速度已经相当大，第三次碰撞的影响将会变得不可忽略，并且实验设备本身的不完美将会对实验结果起到更加重要的影响。因此从定性分析的角度出发，我们认为适当的角速度可以增加其立起概率。

接下来我们考虑碰撞时瓶子的线速度的竖直分量 V_{y0} ，我们继续用 matlab 画出 V_{y0} 与 V' 和 V_{y1} 的图像（见图 1.10）：

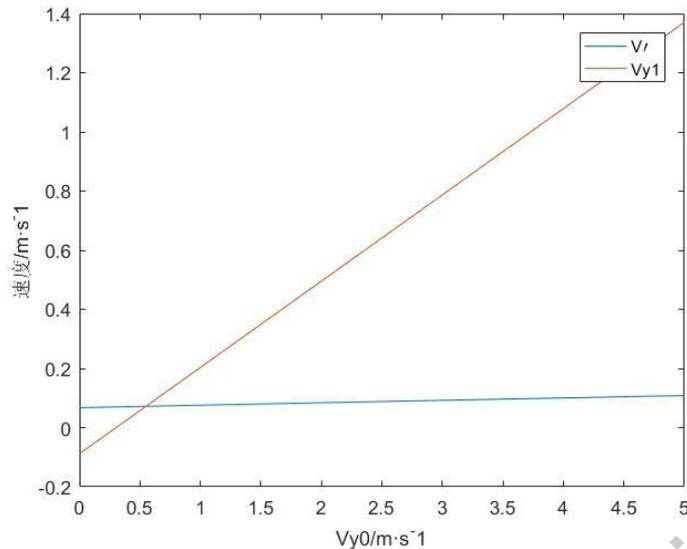


图 1.10 改变线速度时的运动情况

可以看出，当线速度较小时，瓶子将有更大的概率立起。但相似地，此问题仍然需要根据角速度和恢复系数等因素综合考虑。

1.2 滚动

1.2.1 充液容器滚动的动力学

我们用瓶子里加钢珠的动力学模型模拟充水瓶子的运动。通过后面预实验的对比发现，瓶中装水与瓶中装钢珠的系统有着相似的运动模式。理论上通过牛顿力学可以解出在较为理想的情况下瓶子加钢珠系统的运动模式，帮助理解充水瓶子运动方式。考察各个物理量参数对瓶子加钢珠系统的影响，也有助于充水瓶子运动的分析和预测。

1.2.2 瓶子加钢珠系统的求解

动力学方程

首先，我们忽略瓶子运动的所有阻尼，简化实际情况中的各项参数，研究以下简化模型。

一个半径为 r 、质量为 m 的均质实心钢珠被置于一个半径为 R 、质量为 M 的薄圆筒中，圆筒的中心轴 O 和小圆柱的中心轴 C 均水平，横截面如图 2.1 所示。将圆筒放置在粗糙地面上，圆筒只能在地面上无滑滚动，而小钢珠只能在圆筒内壁无摩擦滑动（为了类比水的运动，假设钢珠不滚动，而是平动）。将圆筒中心轴 O 的水平位置记为 x ，小钢珠中心 C 与 O 的连线与竖直方向间的夹角记为 θ 。重力加速度为 g （见图 1.11）。

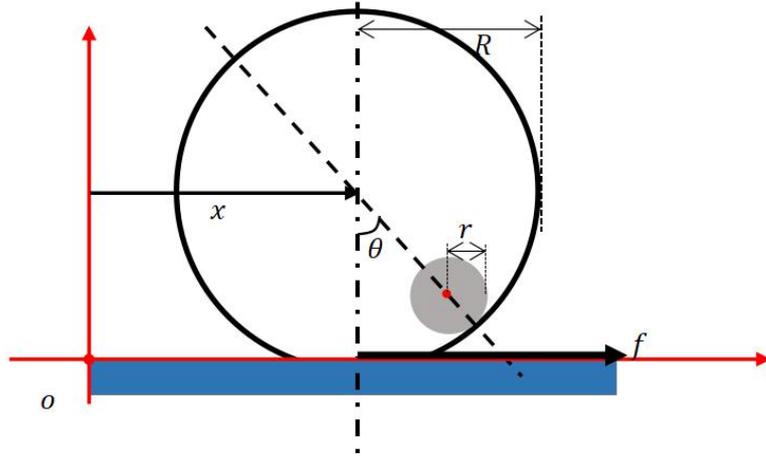


图 1.11 物理情况说明

首先，我们假设瓶子受到的推力为 f ，以瓶子+钢珠的整体为受力对象，根据动量定理列出方程：

$$f = \frac{d}{dt} \left\{ M \frac{dx}{dt} + m \left[\frac{dx}{dt} + (R-r) \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \right] \right\} \dots\dots ①$$

以瓶子为受力对象，根据角动量定理列出方程：

$$-fR = \frac{d}{dt} (MR^2 \frac{d(\frac{x}{R})}{dt}) \dots\dots ②$$

以内部小球为研究对象，在瓶子所在非惯性系中的牛顿第二定律得：

$$m(R-r) \frac{d^2\theta}{dt^2} = - (mg \sin\theta + m \cos\theta \frac{d^2x}{dt^2}) \dots\dots ③$$

当 θ 为小角度时，根据小量近似公式 $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$ ，化简方程① ② ③：

$$f = (M+m) \frac{d^2x}{dt^2} + m(R-r) \frac{d^2\theta}{dt^2} \dots\dots ④$$

$$-f = M \frac{d^2x}{dt^2} \dots\dots ⑤$$

$$(R-r) \frac{d^2\theta}{dt^2} = - (g\theta + \frac{d^2x}{dt^2}) \dots\dots ⑥$$

④ ⑤两式相加消去 f 后得：

$$(2M+m) \frac{d^2x}{dt^2} + m(R-r) \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \dots\dots ⑦$$

令 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$; $\theta = B \cos(\omega t + \varphi)$ 得到：

$$-A(2M+m) - m(R-r)B = 0 \dots\dots ⑧$$

$$\omega^2 A + \omega^2 B(R-r) = gB \dots\dots ⑨$$

由方程⑧解得：

$$A = \frac{-m(R-r)}{2M+m} B \dots\dots (10)$$

其中 B 是一个仅与初始条件有关的常数。

将方程 (10) 带入方程 (9) 解得：

$$\omega^2 \frac{-m(R-r)}{2M+m} + \omega^2 (R-r) = g \dots\dots (11),$$

$$\omega^2 = \frac{2M+m}{2M} \frac{g}{R} \dots\dots (12)$$

显然，还存在另一个解， $A = B = 0$ ； $\omega^2 = 0$ ； $x = vt$ ，为瓶中钢珠振动的角频率。

小结：

解析解 1： $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ ； $\theta = B \cos(\omega t + \varphi)$ ；

其中 $A = \frac{-m(R-r)}{2M+m} B$ ； $\omega^2 = \frac{2M+m}{2M} \frac{g}{R}$ 。

解析解 2： $A = B = 0$ ； $\omega^2 = 0$ ； $x = vt$ 。

此即为瓶中钢珠振动的角频率表达式。

解析解 2 是瓶子匀速运动而钢珠静止在底部不振动，这个模式在实验中不容易实现。实际情况是钢珠和瓶子运动的一般形式是以上两个解的叠加，即匀速直线运动和简谐振动的叠加。

当 θ 无法进行小角度近似时，将 (1) (2) 两式中的 f 消去并化简 (1) (2) (3) 式，得到以下方程：

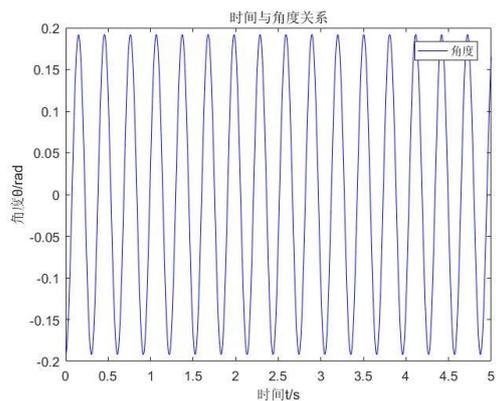
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-mg \sin\theta - m \cos\theta \frac{d^2x}{dt^2}}{m(R-r)} \dots\dots (13)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-m(R-r) \cos\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + m(R-r) \sin\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{2M+m} \dots\dots (14)$$

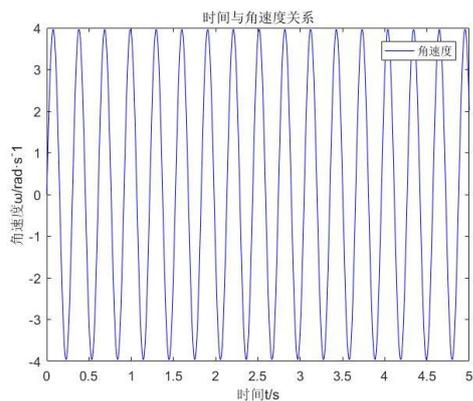
由于此方程组不存在解析解，将其带入 Matlab 程序中，用龙格库塔法求得数值解并画出时间——线速度，时间——位移，时间——角速度，时间——角位移的图像（常数取值来源于一组实验数据）。

运动模式分析

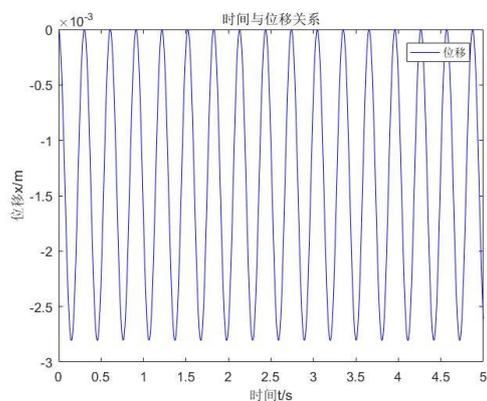
图像可以分为两种运动模式。当瓶子不存在初速度时，系统的运动模式仅为类似简谐振动的振动，画出四个物理量与时间关系的图像（图 1.12）：



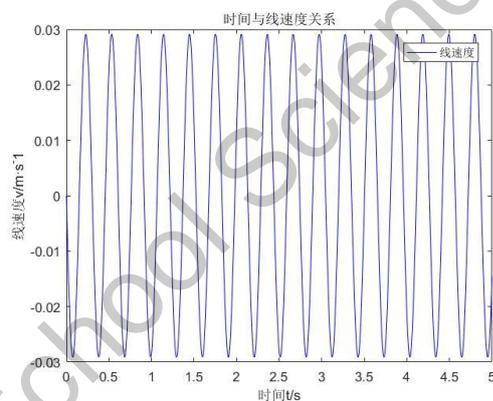
a. 时间与角度关系



b. 时间与角速度关系



c. 时间与位移关系

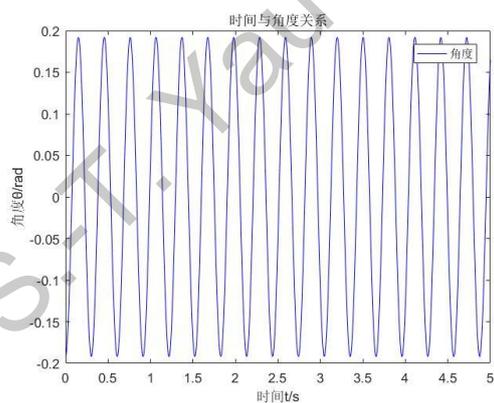


d. 时间与线速度关系

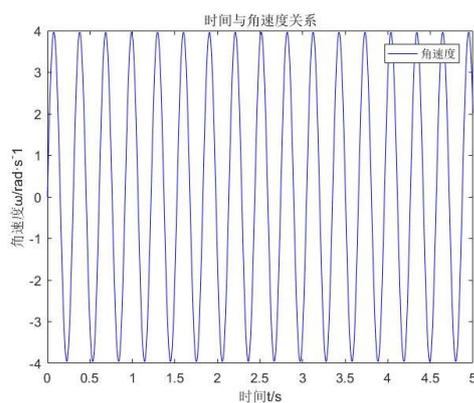
图 1.12 无初始线速度时的运动情况

可以非常明显地看出，系统的运动方式为原地振动。

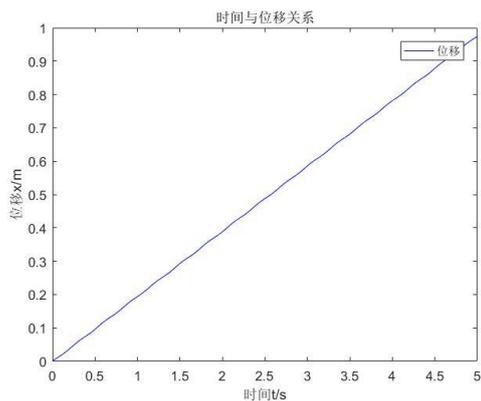
当瓶子存在初速度时，画出四个物理量与时间关系的图像（见图 1.13）：



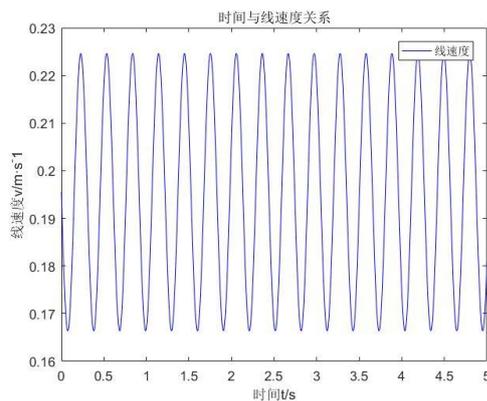
a. 时间与角度关系



b. 时间与角速度关系



c. 时间与位移关系



d. 时间与线速度关系

图 1.12 有初始线速度时的运动情况

从位移——时间图像中不难看出此时瓶子的运动模式为平动与振动的叠加。但与实际实验不同的时候，此图并没有给出钢珠或者水在瓶中的阻尼以及瓶子在地面上受到的阻尼，因此阻尼项并没有在以上运动学方程中体现。

2. 实验

2.1 投掷方式

2.1.1 初始测量——恢复系数

为了验证水对于瓶子下落有缓冲作用，我们分别测量了竖直下落时空瓶子以及不同水量下瓶子的下落高度和反弹高度，并求出恢复系数。

实验装置如图 2.1 所示。墙上固定有标尺。将瓶子从一定高度由静止竖直释放，用相机拍摄，测量其反弹高度。



图 2.1 恢复系数的测量

将不同水量（0%，25%，55%，75%，100%）的瓶子从不同高度 h_1 释放，根据反弹高度 h_2 代入公式 $e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$ 计算其恢复系数。

实验数据如下：

水量 100%			
下落高度/(cm)	反弹高度/(cm)	恢复系数	平均恢复系数
72	36	0.707	0.702
70	34	0.697	

水量 75%			
下落高度/(cm)	反弹高度/(cm)	恢复系数	平均恢复系数
92	26	0.532	0.568
92	29	0.561	
48	17	0.595	
74	23	0.558	
93	33	0.596	

水量 55%			
下落高度/(cm)	反弹高度/(cm)	恢复系数	平均恢复系数
78	11	0.376	0.335
69	6	0.295	

水量 25%			
下落高度/(cm)	反弹高度/(cm)	恢复系数	平均恢复系数
64	7	0.331	0.378
81	10	0.351	
68	10	0.383	
58	9	0.394	
80	15	0.433	

