

论文题目： 旋涡一定是圆形的吗？

——对多边形漩涡现象的研究

参赛队员姓名： 苏展

中 学： 四川省温江中学

省 份： 四川省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 邱孝兵 邓慧文

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：苏展 指导老师：邱孝兵 邓慧文

2020年9月13日

旋涡一定是圆形的吗？ ——对多边形漩涡现象的研究

作者：苏展

摘要：在一定的扰动下，液体中会出现旋涡，一般来说，这是一种横截面为圆形的涡旋结构。本文对水中的漩涡在某些特定条件下出现多边形结构的现象进行了研究。实验发现，当漩涡中心到边缘的转速差足够大时，该漩涡可以分裂为多个子涡，随着子涡的个数逐渐由 $n=2$ 增加到 $n=6$ ，漩涡的图像呈现由椭圆转变为三角形，到四边形、五边形，最终变为六边形，直至无法形成稳定的多边形结构而呈现近圆的状态。本文首先对涡流的表面流速进行了测量，发现多边形存在一定的半径范围内，其“边”上的表面流速随着半径的变化相较于“角”更为剧烈。观察到了流体表面的旋转角速度从外到内呈现出逐渐增大的变化趋势。其后，对该现象在一定范围内的相图进行测量，给出多边形现象的相关条件，并能在一定程度上对多边形漩涡的边数进行预测。最后，本文对三角形状态下多边形漩涡图案的特征，即三角形的多边形特征量（直观表现为“尖锐程度”）通过傅立叶变换进行了量化分析与定性研究，发现当底板圆盘转速与多边形涡流结构转速的比值趋近于一个定值时，多边形形状具有最大的多边形漩涡特征量。

关键词：多边形漩涡；振动；重力波；离心力波；傅立叶变换

目录

目录.....	4
引言.....	1
1.实验装置	2
2.表面流的速度测量	3
3.相图测定实验.....	4
4.多边形特征随各参量的变化	6
4.1 多边形 “尖锐程度” 特征与其量化方式	6
4.2 多边形 “尖锐程度” 随液体量的变化关系.....	7
4.3 多边形 “尖锐程度” 随底板圆盘转速的变化关系.....	8
4.4 多边形 “尖锐程度” 与 F_B/F_P 的关系.....	10
5.研究结论	11
参考文献	13
致谢.....	14
实验时间、地点	15

引言

在一定的扰动下，液体中会出现旋涡，这是生活中一种常见的现象.例如，在家里厨房或洗手间的水池放水时，在湖中划船船桨推过时，都会出现旋涡.一般来说，旋涡是一种横截面为圆形的涡旋结构.那么我们不禁要问，旋涡的横截面一定是圆形这样对称性最高的图形吗？有可能出现如三角形、五边形这样对称性较低的图形呢？

Vatistas^[1]在 1990 年发现，当由中心到边缘的速度差足够大时，涡流可能自发地发生对称性破缺，并由圆形转变为多边形.理想状态下，涡流的纵截面应当是一个抛物面，而当涡流中心到边缘的流速变化进一步加大时，涡流底部分裂生成两个绕着中心旋转的子涡.甚至有可能进一步变化为具有三个子涡的，形状趋近于三角形的涡流结构.

该现象也作为 IYPT 2020 题目的第 12 题出现.本文即在此题目的启发下，对这一现象进行了研究.

这一现象在生活中并不多见，因为它需要旋转流体系统具有由中心到边沿的较大的流速变化.有趣的是，在土星的北极上，就观测得到这一现象.如图 1 所示，土星北极出现了正六边形的涡旋.

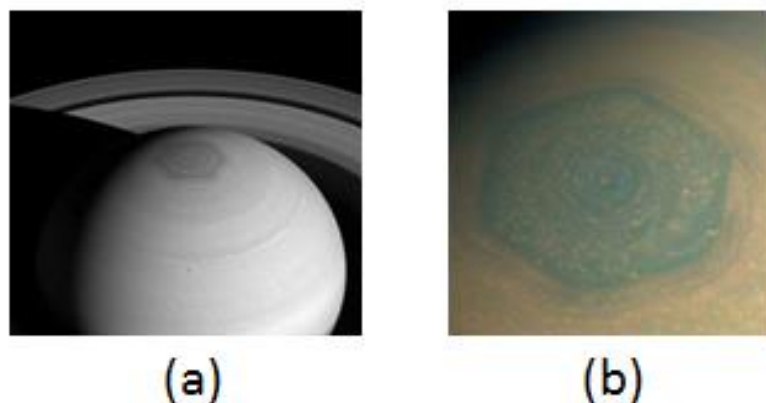


图 1 土星北极观测到的正六边形涡流.