水量 0%			
下落高度/(cm)	反弹高度/(cm)	恢复系数	平均恢复系数
72	33	0.677	0.674
69	31	0.670	

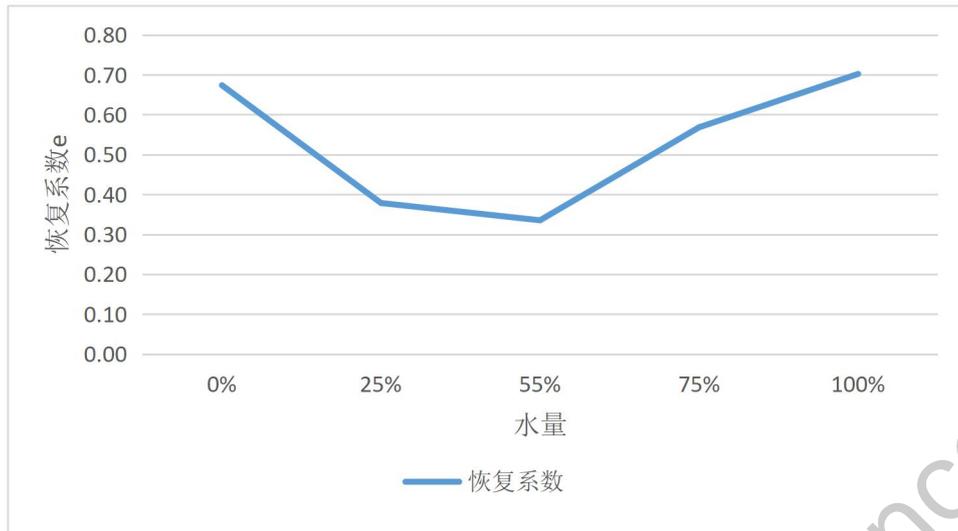


图 2.2 不同水量的恢复系数

可以看出，瓶中水量对瓶子反弹有很大的缓冲作用，并且水量在 25%到 55%之间，瓶子恢复系数最小，缓冲作用最大。

2.1.2 自由下落后立起的概率

下图为 20%水量在不同高度竖直下落后成功立起的概率：

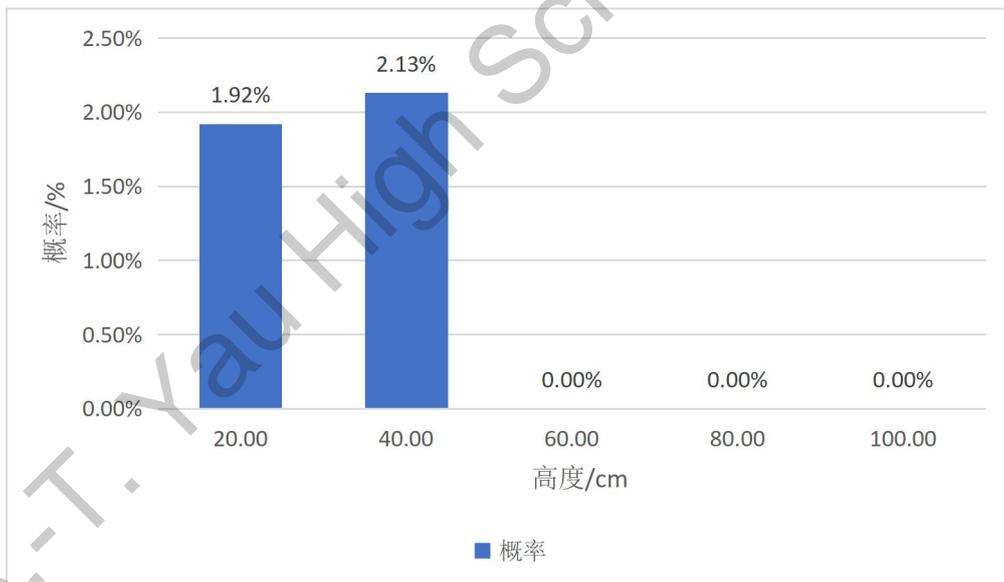


图 2.3 立起概率与下落高度-20%水量

下图为 35%水量在不同高度竖直下落后成功立起的概率：

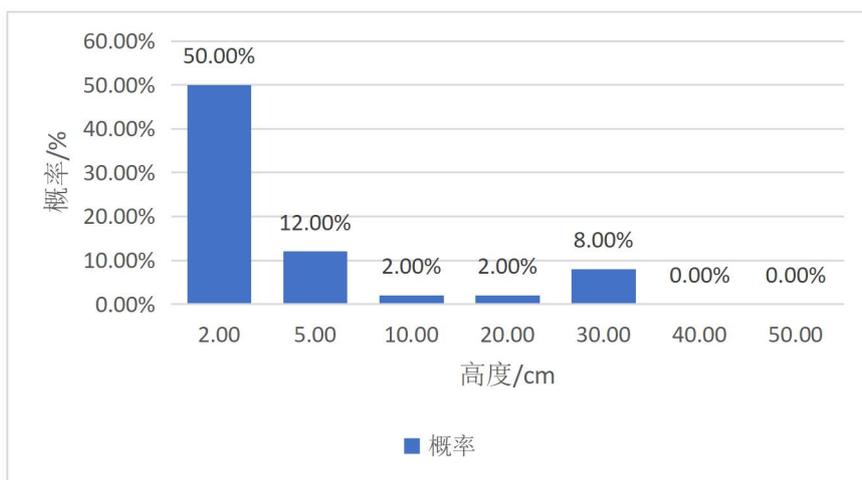


图 2.4 立起概率与下落高度-35%水量

40%水量在不同高度竖直下落后成功立起的概率：

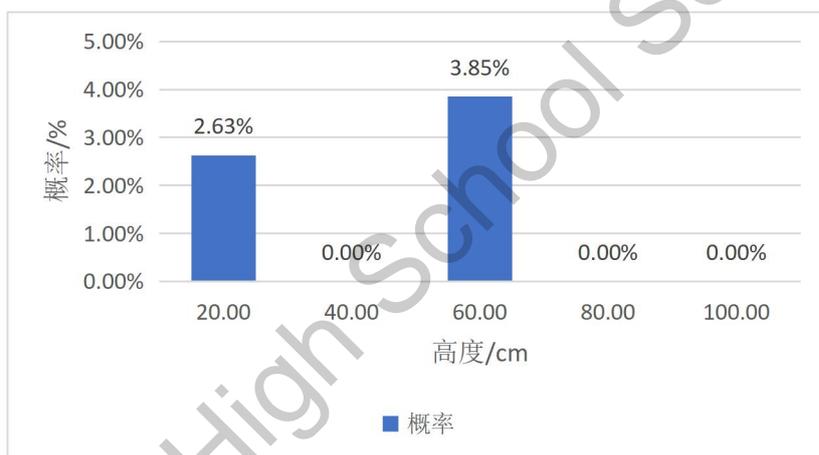


图 2.5 立起概率与下落高度-40%水量

60%水量在不同高度竖直下落后成功立起的概率：

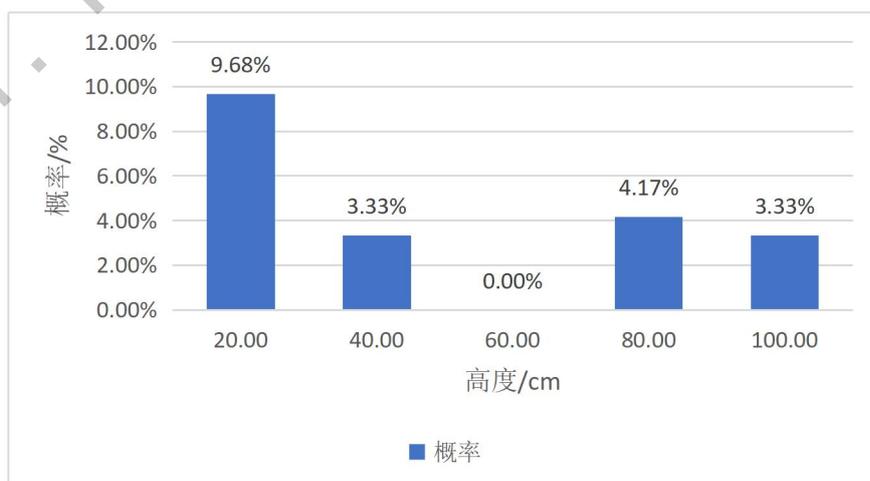


图 2.6 立起概率与下落高度-60%水量

80%水量在不同高度竖直下落后成功立起的概率：

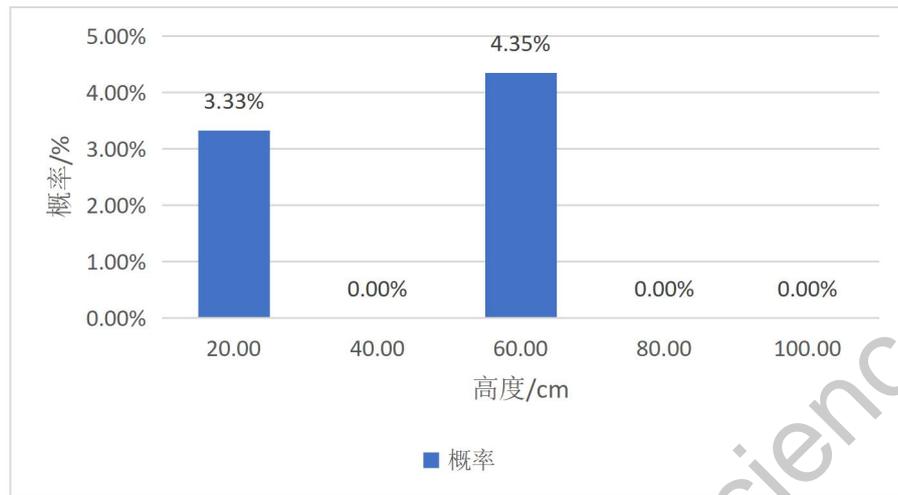


图 2.7 立起概率与下落高度-80%水量

100%水量在不同高度竖直下落后成功立起的概率：

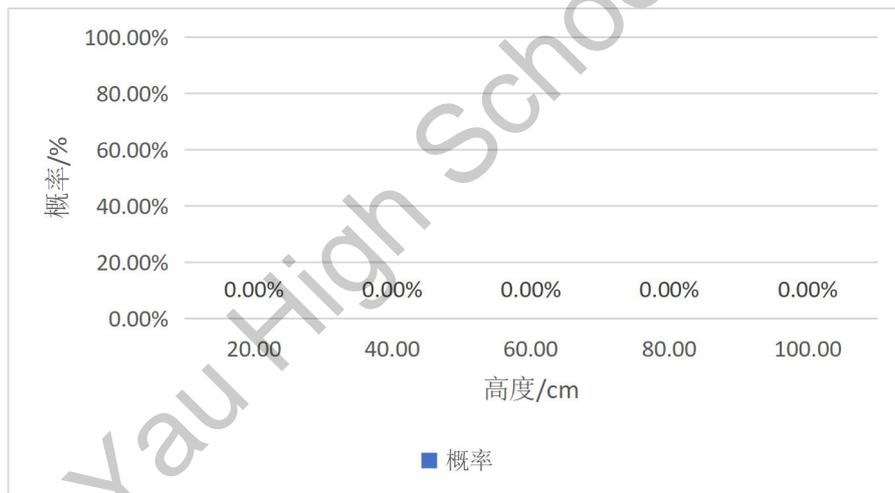


图 2.8 立起概率与下落高度-100%水量

除了在 2 cm 以下高度释放，成功直立的概率均小于 10%。这是因为在瓶子碰地时，通常是某一侧先落地，碰地前角速度几乎为零。地面对瓶子作用的冲量矩容易造成瓶子翻倒。

2.1.3 旋转下落

55%水量 86.4cm 高度发生不同旋转角度后立起概率：

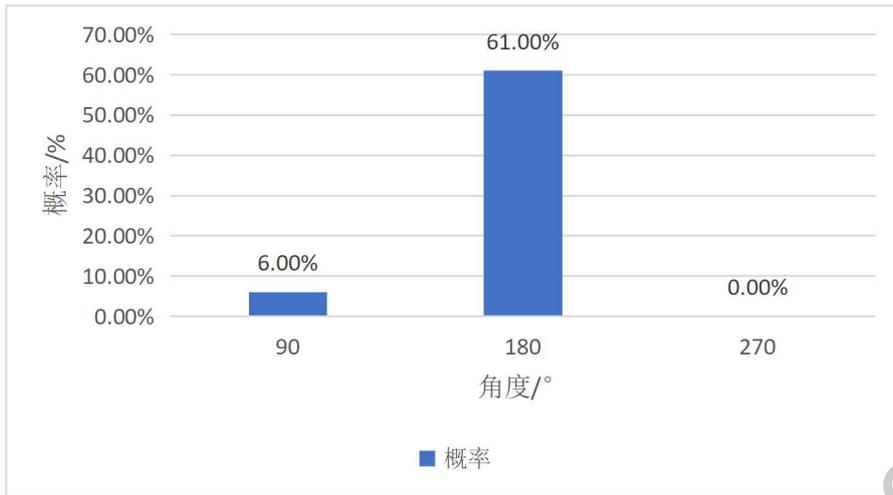


图 2.9 立起概率与角度-55%水量 86.4cm 高度-规则瓶子

换成不规则瓶子，同样水量何释放高度，立起概率仍很高。



图 2.10 立起概率与角度-55%水量 86.4cm 高度-不规则瓶子

35%水量旋转 180 度在不同高度下的概率：

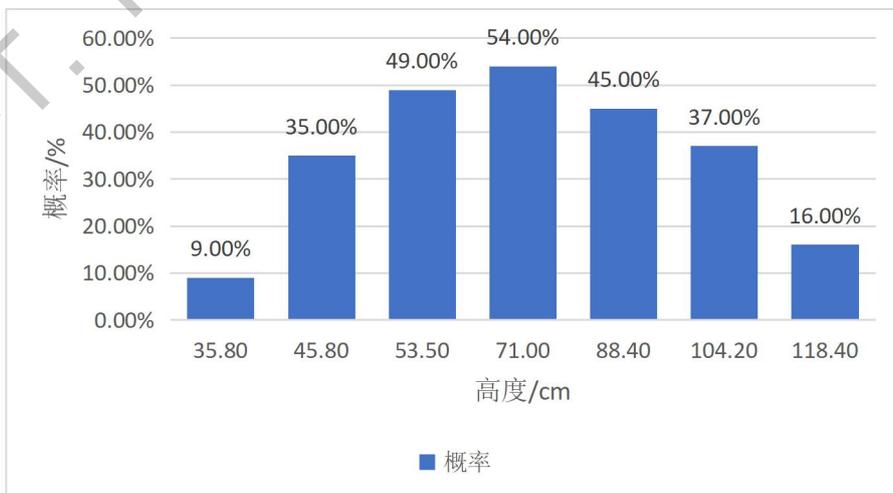


图 2.11 立起概率与下落高度-35%水量 180°

71cm 高度旋转 180 度在不同水量下的概率：

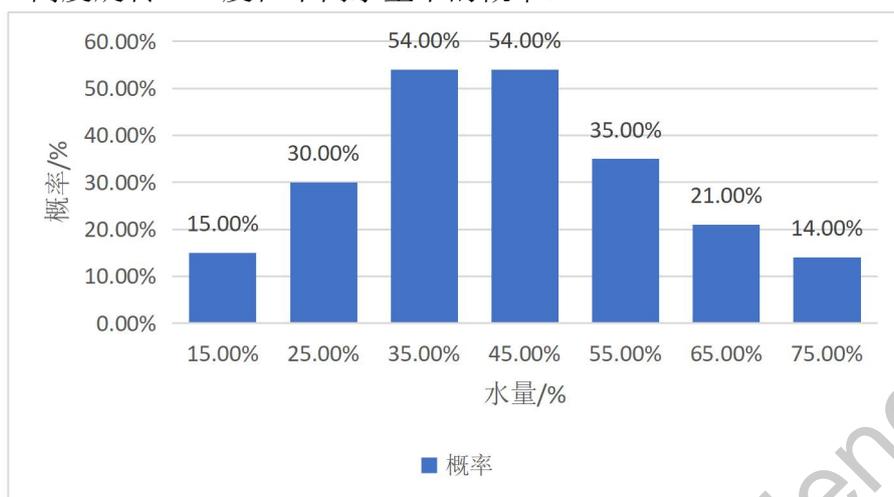


图 2.12 立起概率与水量-71cm 高度 180°

结论：找到了有利于瓶子直立的条件，一定的翻转角度和水量、匹配适当的释放高度有利于瓶子直立。

碰撞位置的影响

在进行控制水量、高度、角度的实验后，我们发现在部分情况下，瓶子落地后立起的概率超过了 50%，并且角度对于瓶子能否立起的影响最大。因此我们把瓶子落地一次碰撞的情况细分为左侧先碰地和右侧先碰地，选取 55% 水量，86.4cm 下落高度，改变瓶子的初始角速度进行实验，并用相机记录（见图 2.13）：