注释: (a) (b) 皆为图形北极的六边形漩涡的图片.

对于该现象的研究，大多数实验现象的发生装置都是一个特制的圆柱筒.圆柱筒的底部连接有一个可以自由旋转的圆盘并由电机驱动，水在圆盘的带动下旋转形成涡流，这样就可以满足实验现象对于流体速度的剧烈变化的需求.同时，当流速足够大时，涡流深度将足以使圆盘露出一部分“干燥”区域——即仅有一层液体薄层.本文也将主要对“干燥”多边形的现象进行研究.

另外,在此前的研究中,Jansson^[2]等人对给定流体量与圆盘转动频率的情况下,多边形的图案进行测量,并发现了相图中各多边形形状分界线几乎呈直线的现象. Bergmann^[3]则对多边形的建立过程进行了研究,他们通过探究不同的初始状态与多边形建立过程中露出底板圆盘区域的轮廓的傅立叶系数的变化,得出多边形形成之前,将先构建圆形的对称状态的现象.而 B.Bach^[4]等人使用筒壁和底板圆盘皆可旋转的装置进行研究,在仅有筒壁旋转的实验条件下发现了多边形现象,同时他们还发现多边形结构的旋转频率与底板圆盘的旋转频率呈正比,这一比例系数约为 1/3.

L.Tophoj^[5]等人认为多边形现象与波动相关,即多边形是由于流体表面的重力波和离心力波的共振产生的.他们通过数学方法,解出了重力波和离心力波频率随着露出的底板圆盘平均半径与圆柱筒半径比值这一参数的关系:

通过找到两个方程零点随参数变化关系,作出频率随露出的底板圆盘平均半径与圆柱筒半径比值的变化关系图像,可以得到两种波的一系列共振点,即发生共振现象的实验条件.这些点几乎位于相图的各个多边形现象对应区域的中央位置.

在此基础上,本文对相图进行了测量,并将对稳态状态下多边形的细节特征进行描述.通过量化的方法,本文对不同参量影响下,多边形特征的改变进行研究.本文中主要关注的多边形的特征为其“尖锐程度”.此外,本文还利用聚苯乙烯泡沫颗粒的运动表征流体流速,对系统自由表面流动的速度场进行了观测.

1.实验装置

受限于筒底的防水性问题,本文的研究中所使用的实验平台采用了磁力驱动圆盘旋转的方式,设计了如下图所示的装置.