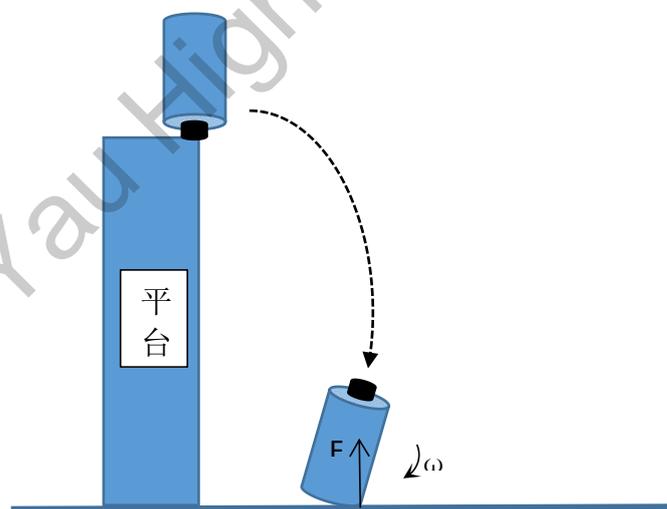


图 2.13 落地碰撞示意图（右侧碰撞）（加角速度和作用力箭头）

如图 2.13 所示，规定左侧碰地是离平台较近边着地，右侧碰地是离平台较远边着地。

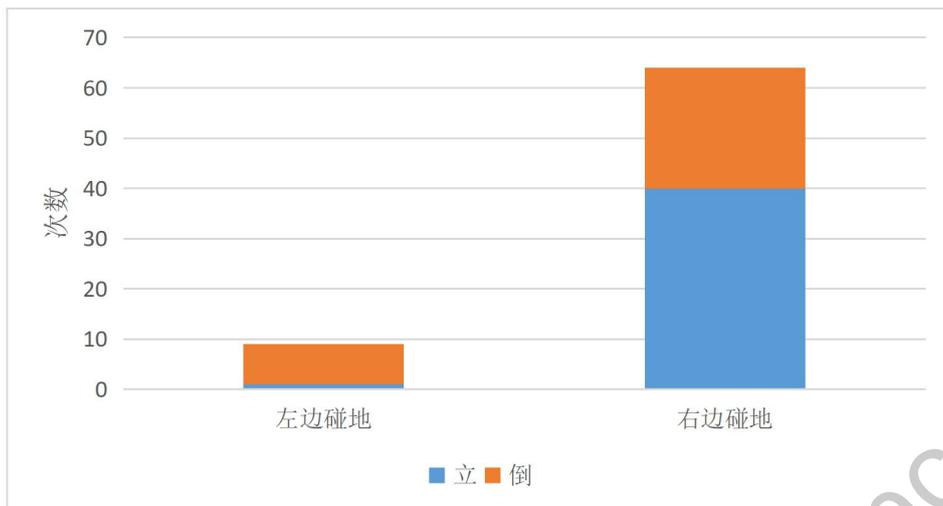


图 2.14 55%水量规则瓶子旋转 180° 碰地情况

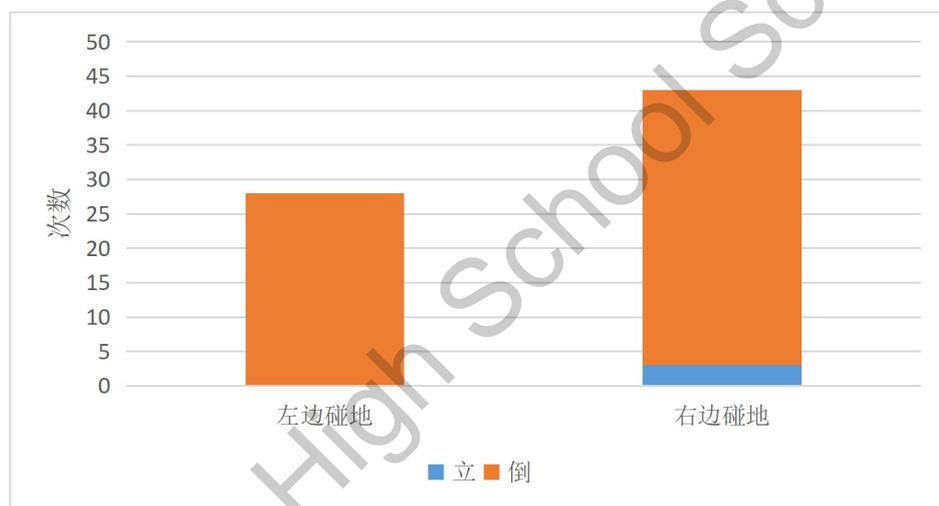


图 2.15 55%水量规则瓶子旋转 90° 碰地情况

实验结果如图 2.14 和图 2.15 所示，瓶子旋转 180° 或 90° 下落时，瓶子右边先落地并立起的成功率都明显大于瓶子左边先落地并立起的成功率。右侧落地时，地面对瓶子作用的冲量矩与自转角动量方向相反，使碰撞之后瓶子角速度尽可能的小。这解释了为什么一定的转动有利于碰撞后直立，初始自转角动量和质心运动的角动量相反，碰撞后角动量可以变小，有利于直立。而左侧落地时，地面对瓶子作用的冲量矩与自转角动量方向相同，加剧瓶子的转动而飞出去。

2.2 滚动方式

2.2.1 模型验证

实验器材：

2 个 500ml 矿泉水瓶、2 个 11° 斜坡、墨水、5 个钢珠、平面、直尺、称重器、胶带、调整好视频录制参数的手机（如图 2.16）。



图 2.16 钢珠与水对比实验器材

实验步骤：

- 1、用胶带将斜坡固定在平面上，并用直尺对斜坡进行高度标记。
- 2、将手机固定在拍摄架上。
- 3、将矿泉水瓶底中心处贴上鲜艳小圆点以便于瓶子运动轨迹的跟踪。

物理量与参数：

$m_{\text{钢珠}}=33\text{g}$ ， $M_{\text{瓶}}=35\text{g}$ ，斜面角度 $\theta=11^\circ$ ， $R_{\text{瓶}}=3.25\text{cm}$ ， $r_{\text{钢珠}}=0.955\text{cm}$

其他物理量和参数：

X：瓶子底部中心点沿滚动方向的位移，V：瓶子底部中心点沿滚动方向的运动速度，a：瓶子底部中心点沿滚动方向的运动加速度。

实验内容：瓶子盛有钢珠和水的运动模式对比：

将两个都是 200g 的瓶子（分别装 165g 染色的水或 5 个钢珠）同时从两个一样的斜坡（度数都是 11° ）离坡底 4cm 高处无初速滚下。

实验数据（同质量同高度，装有钢珠和水的对比）和 track 追踪瓶子底部圆心所得到的相关图像如下（备注：橙色线是装水的瓶子运动数据，蓝色线是装钢珠的瓶子运动数据）：

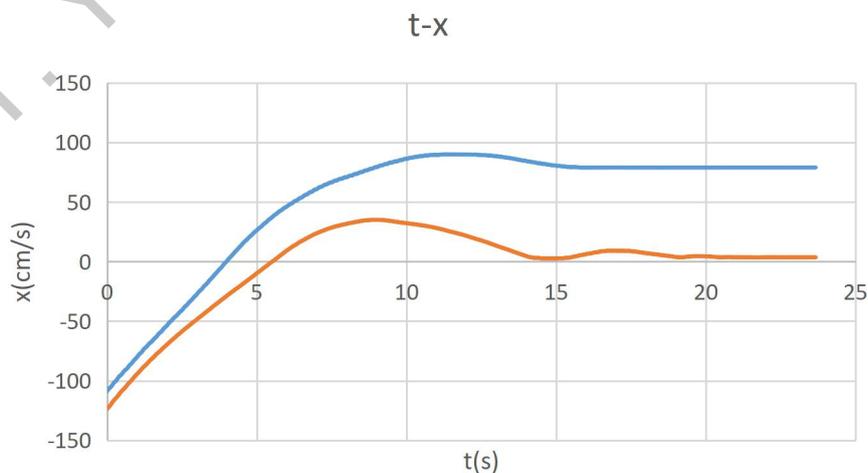


图 2.17 钢珠与水运动位移对比

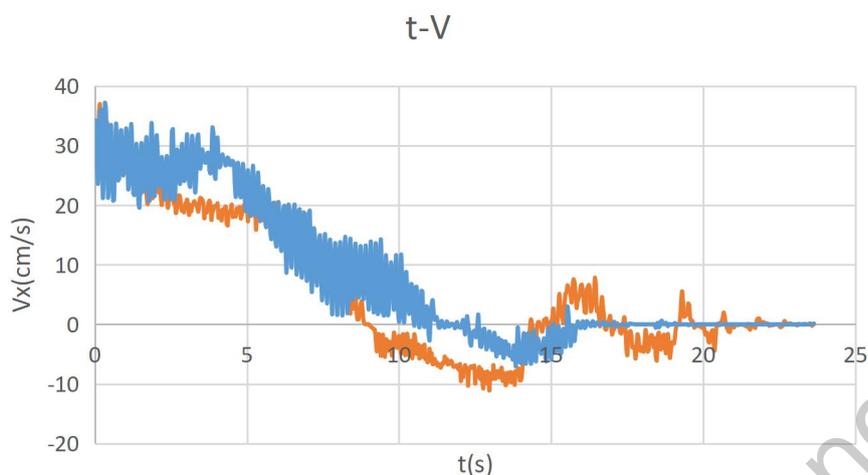


图 2.18 钢珠与水运动速度对比

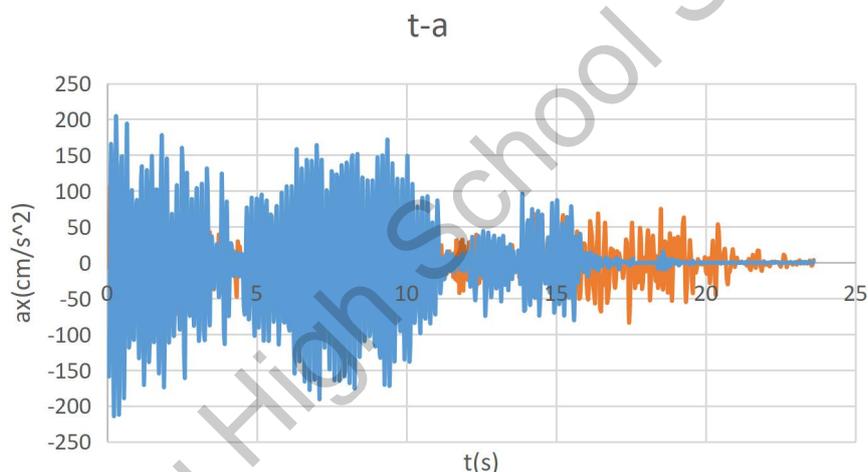


图 2.19 钢珠与水运动加速度对比

通过瓶内盛钢珠与水的对比实验现象的观察，以及对两种情况下瓶子运动的位移、速度以及加速度图像的分析，可以看出，瓶子到达平面后的运动都是平动和振动的叠加，两种情况下的运动模式几乎是一样的，由此可以得出前面理论上的钢珠模型适用于水+瓶子系统。

2.2.2 改变水量实验

实验器材：

16° 斜坡、520mL 圆柱形矿泉水瓶、添加少量黄色颜料的水、针筒、刻度尺、米尺、手机

实验方法：

1. 固定斜坡，在斜坡上标注长度。斜面下方连接一段长度为 3 米的水平面。

进入水平运动时，瓶子被设定为以平动为主的初始条件。

2. 固定手机，将瓶子在斜坡上 4cm 处由静止释放。改变水量。分别在水瓶中注入 15%、25%、35%、45%、55%、65%、75%、85%、95%的水。进入平面后开始拍摄，记录瓶子底部圆心的运动过程。手机拍摄帧数为 4k，30fps。