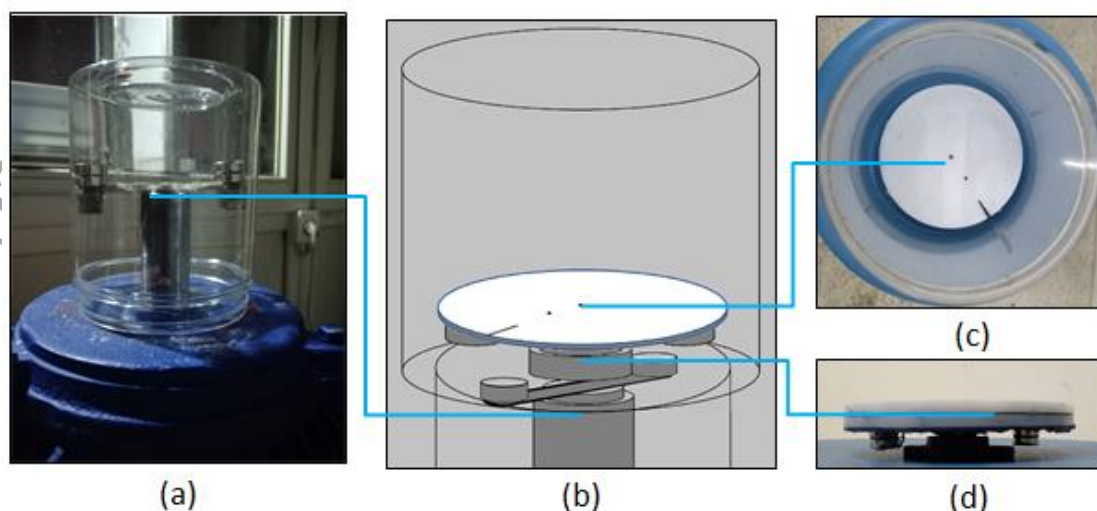


图 2 本文实验装置的结构图

注释:筒内的旋转底板圆盘底部连有磁钢.下端倒置柱形容器内部有连接在电机转轴上的对称分布的磁钢用于带动圆盘.图(a)(c)(d)分别为各个部分的实物图.图(a)为装置的驱动部分.图(c)圆盘为从动部分,其上的图案用于在数据分析时标定圆盘的实际转速和旋转中心.图(d)为容器内部装置的侧视图,它通过一个轴承连接在容器底.

实验装置主体为一个内径为 14.1cm (底板圆盘处), 高度为 16.5cm 的圆柱状透明塑料筒.电机为 220V, 50Hz 的交流电机, 可通过调速器调节转速.圆柱筒内部放置了一个连接在轴承座上的亚克力圆盘.圆盘底部的磁钢与连在电机上的磁钢相互排斥, 因此在相对较低的转速下, 底板圆盘旋转频率与电机旋转频率相同.拍摄的采用的视频帧率为 240fps.

相较于其它装置, 该实验装置结构具有无需担心渗漏, 阻力小, 可替换容器以进行变量实验等优点, 同时也存在着圆盘旋转频率的最大值低于电机所能提供的最大转速的问题.但在较高转速下, “干燥”多边形的形状将变得不稳定, 不在本文研究的现象范围, 因此这一点对实验的研究并无明显影响, 本文的实验也都基于在驱动子和从动子稳定同步旋转的条件下进行.

2.表面流的速度测量

在本节中将对自由面的流体速度进行测量, 研究自由表面流体流动的相关规律.

实验中, 通过轻质粒子在水流表面的运动, 可以间接测得自由表面的流动速度.理论上, 这一粒子质量越小, 体积越小, 越能反应流体的流动速度.因此使用了聚苯乙烯泡沫颗粒进行实验, 由于其质量较轻, 在较短时间内就能与流体自由表面的流动同步, 同时, 使用聚苯乙烯泡沫颗粒还有利于实验视频的分析.此外, 选择三角形的流动模式作为研究对象, 这一现象更加稳定, 实验现象也相对明显.

正式实验时, 向一个以三角形模式稳定转动的涡流系统释放一个轻质聚苯乙烯泡沫颗粒, 同时拍摄视频并导入 `tracker` 进行分析, 下图为粒子相对于三角形涡流结构的运动情况, 分别截取了如图所示直线上的自由表面流体流动角速度进行作图分析.

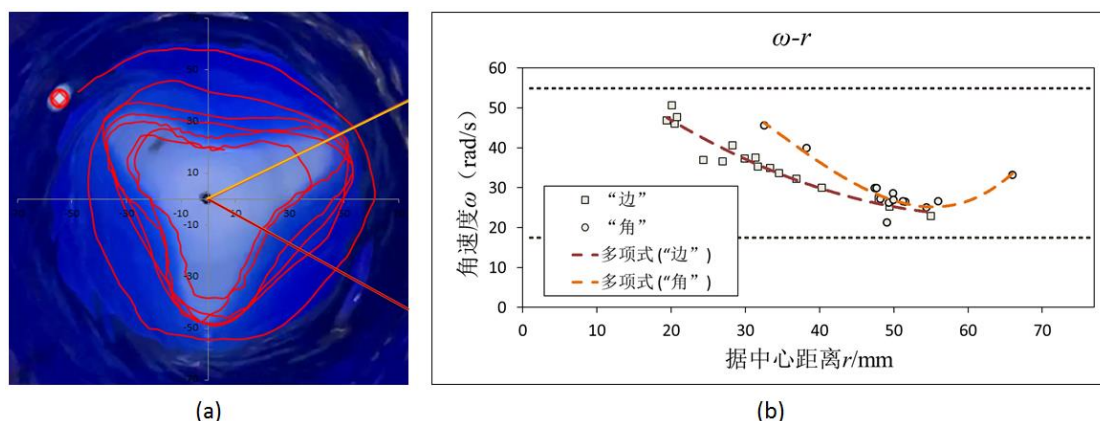


图 3

注释:图 10 (a) 为粒子相对于三角形涡流结构的图像在粒子运动的过程中, 分别测量了粒子运动到图中黄线与红线上的瞬时角速度, 并做图分析. 图 (b) 中两种颜色的点分别代表 (a) 图中三角形涡流“角”和“边”上的流体角速度与距中心距离的关系. 图像中的曲线用于标定旋转频率的大致变化趋势, 非拟合曲线. 此外, 上下两虚线分别代表底板圆盘的角速度与多边形结构的角速度