实验现象：

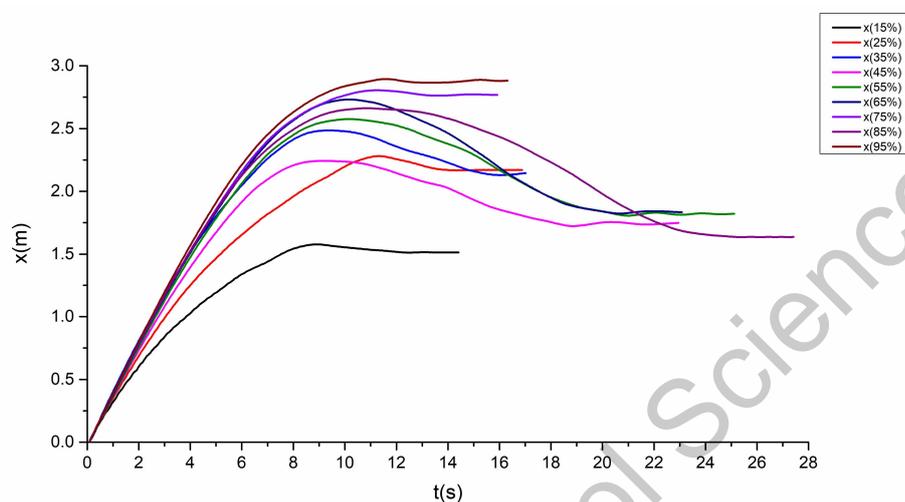


图 2.47 不同水量的位移改变

可以观察到，在实验的所有水量下，瓶子都会做一种折返运动，即瓶子的最终位移小于瓶子能达到的最大位移。

不同水量的速度、加速度改变：

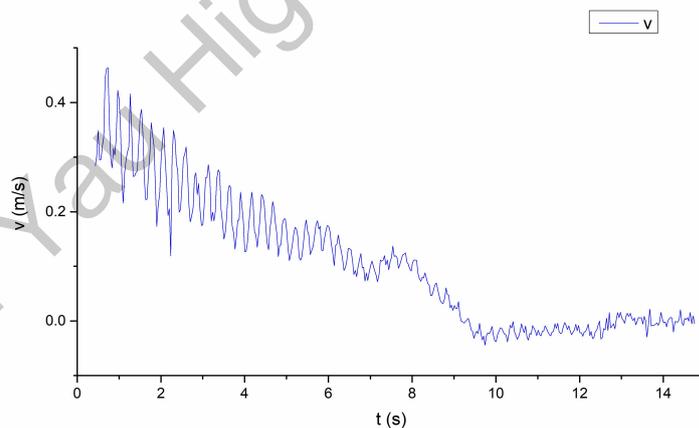


图 2.48 15%水量瓶子速度与时间关系图

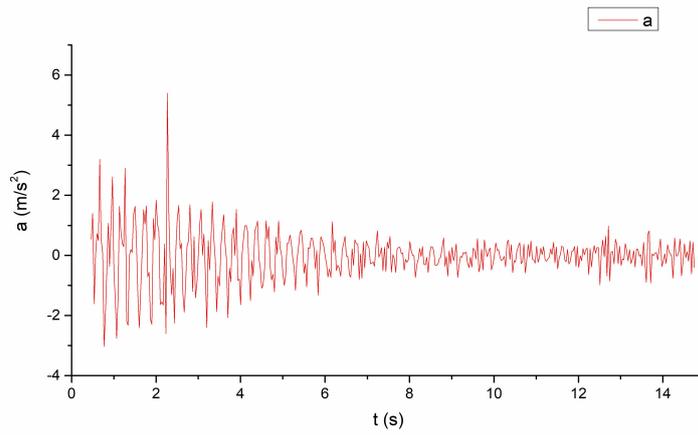


图 2.49 15%水量瓶子加速度与时间关系图

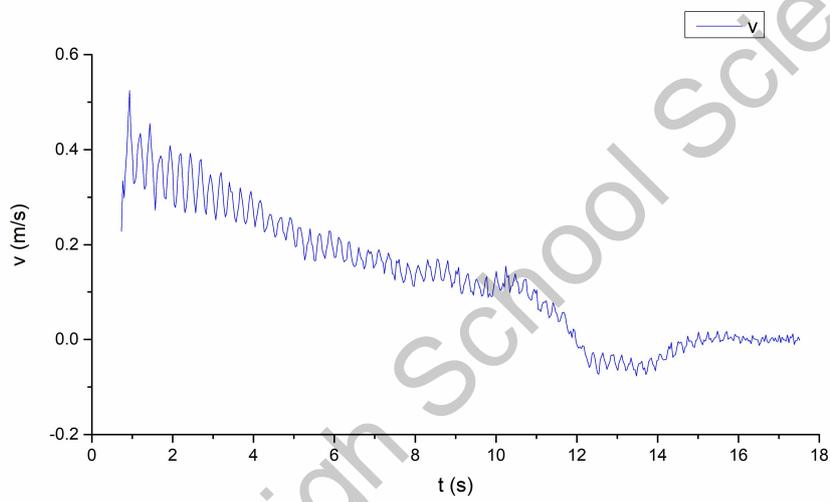


图 2.50 25%水量瓶子速度与时间关系图

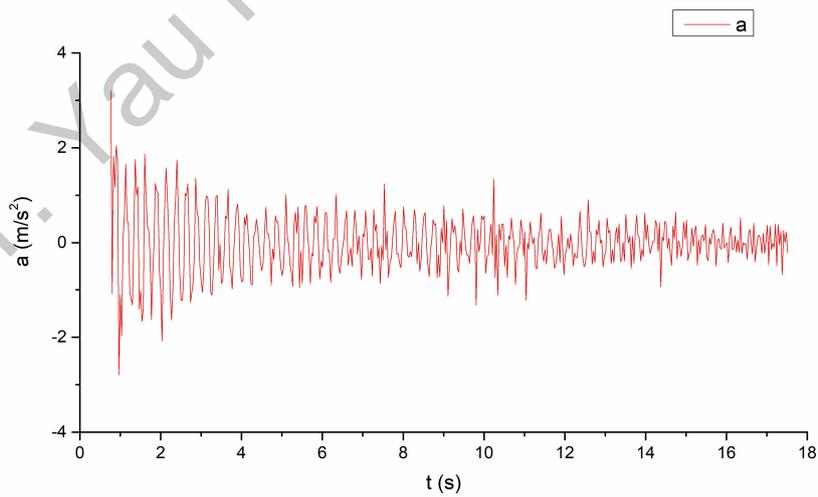


图 2.51 25%水量瓶子加速度与时间关系图

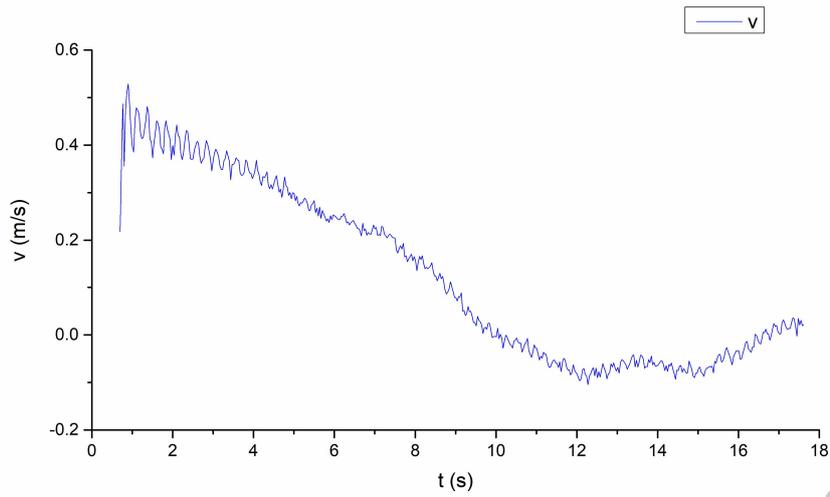


图 2.52 35%水量瓶子速度与时间关系图

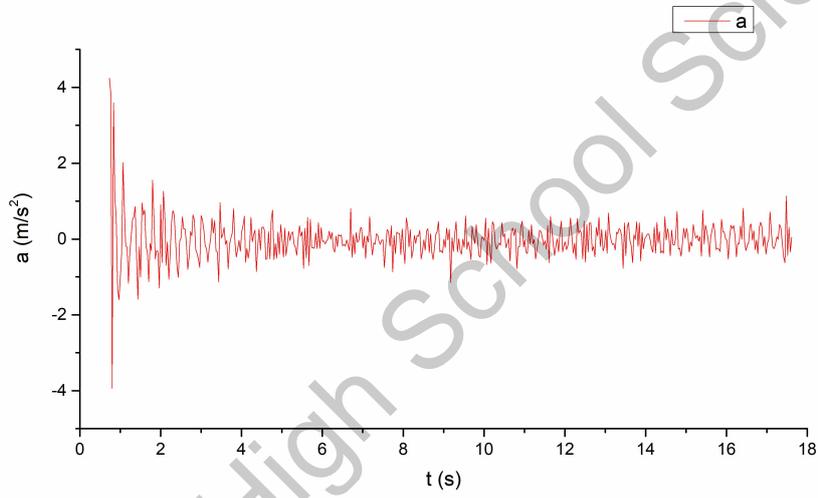


图 2.53 35%水量瓶子加速度与时间关系图

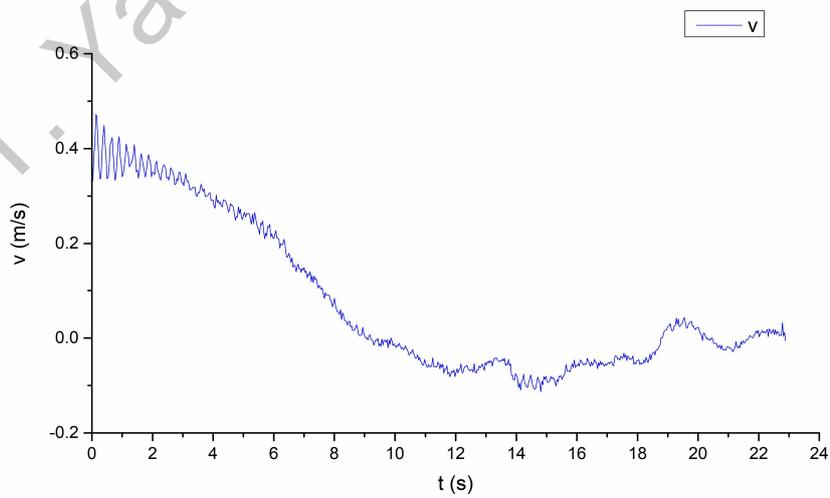


图 2.54 45%水量瓶子速度与时间关系图

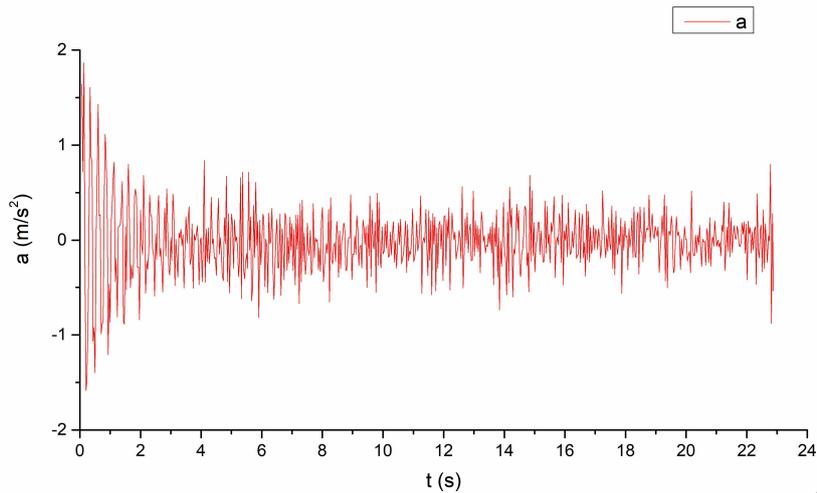


图 2.55 45%水量瓶子加速度与时间关系图

由图 2.48 至图 2.55 可以发现，在瓶子的运动过程中，平动动能和振动动能都在衰减，在平动速度衰减到接近于零时瓶子做振动运动，最终在瓶子静止，平动速度与振动速度都变为零。平动动能和振动动能的衰减分别表现为瓶子速度的减小和振幅的减小。两者的叠加表现为加速度的变化。加速度在运动开始衰减最明显，之后逐渐在某一范围内振动，衰减缓慢。因为运动开始时加速度表现为平动速度衰减和振动速度衰减的叠加，之后表现为振动运动主导的速度变化。