通过分析图像, 可以发现, 表面流体具有向涡流中心流动的趋势, 沿着流线逐渐做向心运动, 并且随着距中心距离的不断减小, 角速度逐渐增大. 同时三角形“角”上的流速变化较大, 而“边”上的变化则更为平稳. 由于测量对象为露出部分底板圆盘的三角形涡流模式, 轻质粒子最后可能从仅有一层薄液体层的圆盘上划过, (如图中经过白色底板的红色轨迹) 而非沿着三角形边缘运动, 这些点的速度也被我们测量并置入图像.

两条曲线中, 子涡附近的流体速度更快, 随着到中心距离的变化更剧烈. 同时两曲线在 $r=50\text{mm}$ 的位置处相交, 涡流的多边形特征也在此处完全消失. 此外, 还可以观察到流体表面的旋转角速度从外到内呈现出逐渐减小的变化趋势.

3.相图测定实验

相图测定实验将为后续的实验摸索实验条件, 首先在实验装置尺寸与亚克力底板材质一定的条件下, 对实验现象的相图进行测量. 以底板圆盘的旋转频率与液面距离圆盘的高度为实验变量, 测量各个给定条件下得多边形图像类型. 当某多边形状态出现, 并稳定旋转一周时, 将其确定为相应的多边形形状. 作出如下图像.

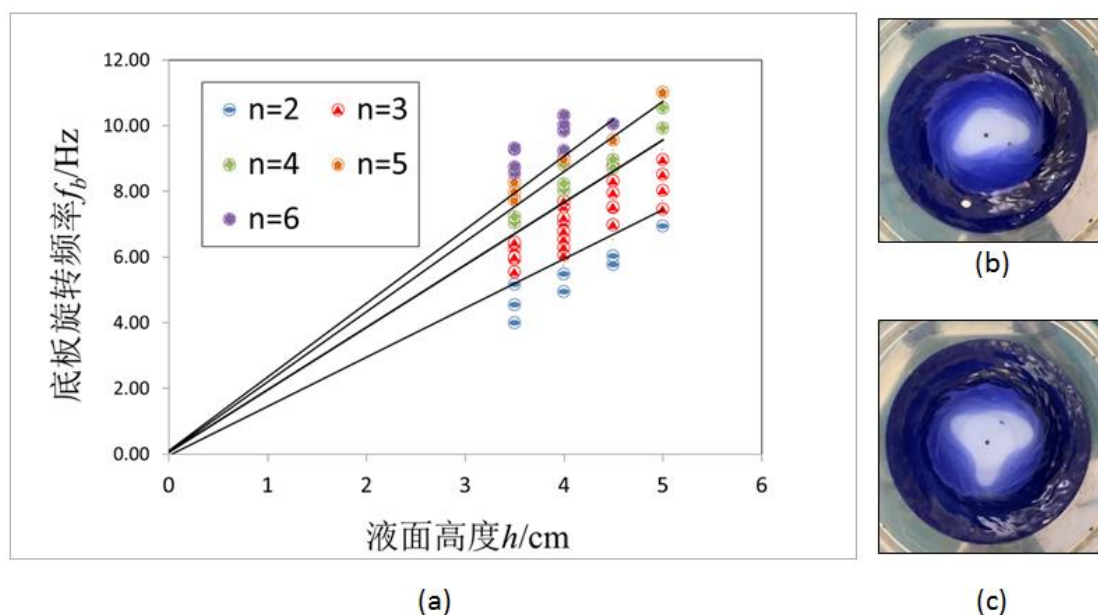


图 3 相图的测量结果

注释:图中的点分别代表着不同的给定条件下的多边形种类.我们可以从点迹的大致分布范围观察到三角形图样与四边形、椭圆之间的分界线都几乎呈线性.在实验中也观察到了一些较为特殊的现象,如图(b)与(c)所示,它们出现在多边形图案由椭圆向三角形转换(a)以及由三角形向四边形转换(b)时,这些状态是稳定存在的.

观察相图,可以发现当液体总量不变时,随着转速的增大涡流呈现的图案逐渐由椭圆过渡到三角形,经过四边形,五边形最终形成六边形,而当转速足够大时,六边形也将变得不稳定并最终趋近于圆.对于转速不变时,随着液体总量逐渐减小,涡流结构的变化也有类似的特征.此外,不同多边形现象的分界线呈现随着边数 n 的增加而逐渐靠拢的趋势.因此,多边形边数越多,其存在区间越窄.

对比 B.Bach^[4] 等人所测得的相图,本实验中出现相同多边形形状所需的底板圆盘旋转频率明显更高,例如本实验中,在液面高度为 4cm 时,由椭圆向三角形转变的频率在 5.8Hz 附近,而这一频率在 B.Bach^[4] 等人的实验中为 2.5Hz 附近.这可能是由于本实验所使用的圆柱筒内径为 14.1cm 相较于 B.Bach^[4] 等人使用的 29cm 内径的圆柱筒,在使用相同粘滞系数的流体实验时,更难以实现由中心到边缘的较大的流体速度变化.

此外,在本实验中,五边形这一涡流结构是相对罕见的,相比之下,六边形的涡流图案反而更加稳定.

在测量相图的同时还观察到了一些较为特殊的存在于两种多边形状态分界线上的现象,称为过渡态.以椭圆向三角形转化的过渡态为例,除原有的两个子涡外,在靠近涡流中心的部位出现了一个新的子涡,它以“更快”的角速度绕

涡流中心旋转,同时,该子涡具有将另两个子涡向一侧排斥的趋势,这些过渡态能够很好地确定各多边形涡流图案的相图分界线.但过渡态的条件是相对苛刻的,在没有出现过态的实验数据中,采用同一液面高度下,不同多边形涡流图案的最近点迹的转速平均值作为分界线上的点,实验结果较好地符合了分界线呈直线的理论.相图测量结果具有较高的可信度.

但随着底板圆盘转速的提高,在多边形边数较多时($n>4$),各图案的相图分界线变得模糊,这可能是由于液面高度较低,多边形状态随转速增大而发生转化的速度过快.因而虽然本文的实验装置可以实现五边形,六边形的涡流结构,但在接下来的实验中将倾向于采用更为稳定的边数较低的几种图形进行研究.

4.多边形特征随各参量的变化

4.1 多边形“尖锐程度”特征与其量化方式

虽然通过相图的测量,可以在给定的条件下确定多边形的状态,但在同样的多边形状态下,多边形的形状特征存在差异.例如下面的两个涡流图案,它们同为三角形但三角形的特征不同,直观表现为“尖锐程度”的不同.用三角形涡流的特征量大小可以表征三角形漩涡的特征,而这一特征量可以通过对多边形轮廓的极坐标方程作傅里叶变换,并以傅立叶系数量化表征.

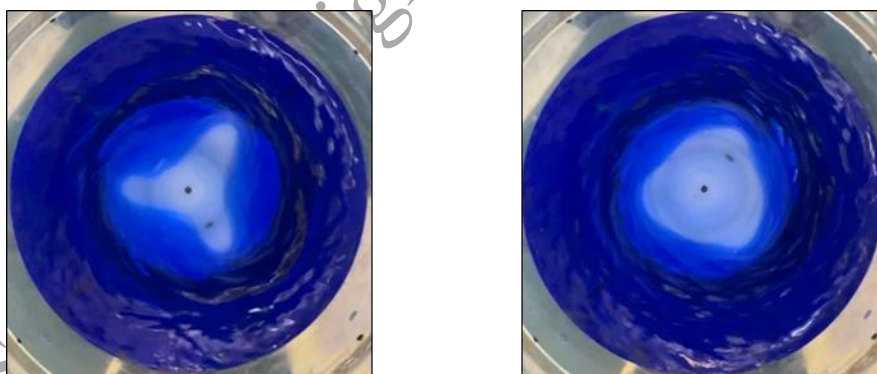


图5 三角形涡流的尖锐程度的特征

注释:左图三角形的边和角与旋转中心的距离之差大于右图,多边形现象的影响范围相对较广,多边形涡流图案更加“尖锐”.(两图具有相同的静止液面高度,并在同一摄像位置处拍摄.)