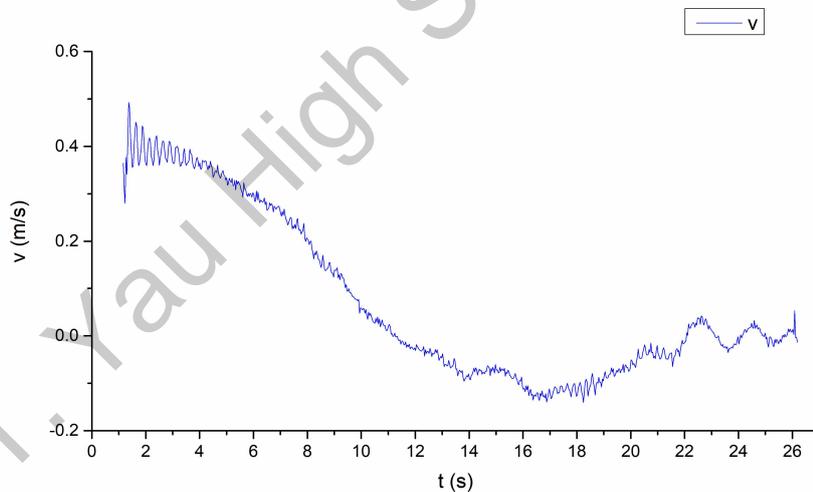


图 2.56 55%水量瓶子速度与时间关系图

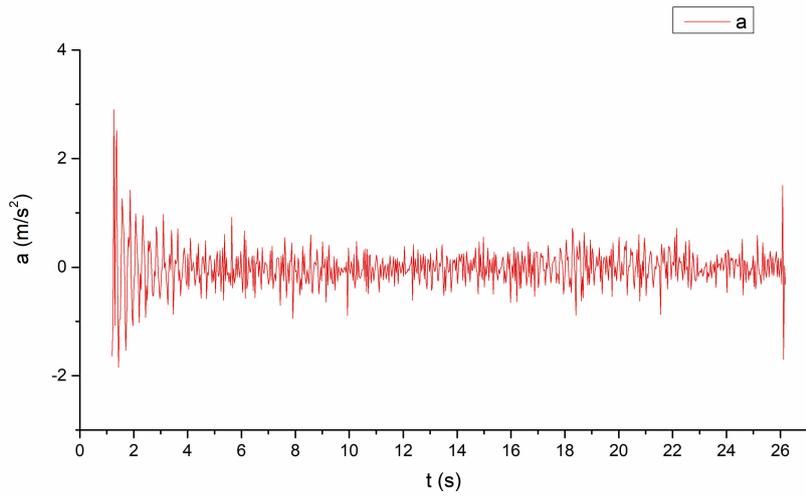


图 2.57 55%水量瓶子加速度与时间关系图

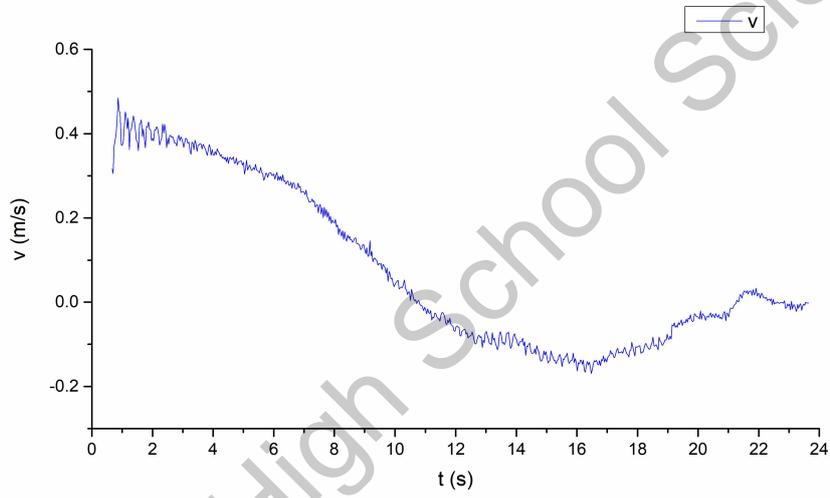


图 2.58 65%水量瓶子速度与时间关系图

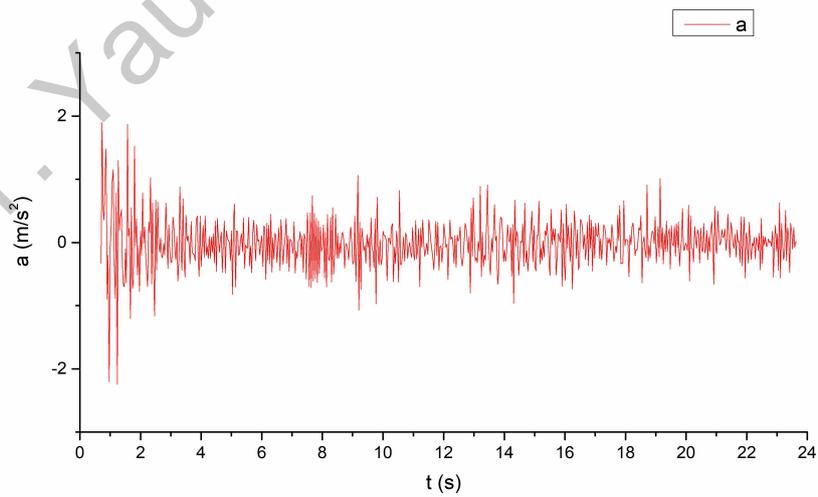


图 2.59 65%水量瓶子加速度与时间关系图

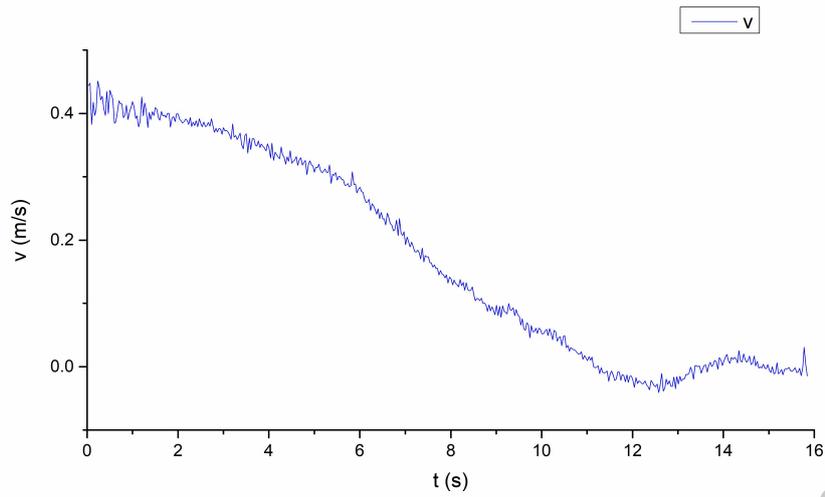


图 2.60 75%水量瓶子速度与时间关系图

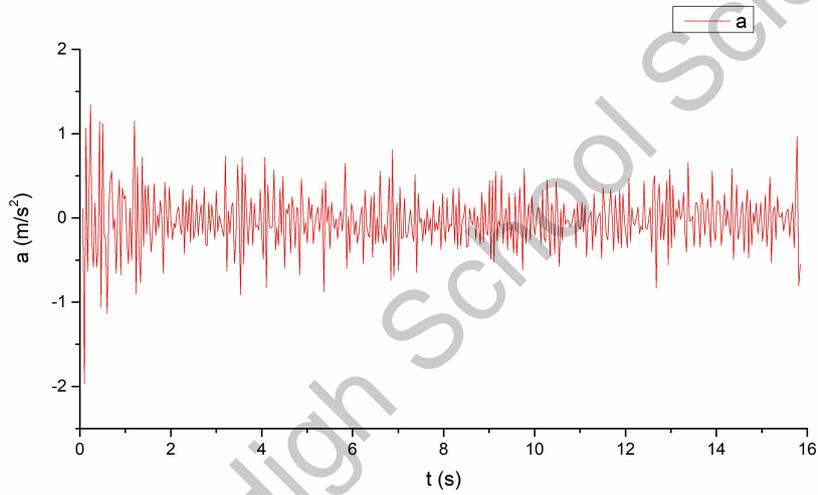


图 2.61 75%水量瓶子加速度与时间关系图

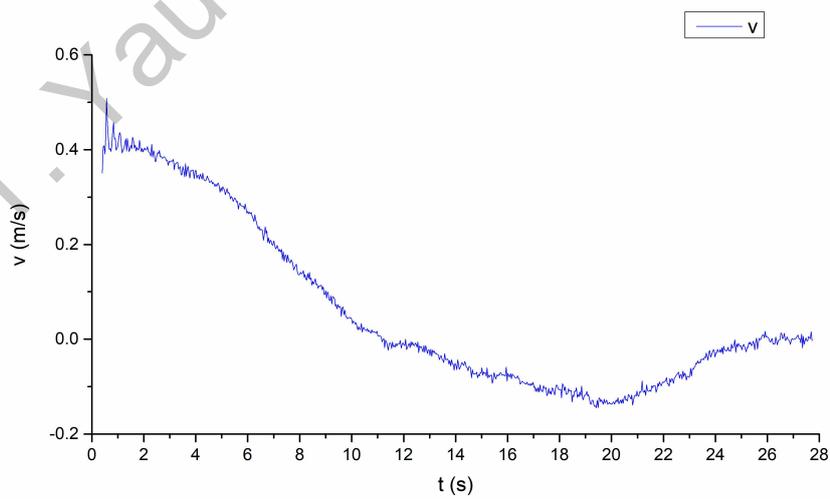


图 2.62 85%水量瓶子速度与时间关系图

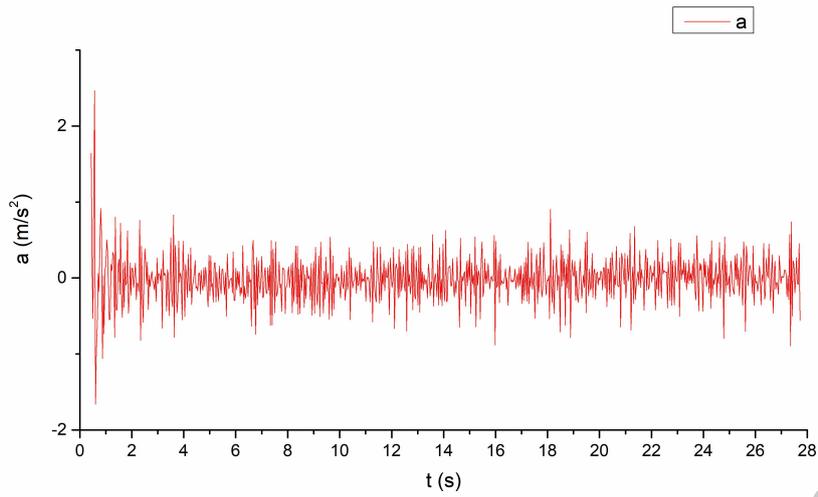


图 2.63 85%水量瓶子加速度与时间关系图

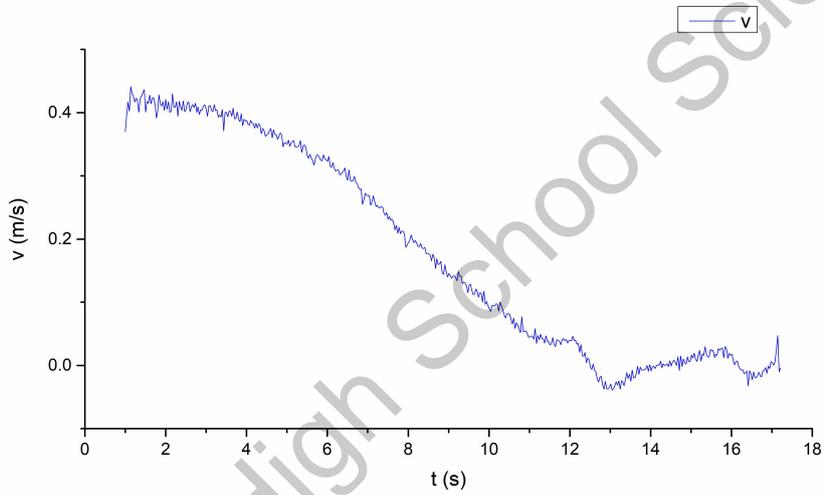


图 2.64 95%水量瓶子速度与时间关系图

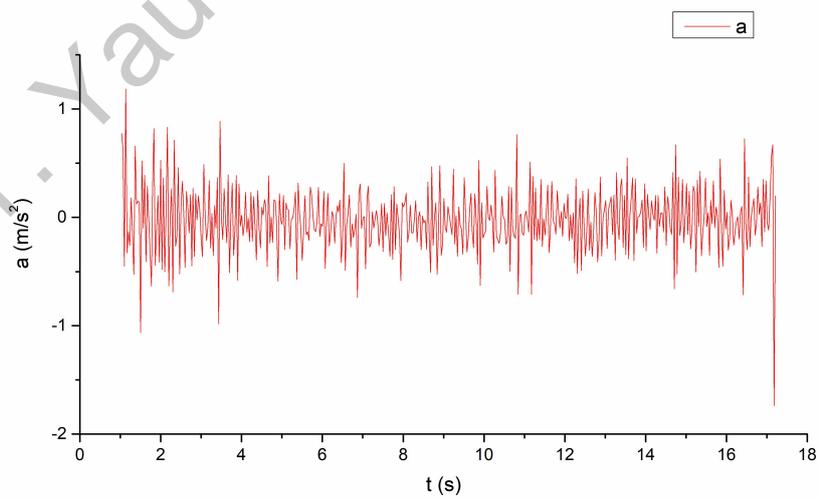


图 2.65 95%水量瓶子加速度与时间关系图

实验所有水量情况下，瓶子在平地的运动都是平动与振动的叠加。瓶底圆心的速度先是减小到零，后反方向增加，在零周围来回摆动。在每一次振动中，瓶子的最大加速度绝对值逐渐减小。在某一个值之间摆动，最终变为 0，瓶子达到静止状态。

由同一高度释放时，随着水量增加，瓶子的初始振动频率变化范围不大，在 4Hz 左右。在运动过程中，瓶子的振幅在逐渐减小，频率在逐渐增加。

根据前文理论结论，瓶子的振动频率应该为 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2M+m}{2M} \frac{g}{R}}$ ，与水量的改变

相关。但实验的结果表面，瓶子振动频率与水量改变关系不大。观察实验现象，我们发现在运动过程中，水并不是整体运动。由于惯性，一部分水在运动时不干扰瓶子振动。我们假设参与瓶子振动的水量为有效水量，将 $f = 4\text{Hz}$, $M = 0.035\text{kg}$, $R = 0.0325\text{m}$ 带入得 $m \approx 0.0765\text{kg}$ 。而随着平动速度的减小，水受惯性力影响的部分也减少，有效水量增加，振动频率的增加。

随着水量的增多，瓶子释放前的重力势能增加，释放后到达水平地面的动能也增加，因此水瓶平动初速度增加，初始振幅减小，振幅衰减更快。

2.2.3 改变释放高度实验

实验设计：

首先观察平动为主的运动。将瓶子从斜面上一定高度释放，滚动进入水平面。形成以平动为主的初始运动状态。

观察以振动为主的运动。使瓶子经过一段水平轨道后与竖直模板相撞，碰撞后瓶子将进入以振动为主的初始运动。

实验器材：

16° 斜坡、520mL 圆柱形矿泉水瓶、添加少量黄色颜料的水、桌椅、针筒、刻度尺、米尺、手机

实验方法：

1. 固定斜坡，在斜坡上标注长度。斜面下方连接一段长度为 2.11 米的水平面。

2. 将竖直木板垂直于瓶子轨道放置。与瓶子出发点相距 2.11 米。进入水平运动时，瓶子被设定为以平动为主的初始条件。

3. 使瓶子经过一段水平轨道后与竖直模板相撞，固定好木板，使相撞时木板几乎不发生偏移。瓶子将进入以振动为主的初始条件。

4. 固定手机，将一定水量的瓶子从斜面上一定高度处由静止释放。进入平面后开始拍摄，记录瓶子底部圆心的运动过程。手机拍摄帧数为 4k, 30fps。

55%水量：

释放高度 4cm：

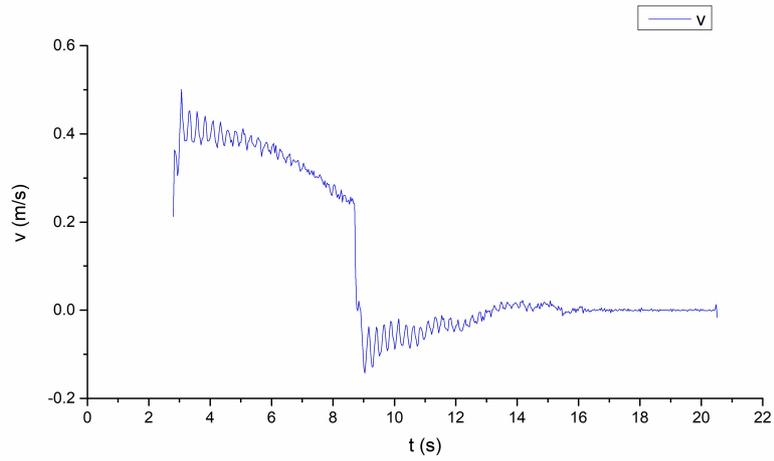


图 2.66 55%水量瓶子 4cm 高度释放速度与时间关系图

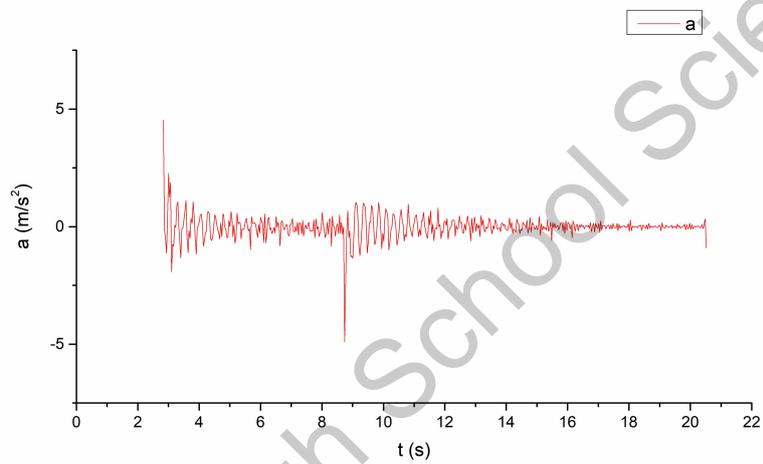


图 2.67 55%水量瓶子 4cm 高度释放加速度与时间关系图

释放高度 6cm:

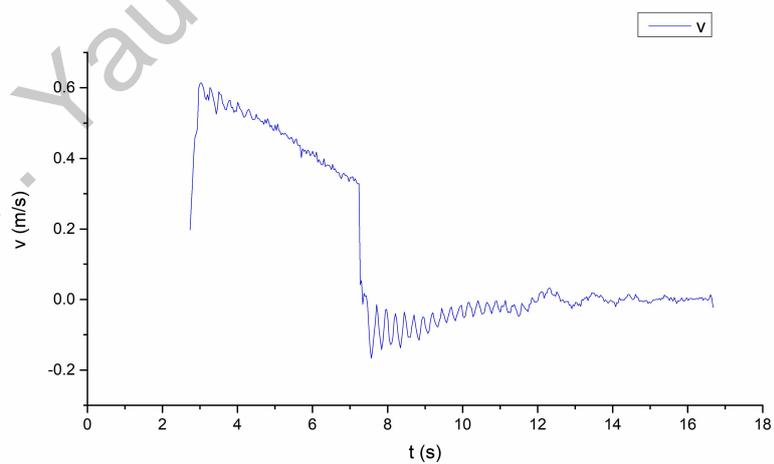


图 2.68 55%水量瓶子 6cm 高度释放速度与时间关系图

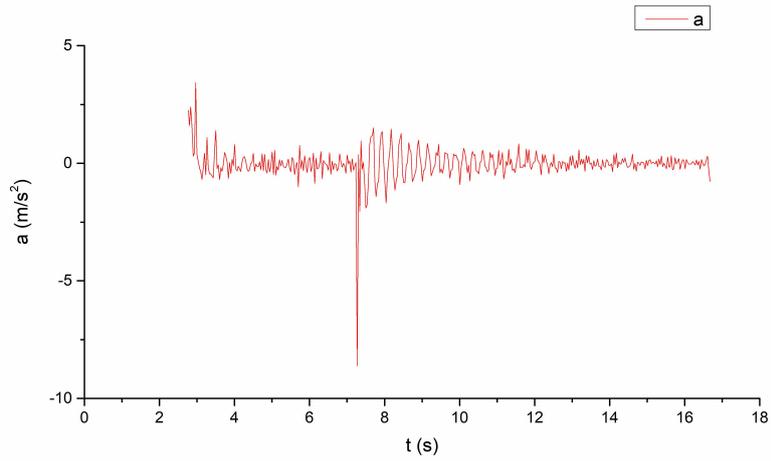


图 2.69 55%水量瓶子 6cm 高度释放加速度与时间关系图

释放高度 8cm:

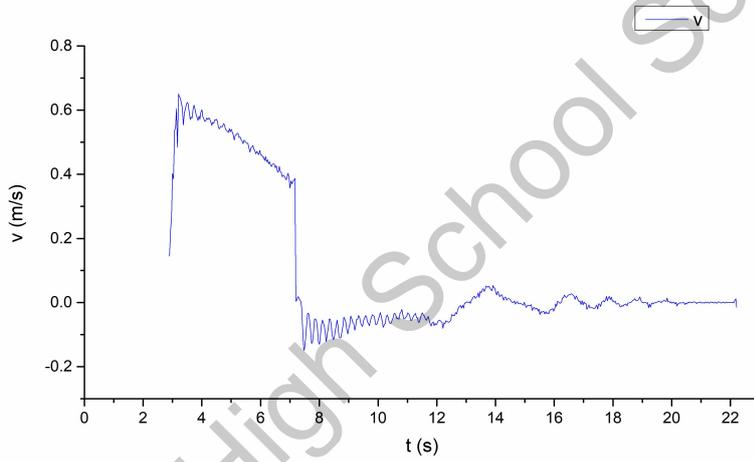


图 2.70 55%水量瓶子 8cm 高度释放速度与时间关系图

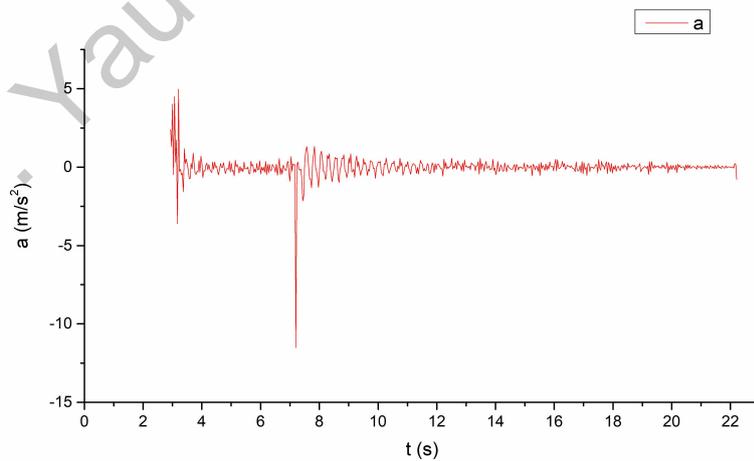


图 2.71 55%水量瓶子 8cm 高度释放加速度与时间关系图

释放高度 10cm:

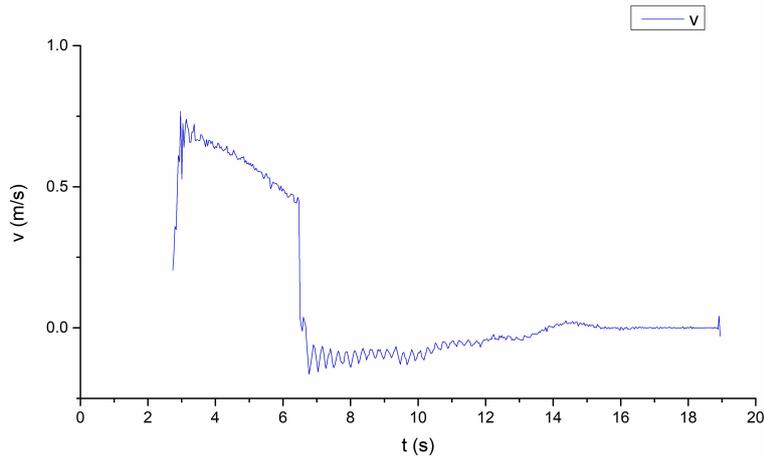


图 2.72 55%水量瓶子 10cm 高度释放速度与时间关系图

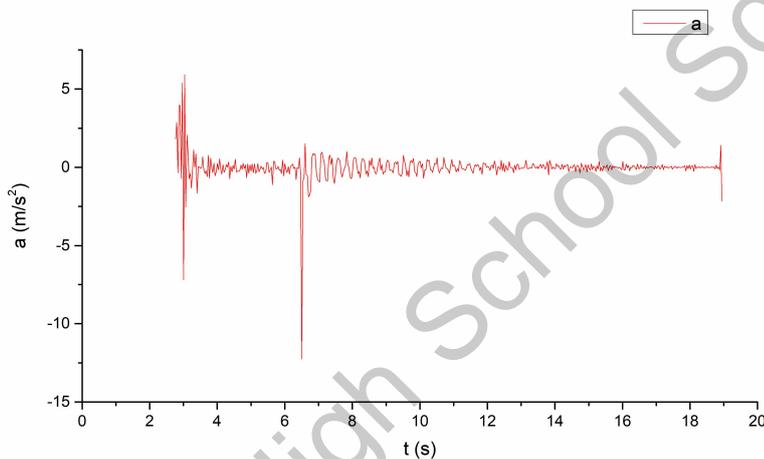


图 2.73

55%水量瓶子 10cm 高度释放加速度与时间关系图

运动分为两个阶段：

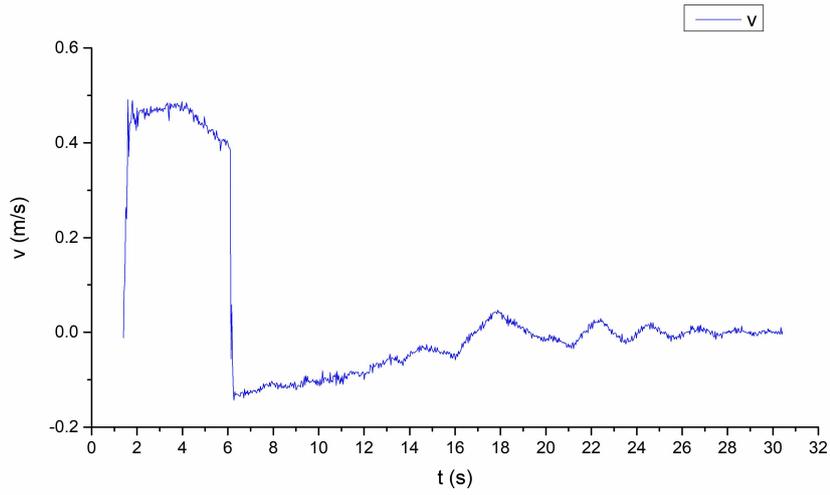
(1) 从斜面释放后的以平动为主的运动。在此过程中，平动和振动都在持续衰减。平动速度不断减小，振动幅度也在减小。

(2) 碰撞后，振动加剧，平动减速，进入以振动为主的运动，很快平动速度衰减到很小，瓶子在平衡位置附近来回滚动，直至静止。

瓶子有时会出现反向加速的情况，在瓶子自身不断小幅度振动的情况下，还会出现在瓶子最终静止位置附近的大幅度振动。

100%水量：

释放高度 4cm：



2.74 100%水量瓶子 4cm 高度释放速度与时间关系图

图

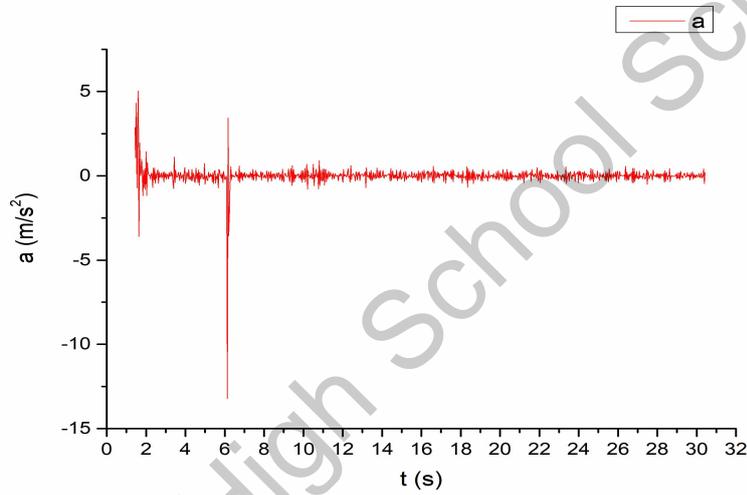


图 2.75 100%水量瓶子 4cm 高度释放加速度与时间关系图

释放高度 6cm:

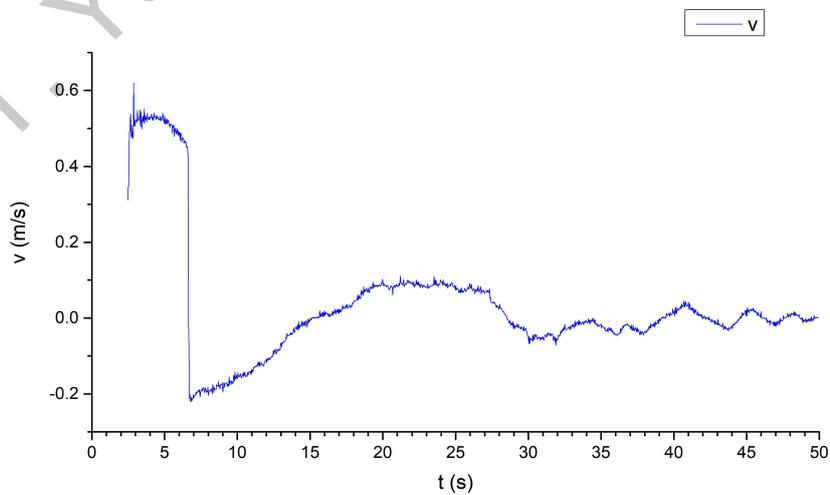


图 2.76 100%水量瓶子 6cm 高度释放速度与时间关系图

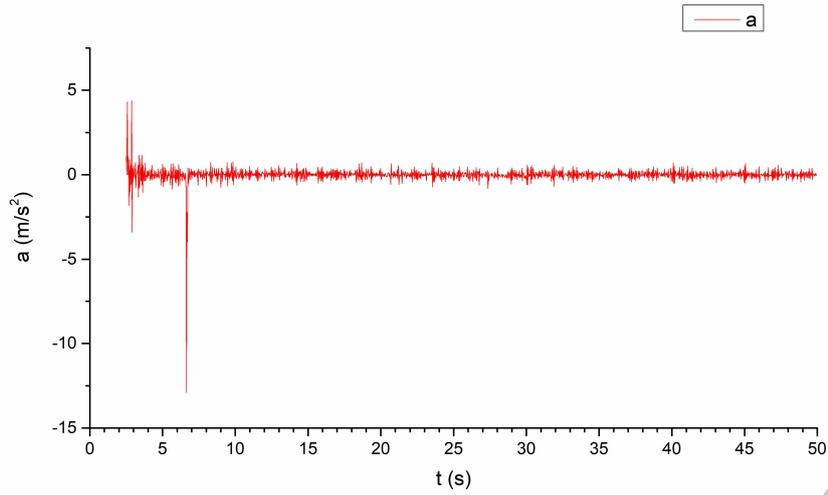


图 2.77 100%水量瓶子 6cm 高度释放加速度与时间关系图

释放高度 8cm:

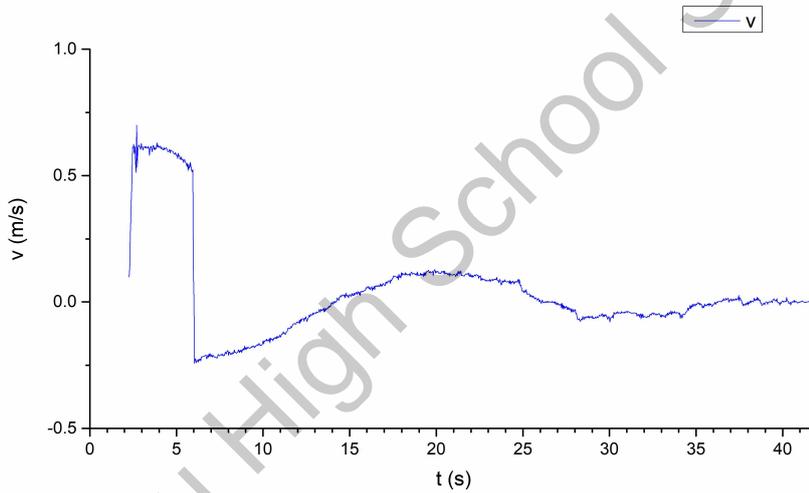


图 2.78 100%水量瓶子 8cm 高度释放速度与时间关系图

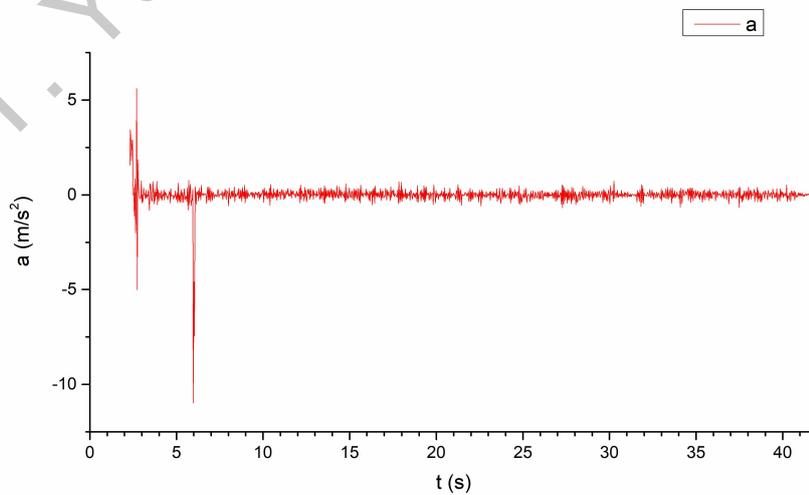


图 2.79 100%水量瓶子 8cm 高度释放加速度与时间关系图

释放高度 10cm:

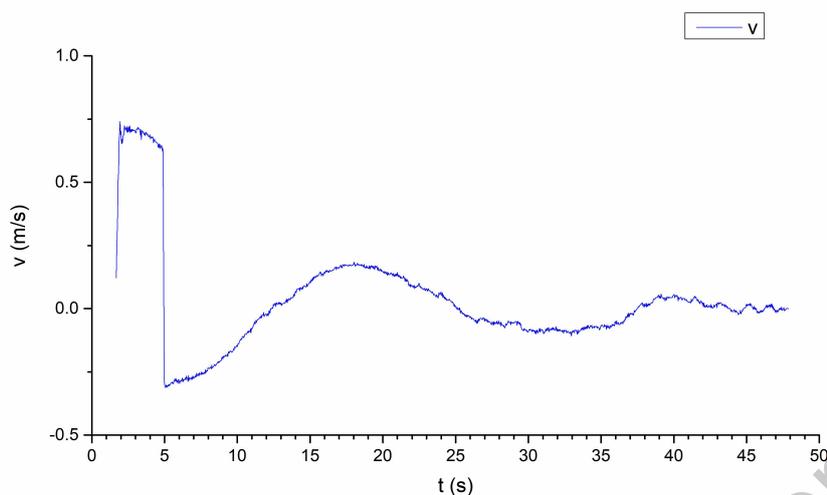


图 2.80 100%水量瓶子 10cm 高度释放速度与时间关系图

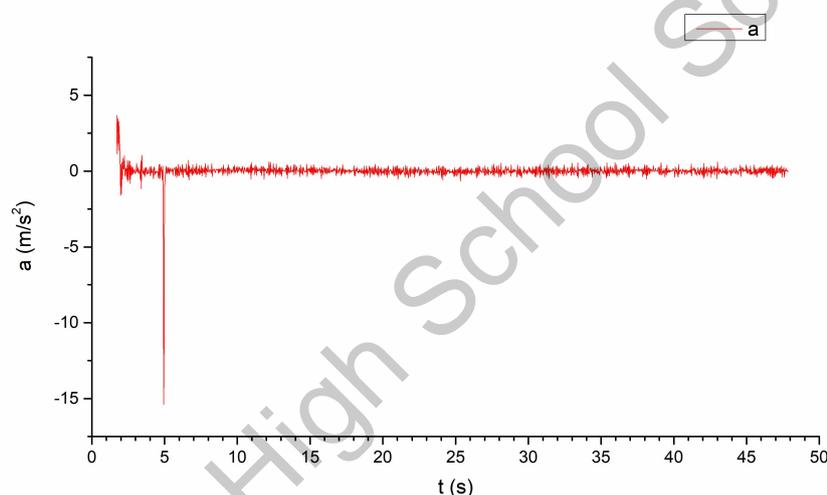


图 2.81 100%水量瓶子 10cm 高度释放加速度与时间关系图

释放高度越高，瓶子到达地面时的线速度就越大。不考虑振动，瓶子的平动近似于匀减速运动。刚释放时，水的角速度较大，振幅也较大，之后逐渐减小。发生碰撞时，角速度瞬间增大，平动速度瞬间减小，并持续减速。

当瓶子装满水以后，运动的模式类似，但是振动幅度明显减弱，瓶子需要经过更长的时间才能完全静止。在平动为主阶段，说明瓶子里水能造成持续减速，碰撞后水的振动更有助于吸收能量，使瓶子快速达到静止。因此，瓶子里充水在滚动中有助稳的作用。

对比 55%水量瓶子的运动情况和 100%水量瓶子的运动情况，发现在 55%水量时，瓶子振动频率的增加和振动幅度的衰减都比较明显。而在 100%时，瓶子的振动评论和振动幅度基本维持不变。这印证了前文关于有效水量的猜想。55%水量时，当平动速度较大时，一部分水不参与振动运动，随着时间增加，平动速度减小，参与振动运动的水量增加，振动频率增加。100%水量时，水在瓶内没有运

动空间，基本可以看做为一个整体运动。因此频率很快，随时间变化也不明显。

可能导致误差的因素：

- 1、瓶子本身不是完美的圆柱体（已经观察到瓶子底面不齐）。地面不平。
- 2、镜头与瓶子之间距离太小，拍摄画面两端产生较大的形变，对 tracker 在两端采集的数据产生影响。

3. 实际应用

此类问题在实际生活中也有研究的价值，比如油罐车的运动。对于油罐车在转弯时的物理图景，我们可以先对其进行简化（见图 3.1）：

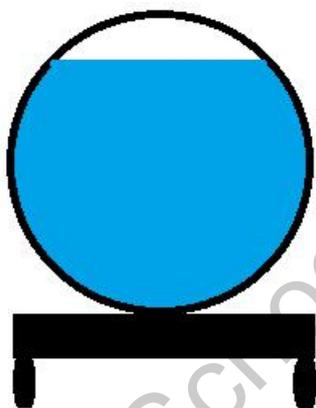


图 3.1 油罐车静止时剖面图

假设油罐车储液容器形状为圆柱体且壁厚不计，下部形状为长方体+圆柱的地盘+车轮组合。在静止时其内部液体形成的形状对称轴应处在竖直方向上。

旋转时，假设其内部液体已经在油罐车此非惯性系中达到平衡，则其内部液体的基本形状应保持不变，方向应与竖直方向存在一定夹角（如图 3.2）：

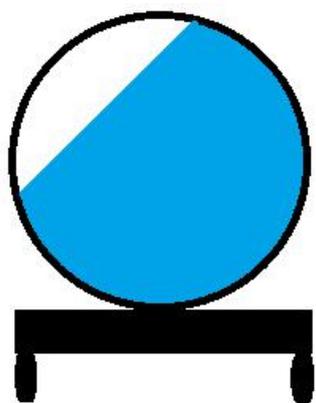


图 3.2 油罐车转弯时剖面图

假设油罐车内部所装液体体积为 V_L ，质量为 m_L ，密度为 ρ ；储存油罐车内部液体容器的质量为 m_c ，半径为 r ，下部支撑装置和车轮的总质量为 m_0 ，宽度为 $2L$ ，重心高度为地盘高度的一半，假设其为 h 。

以正在转弯的油罐车为参考系，则其内部液体和整个车身均会受到惯性力，其大小分别为 $m_L \frac{v^2}{R}$ ， $(m_0 + m_c) \frac{v^2}{R}$ 。作用点分别在液体和车身的质心上。