本文将多边形边缘线上的点到底板圆盘旋转中心的最大距离与最小距离的差值的一半定义为多边形的尖锐程度,并通过对多边形边缘线围成的封闭曲线的极坐标方程作傅立叶变换的方式,以傅立叶系数量化这种“尖锐程度”.

已知对于一个连续的时间信号 $x(t)$ 可以对其进行傅立叶变换,计算式为:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

在实际的实验操作时，由于所得数据点是离散的,数据分析时可使用离散傅立叶变换,对于 N 点的序列 $x(n)_{0 \leq n \leq N}$ ，有：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \quad (2)$$

在采样时，利用了多边形图案匀速转动的性质，使用 **tracker** 分析时，以底板圆盘旋转中心为原点，确定一个坐标系，并且在这个坐标系的 x 轴与多边形轮廓的交点处打点，由于本实验的视频帧率为 240fps，采样频率即为 240Hz.记多边形图案的旋转角速度为 ω .又因为实验数据分析时，点序列的长度为 256 个点，即 2^8 .可以推导出，第 k 个数据点计算得出的傅立叶系数对应的多边形边数 n_p 的计算公式：

$$n_p = \frac{f_k}{N} \cdot \frac{2\pi}{\omega} (k - 1) \quad (3)$$

带入本实验的实验参数，即为：

$$n_p = \frac{240}{256} \cdot \frac{2\pi}{\omega} (k - 1) \quad (4)$$

4.2 多边形“尖锐程度”随液体量的变化关系

本节将研究“尖锐程度”这一特性，通过改变液体高度和底板旋转频率的两个变量，多边形的实际形状特征随着各参量将发生一定变化.同时考虑到多边形涡流的三角形结构在相图中存在的区域面积相对较大形状也较为稳定，因此本文主要以三角形涡流作为研究对象.

实验中首先观察液体总量对这一现象的影响，通过向确定的转速下本就装有一定量液体的旋转系统中逐渐加水，来实现对于稳定状态下三角形的特征随液体总量变化的观察.实验中，底板圆盘转动频率 8.1Hz 初始液面高度 4cm，终止液面高度 5.4cm 每次用量筒向装置中加入 10ml 水，总计加水 22 次.虽然随着液面高度的升高，理论上底板圆盘转速将会逐渐有所下降，但由于实验过程使用 220V 三相异步电机提供动力，功率足够大，因此忽略了转速的微小改变.

以下是干燥多边形轮廓的变化情况，对比观察可发现，三角形的“尖锐”程度随着加水量先增大后减小，这一现象与共振有着明显的平行关系.

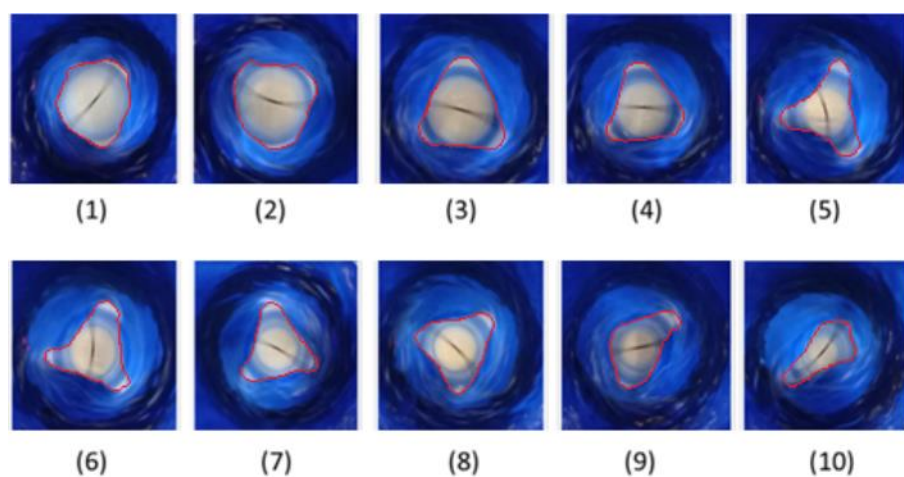
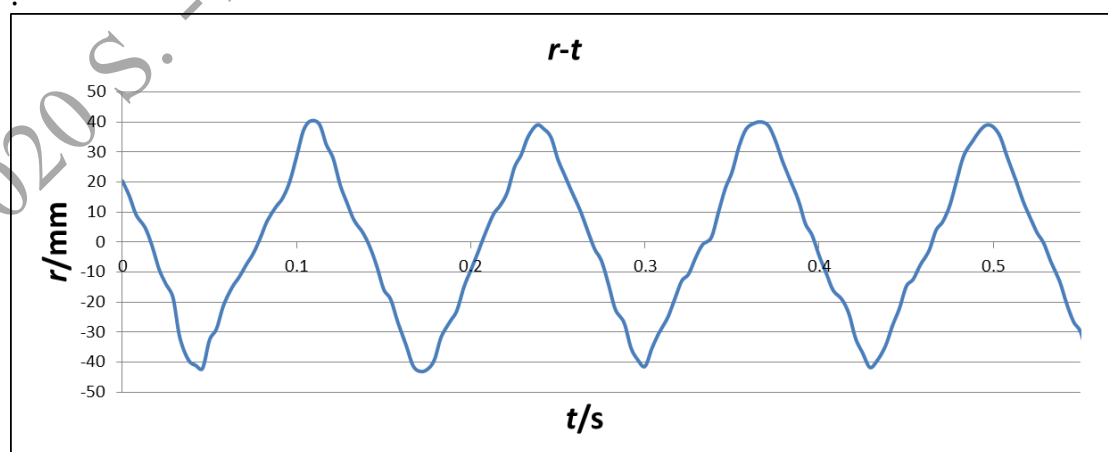


图 6 “干燥”多边形图案的变化过程

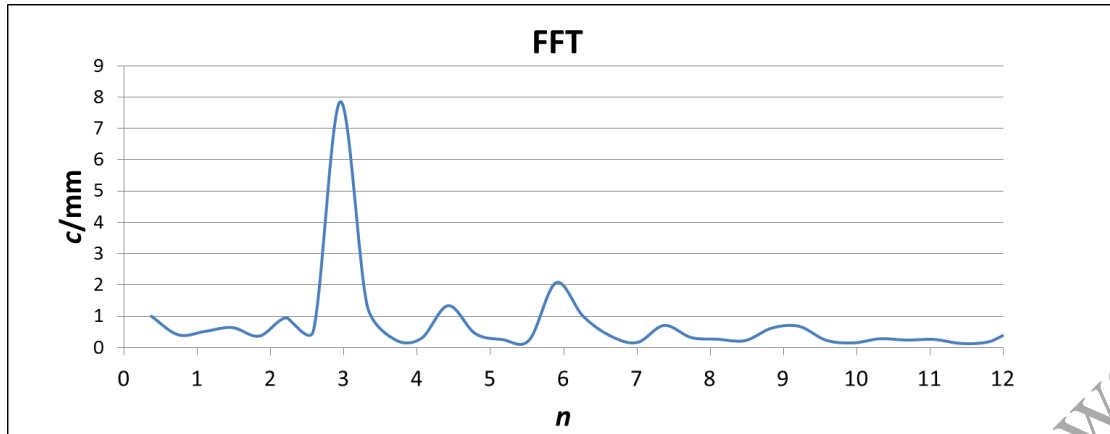
注释:随着液面的升高,逐渐由(1)过渡到(10)。(1)与(9)均为过渡态,在干燥多边形为三角形时,随着液面的不断升高三角形尖锐程度先增大后减小(已用红色线条标记“干燥”多边形边缘线),同时在(5)中有最高的“尖锐”程度。

4.3 多边形“尖锐程度”随底板圆盘转速的变化关系

在 4.1 中提到的分析方法将用在这一节,对圆盘旋转引起的多边形结构特征的改变的现象进行量化分析.实验时,静止液面高度为 5cm,改变底板圆盘转速这一变量,以尽量小的转速间隔调节电机,分析不同状态下干燥多边形的不同形状对应的傅立叶系数的变化.分析时,首先以底板圆盘圆心为原点建立极坐标系,通过使用 tracker 记录点迹,得到极轴上露出底板的多边形区域的轮廓对应的点到圆心的距离随时间的变化关系如图 6 (a) 所示,利用多边形涡流的图案结构匀速转动的特性,可以导出多边形轮廓上的点到中心的距离随方位角的变化关系.再将所得信号去中心化后进行快速傅里叶变换,作出频谱图.最终从频谱图中提取不同图形的傅立叶系数随底板旋转频率的变化关系如图 6 (b) 所示.