因此我们首先需求出油罐车内部液体的质心位置。油罐车内部液体的形状应为一个球缺，假设其对称轴与竖直方向的夹角为 θ （见图 3.3）。

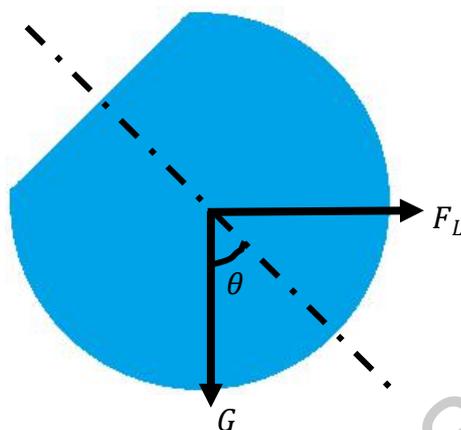


图 3.3 油罐车内部液体形状示意图

首先以球缺球心的位置为原点，以其对称轴为 x 轴，垂直于 x 轴的任意一条射线为 y 轴正方向建立平面直角坐标系。接下来在以 x 轴方向上对球缺进行微圆（如图 3.4 所示）。

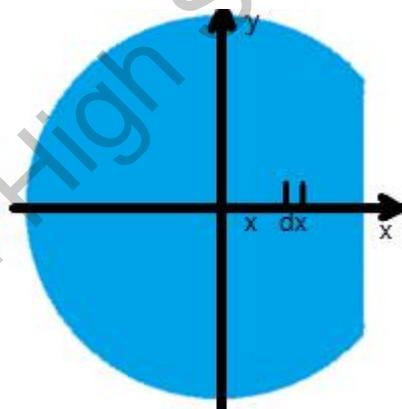


图 3.4 建立数学模型

由对称性可知，球缺的质心只会落在 x 轴上。此时由物体质心的定义 $r = \frac{\sum m_i r_i}{M}$ 得球缺质心的横轴为：

$$X = \frac{\int_{-r}^{h-r} \pi \rho (r^2 - x^2) \cdot x dx}{m_L} = \frac{\pi \rho r^2}{2m_L} [(h-r)^2 - r^2] - \frac{\pi \rho}{4} [(h-r)^4 - r^4]$$

显然对于液体球缺，其与竖直方向所成夹角 θ 有如下关系式：

$$\tan \theta = \frac{F_L}{m_L g} = \frac{v^2}{Rg}$$

接下来对油罐车进行受力分析。假设转弯时油罐车内侧车轮收到路面的支持力为 N_1 ，外侧为 N_2 ，内部液体受到的离心力为 F_L ，容器受到的离心力为 F_c ，下部地盘以及车轮受到的离心力为 F_0 ；油罐车转弯半径为 R （即油罐车车身质心到其转弯曲率半径的水平距离为 R ）。

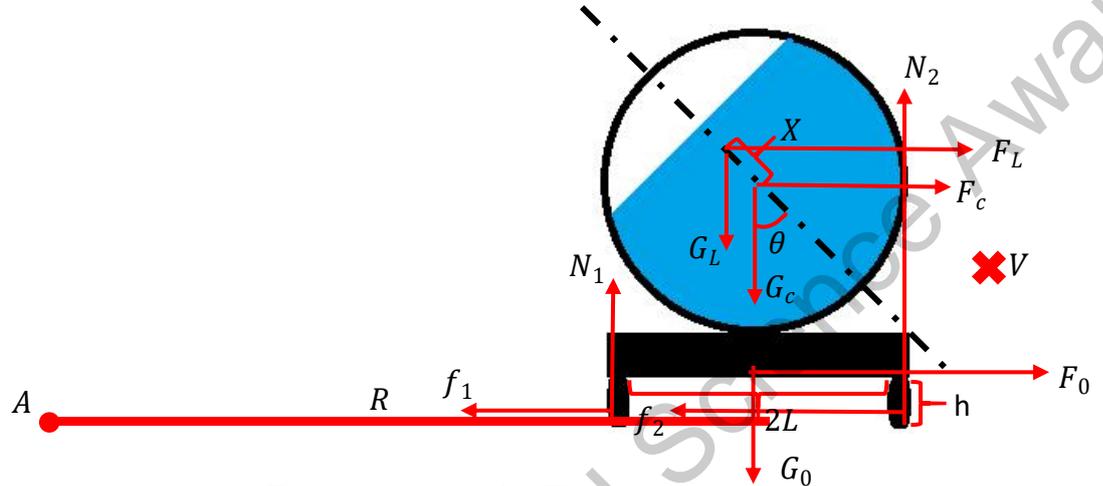


图 5：油罐车转弯示意图

则由受力平衡可列出等式：

$$N_1 + N_2 = (m_0 + m_c + m_L)g \dots\dots ①$$

$$f_1 + f_2 = F_L + F_c + F_0 \dots\dots ②$$

以A点为转轴，由力矩平衡可列出等式：

$$N_1(R - L) + N_2(R + L) = m_L g(R - X \sin \theta) + (m_0 + m_c)gR + F_0 h + F_c(2h + r) + F_L(2h + r + X \cos \theta) \dots\dots ③$$

可以想见，当油罐车的速度增大时，其所受到的离心力也越大，即 F_0, F_L, F_c 随速度的增加而增大。而通过对上两式的观察发现当 F_0, F_L, F_c 变化时，只有 N_1 和 N_2 能够随之变化，且 N_1 和 N_2 之和为定值。因此当②式右边的力矩增大时，左边只有通过增加 N_2 减少 N_1 的方式来增加支持力的力矩，而当 N_1 减小至0时，油罐车便会向外侧发生侧翻；或当路面的摩擦力不足以提供油罐车行驶的向心力时，油罐车将会向外发生侧滑。

假设路面的滑动摩擦系数为 μ ；以油罐车外侧接触路面处为转轴，列出临界条件下的受力平衡方程：

$$N_2 = (m_0 + m_c + m_L)g \dots\dots ④$$

$$m_L g(L + X \sin \theta) + (m_0 + m_c)gL = m_c(2h + r) \frac{V^2}{R} + m_L(2h + r + X \cos \theta) \frac{V^2}{R} + m_0 h \frac{V^2}{R} \dots\dots ⑤$$

或：

$$\mu g(m_0+m_c+m_L) = (m_0+m_c+m_L) \frac{v^2}{R} \dots\dots\textcircled{6}$$

当两种临界条件之一首先被满足时，油罐车便会发生危险。

4. 结论

我们首先通过理论模型的建立和推导，然后通过计算发现，在投掷过程中，适当的角速度与线速度的匹配，以及合适的水量能够最大化瓶子立起的概率。顺其思路，我们也可以发现，改变瓶子本身的性质也可以增大其立起的概率，比如增大其底面半径并减小高度等。同时我们发现，在抛掷实验中，任何条件都需要综合考虑其恢复系数而定。并且由于在理论模型推导过程中我们将瓶子 and 水的系统当成刚体，而实际碰撞中，并不是 100% 的水均参与了瓶子底面与地面的碰撞，而是会对碰撞的能量起到吸收的作用，进而使定量的理论较为难推导，因此我们的理论推导结果只从定性的角度分析。

在滚动的理论推导中，我们用钢珠加瓶子模型描写系统的运动。我们发现当瓶子本身不存在线速度时，瓶子的运动情况为原地振动；而当线速度存在时，瓶子的运动为平动与振动的叠加。

实验过程中，我们首先考虑了可能影响瓶子稳定性的因素，即水量和初始角速度。通过使瓶子无角速度自由下落，测量下落高度和反弹高度，计算恢复系数，得出加适量水有利于瓶子保持稳定的结论。通过重复将不同水量瓶子分别从不同高度无角速度自由下落的实验，并与有角速度实验对比，得出角速度的实验成功率明显大于无角速度的实验成功率，因此**角速度有利于瓶子落地时保持稳定**。分别控制下落时旋转角度、水量、下落高度，我们发现最有利于瓶子保持稳定的参数。分别为 180° ，55%，86.4cm。此时立起概率高达 61%。考虑瓶子落地时碰撞点对平衡的影响，我们发现当瓶子右侧落地，即离下落平台较远侧落地时，瓶子更容易立起。

在滚动瓶子实验过程中，首先用钢珠模型推导并验证了其与水模型的运动模式一致性：我们研究了瓶子装水和盛钢珠从斜面无初速滚下到达平面后的实验现象，通过分析两种情况下的瓶子运动的位移、速度以及加速度图像，得出了瓶内装水和盛钢珠的运动模式几乎是一样的，瓶子到达平面后的运动都是平动和振动的叠加。水+瓶子实验中，发现瓶子的运动是平动与振动的叠加，在滚动过程中由平动主导。且瓶子会做一种折返运动，即瓶子的最终位移小于瓶子能达到的最大位移。因为瓶子内的水并不全部参与振动运动，我们根据实验现象计算出参与振动的有效水量。为了更好地研究瓶子的振动现象，我们在滚动平面放置木板，使瓶子平动动能瞬间减小。碰撞后，振动加剧，平动减速，进入以振动为主的运动，瓶子在平衡位置附近来回滚动，直至静止。不考虑振动，瓶子的平动近似于匀减速运动。在平动为主阶段，说明瓶子里水能造成持续减速，碰撞后水的振动更有助于吸收能量，使瓶子快速达到静止。因此，**瓶子里充水在滚动中有助稳的作用**。

参考文献

[1] P. J. Dekker et al. Water bottle flipping physics[J]. American Journal of Physics, 2018, 86(10) : 733-739.

[2] 寻之朋, 张晓黎, 于泽威. 翻转水瓶平稳落地现象的研究[J]. 大学物理, 2019, 38(06):37-41.

[3] IOC. Problems for the 31st IYPT 2018[online]. IYPT.ORG, 2017/7/13, available from:

<https://www.iypt.org/problems/problems-for-the-31st-iypt-2018/>

[4] The complex physics of that viral water bottle trick, explained [online]. Vox, 2016/5/26, available from:

<https://www.vox.com/2016/5/26/11785562/water-bottle-flip-physics>

2021 S.-T. Yau High School Science Award

致谢

在此论文完成之际，我们衷心感谢南京大学王思慧教授，南京外国语学校潘志民老师，迈塔光电何兆钦老师，金凯文老师以及肖林涛学长给予我们的大力支持。王思慧教授在选题指导，理论模型搭建，实验方案，组内讨论以及论文修改等方面给予了我们大力支持；潘志民老师在队伍构建，选题指导，各方面沟通，心理辅导以及最后的论文修改方面也给予了我们很多帮助。何兆钦老师和金凯文老师在为我们提供了一些实验场地以及实验器材的支持，肖林涛学长也积极参与我们的组内讨论，授予我们物理知识并在理论和实验方面为我们提供了宝贵的建议。

我们三位在研究过程中团结协作、密切配合，共同完成了整个论文的研究工作。顾彦文负责了理论部分的求解和撰写，实验方案设计，并参与了第一部分抛掷实验的一些工作，白云舟和辛雨茜负责了大部分抛掷实验以及全部的滚动实验工作。在撰写论文过程中，我们三人分别负责自己对应的部分，顾彦文还负责了论文的汇总成稿。

实验时间和地点

3月14号，我们确定研究课题。之后撰写了运输液体车辆部分的理论和部分抛掷瓶子的理论。我们从6月22号开始进行预实验，根据预实验的结果进一步改进理论研究模型。7月5日确定抛掷瓶子部分的实验方案，并开始搭建实验装置，然后进行控制变量实验，记录分析实验视频，记录结果并完成实验报告。7月20号之前完成抛掷瓶子的全部实验，并完成开始滚动瓶子部分的实验方案。8月26日完成抛掷瓶子和滚动瓶子实验验证。之后，我们综合比较实验结果与理论成果，不断修正改进理论模型，并不断补充实验，完善研究报告。9月12号完成全部研究工作，之后对论文进行多次修改和调整。

研究期间，我们与指导老师进行了多次集中讨论，不断在撰写理论过程中改善物理机制，修改优化实验方案，安排理论与实验整理汇总工作。

预实验在顾彦文家完成，抛掷瓶子实验在长安国际2409完成，滚动瓶子实验分别在白云舟家和辛雨茜家完成。顾彦文在家里完成理论推导。

附录 1 瓶内装钢珠的实验现象探究

另外，我们对瓶内盛同质量钢珠从不同高度滚下以及瓶内盛不同质量钢珠从同一度滚下后的实验现象也做了一些数据分析，以便后期我们对本课题进行进一步的研究。

实验一、盛有相同钢珠的瓶子从不同高度滚下的对比

将装 4 个钢珠的同一个瓶子从同一个斜坡上从不同的高度无初速度滚下，高度分别为离坡底 1cm、2cm、3cm、4cm、5cm、7cm。

数据（同质量不同高度）track 后所得到的图像如下：

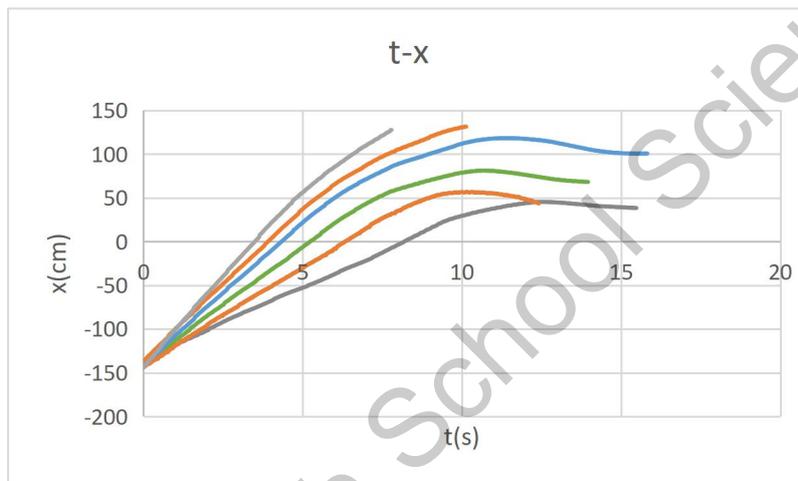


图 1 盛 4 个钢珠的瓶子从不同高度滚下的运动位移对比

说明：从上至下分别是离坡底高度 7cm、5cm、4cm、3cm、2cm、1cm

我们发现所有高度下的瓶子的运动模式和轨迹几乎一致，所以下面给出了一种情况下的速度和加速度图像：（瓶中盛有 4 个钢珠从离坡底 4cm 高度无初速度滚下）

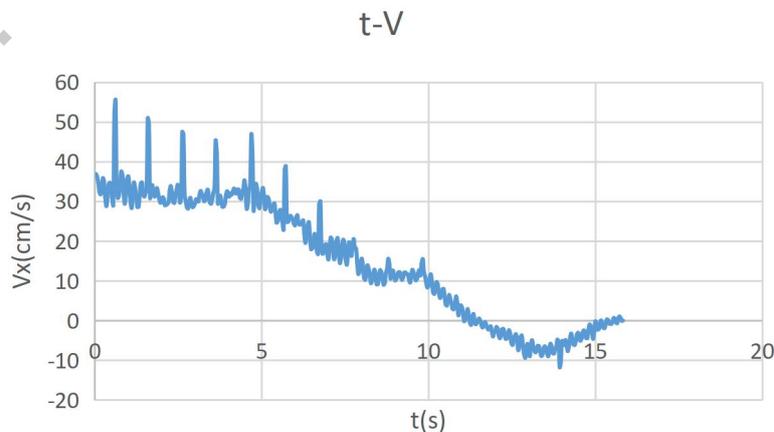


图 2 盛 4 个钢珠的瓶子从离坡底 4cm 高度无初速度滚下的运动速度

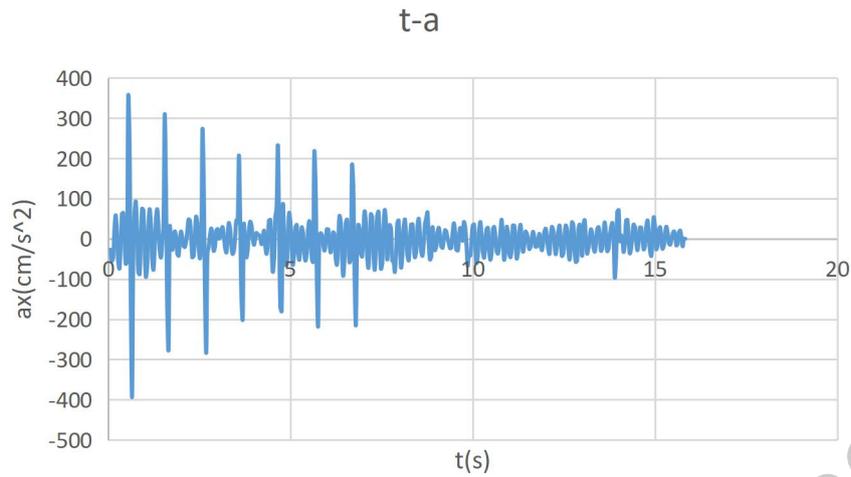


图3 盛4个钢珠的瓶子从离坡底4cm高度无初速度滚下的运动加速度

每种高度下的速度时间图像:

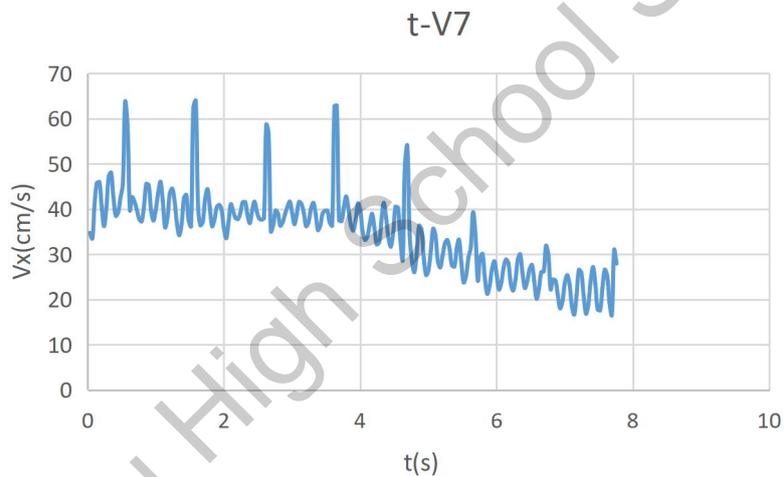


图4 盛4个钢珠的瓶子从离坡底7cm高度无初速度滚下的运动速度

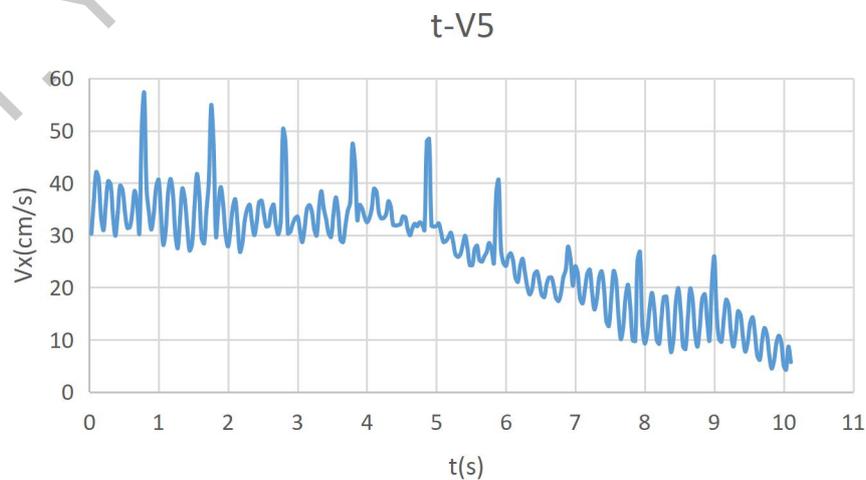


图5 盛4个钢珠的瓶子从离坡底5cm高度无初速度滚下的运动速度

盛 4 个钢珠的瓶子从离坡底 4cm 高度无初速度滚下的运动速度见图 2

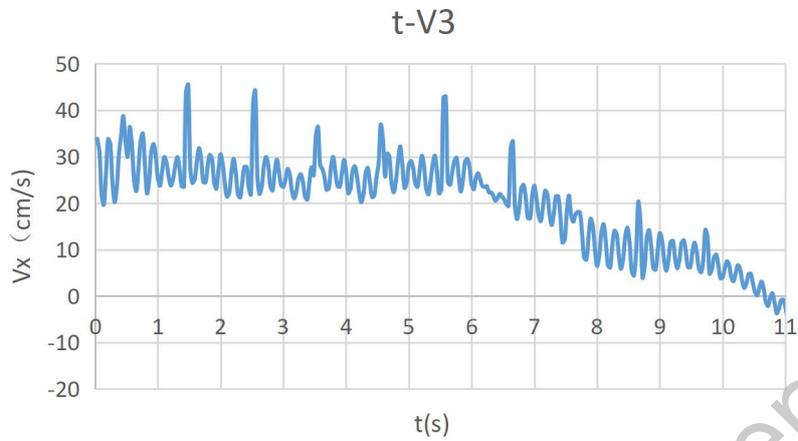


图 6 盛 4 个钢珠的瓶子从离坡底 3cm 高度无初速度滚下的运动速度

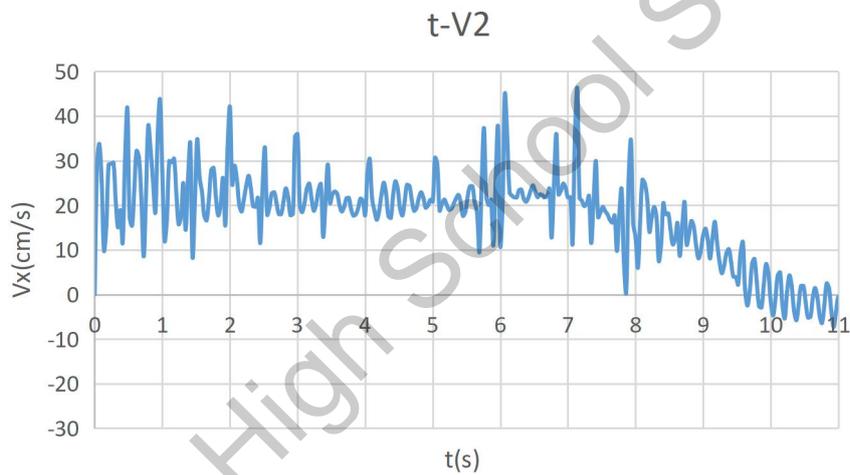


图 7 盛 4 个钢珠的瓶子从离坡底 2cm 高度无初速度滚下的运动速度

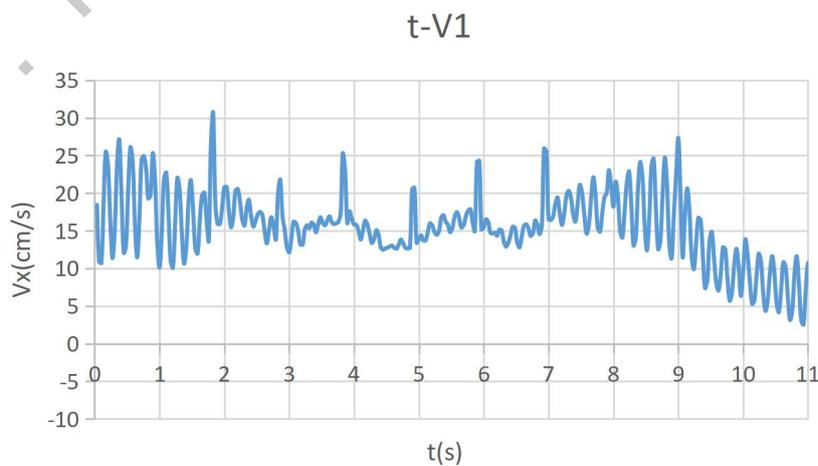


图 8 盛 4 个钢珠的瓶子从离坡底 1cm 高度无初速度滚下的运动速度

以上 6 种情况下，运动速度的变化周期均为 0.173s 左右，频率为 5.78Hz 左右。

实验一结论：

1. 相同质量下高度越高到达平面时的运动速度越大，在静止前的平动位移也越大。

2. 瓶子质心振动和钢珠的振动频率相同，虽然高度不同，但是从不同高度滚下后在平面上的振动频率相同。

实验二、盛有不同数量钢珠的瓶子从相同高度滚下的对比

将装不同数量钢珠的瓶子从相同的高度无初速度滚下，分别为装 1 个钢珠和 5 个钢珠，高度为离坡底 7cm。

实验数据（不同质量同高度）track 后所得到的相关图像如下：（1 钢珠 7cm-蓝色线，4 钢珠 7cm-橙色线）

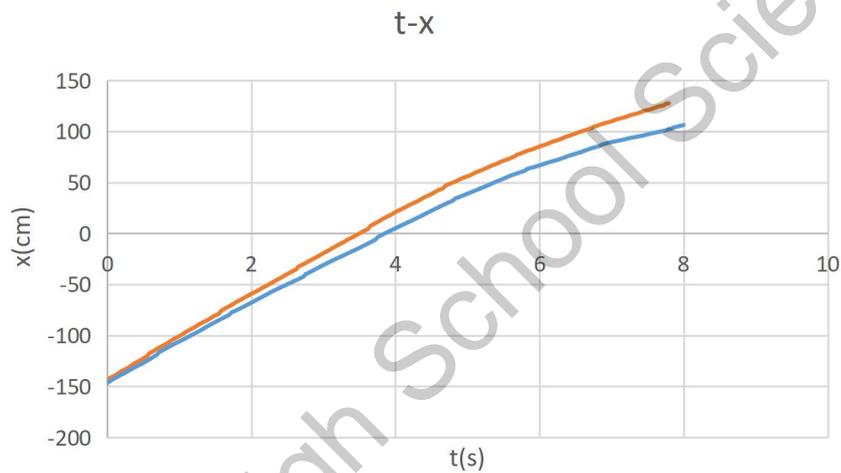


图 9 盛 1 个、4 个钢珠的瓶子从离坡底 7cm 高度无初速度滚下的运动位移对比

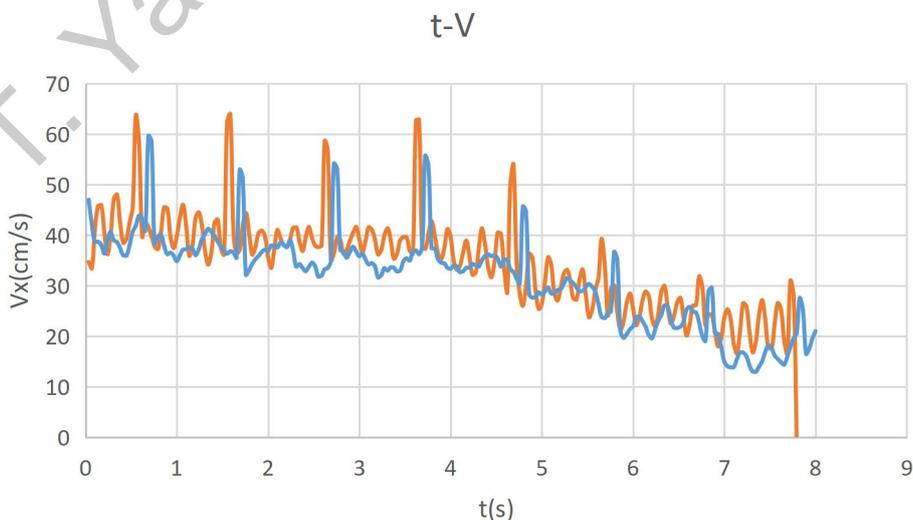


图 10 盛 1 个、4 个钢珠的瓶子从离坡底 7cm 高度无初速度滚下的运动速度对比

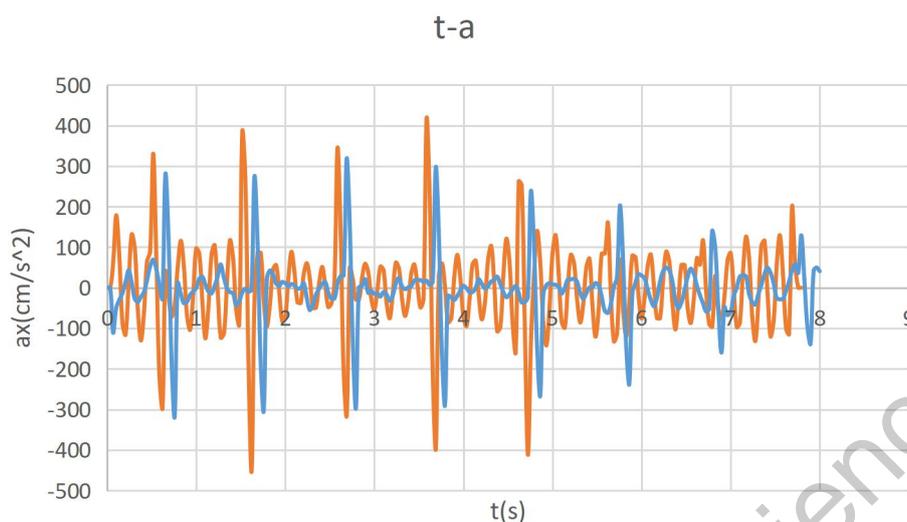


图 11 盛 1 个、4 个钢珠的瓶子从离坡底 7cm 高度无初速度滚下的运动加速度对比

实验二结论：

相同高度下到达平面时的运动速度跟质量关系不大，几乎相同。瓶子质心振动和钢珠的振动频率相同，且瓶内盛有钢珠的数量（质量）越多，频率越低（实验中 1 个钢珠的频率为 32.25HZ，5 个钢珠的频率为 5.84HZ）。

附录实验之误差分析

1. 由于钢珠的不稳定性，导致其和瓶子一起的振动不是完全的简谐振动。
2. 实验用的平台不是很平整，造成阻尼较大，影响实验结果。
3. 用 tracker 追踪功能描点精确度不够高。
4. 将瓶底中心作为质心对于只装几个钢珠的瓶子不是很准确。
5. 视频中存在视差。

附录 2 上传的实验视频

共上传了 5 个实验视频，每个视频的详细描述如下。

1. 视频 1

测量恢复系数：水量 25% 下落高度 65cm 反弹高度 7cm

2. 视频 2

抛掷水瓶实验：水量 55% 翻转角度 180° 下落高度 86.2cm

3. 视频 3

钢珠实验：斜面高度 7cm 钢珠数量 1 钢珠半径 0.955cm 钢珠总质量 35g

4. 视频 4

钢珠实验：斜面高度 4cm 钢珠数量 5 钢珠半径 0.955cm 钢珠总质量 175g

5. 视频 5

滚动水瓶实验：水量 25% 斜面高度 10cm

6. 视频 6

滚动水瓶实验：水量 55% 斜面高度 10cm

7. 视频 7

滚动水瓶实验：水量 100% 斜面高度 6cm

参赛队员简历

姓名：顾彦文 性别：男

学校：南京外国语学校 年级：高三

简介：各学科成绩优秀，热爱物理，在物理理论和实验方面均充满兴趣，有一些物理实验以及研究经验。

获奖情况：

2020 年全国中学生物理竞赛国家二等奖、江苏省一等奖

2021 年江苏省青年物理学家竞赛一等奖

2021 年全国青年物理学家竞赛一等奖并入选国家集训队

2021 年澳门青年物理学家竞赛英语组特等奖，第一名

2021 年南开物理学家竞赛一等奖

2020 年 BPHO 英国物理奥赛第一轮 top gold，第二轮银奖

2020 年袋鼠数学竞赛全球超级金奖，满分奖

2020 年英国物理挑战赛全球金奖

2020 年加拿大滑铁卢物理竞赛全球前 150 名

2020-2021 学年第一学期南京外国语学校“六星学子”

姓名：辛雨茜 性别：女

学校：南京外国语学校 年级：高三

简介：在校学习成绩优异，物理学科成绩尤为突出，热爱物理研究类活动，物理实验研究经验丰富

获奖情况：

南京外国语学校青年物理学家社副社长

2020 年江苏省青年物理学家竞赛一等奖第一名

2021 年江苏省青年物理学家竞赛一等奖第一名

2021 年全国青年物理学家竞赛二等奖第一名

2021 年澳门青年物理学家竞赛华语组冠军

姓名：白云舟 性别：女

学校：南京外国语学校 年级：高三

简介：校内成绩优秀，竞赛类活动丰富，热爱物理，具有丰富的物理实验研究经验。

获奖情况：

2020 年 BPhO 英国物理奥赛超级金奖

2021 年英国物理挑战赛（高级）金奖

2021 年 AMC12 全球 5%

2021 年 PhysicsBowl 美国物理杯全球前 100

2021 年中国青年物理学家竞赛一等奖