(a)



(b)

图 7

注释: (a) 露出多边形图案轮廓对应的点到圆心的距离随时间的变化. (b) 傅立叶系数随着多边形边数 n 变化的图谱. 图像峰值在 $n=3$ 处.

通过提取相应的图谱峰值及其对应的多边形边数, 可以得到不同多边形对应的傅立叶系数随着底板圆盘的旋转速度的变化情况如图 7 所示. 通过对这一图像的观察可以发现, 随着底板圆盘旋转速度的增加, 不同图案的傅立叶系数也在不断地变化. 这说明在三角形多边形图案的条件下, 改变实验条件参量, 三角形的多边形漩涡特征量, “尖锐程度”也在不断地变化. 在某一特定的多边形图案下, 随着转速的不断提高, 其相应的傅立叶系数先增大, 后减小.

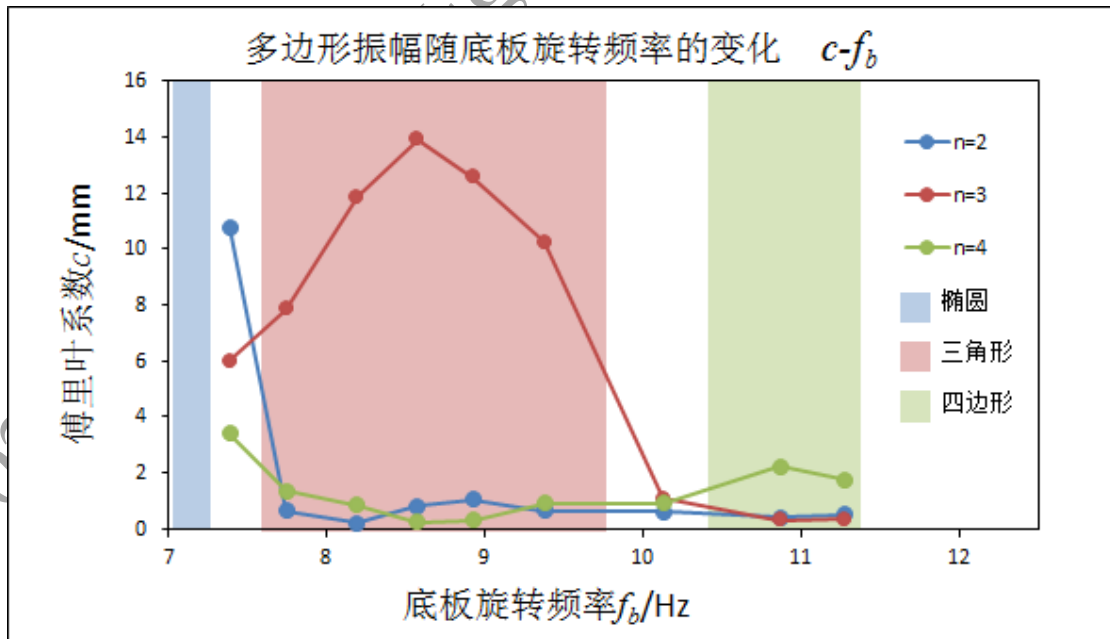


图 8 各个不同的“干燥”多边形图案的傅立叶系数随着底板旋转频率变化的图像.

观察该图像可以发现, 在每种图案条件下, 存在一个底板圆盘旋转频率使得“干燥”多边形对应的傅立叶系数取得最大值. 这个值随着底板旋转频率的增大而减小. (此外, 该图中发生在多边形转化时的点, 其傅立叶系数峰值对应的横坐标似乎会倒退 0.5, 如在三角形向四边形转化的过渡态, 其傅立叶系数峰值在 $n=2.5$ 边形处, 本文将这一峰值绘制到了 $n=3$ 的曲线中.)

4.4 多边形“尖锐程度”与 f_b/f_p 的关系

在 B.Bach^[4] 等人的实验描述中, 多边形的现象的底板圆盘旋转频率和多边形结构的旋转频率具有呈正比的关系, 以下是本实验中, 液面高度为 4.5cm 时, 多边形旋转频率随底板圆盘旋转频率的变化关系, 二者之间并不完全呈现线性关系, 对于除了三角形涡流结构($n=3$)以外的点, 具有线性关系, 而三角形结构转速随着底板圆盘转速改变的变化是不明显的.

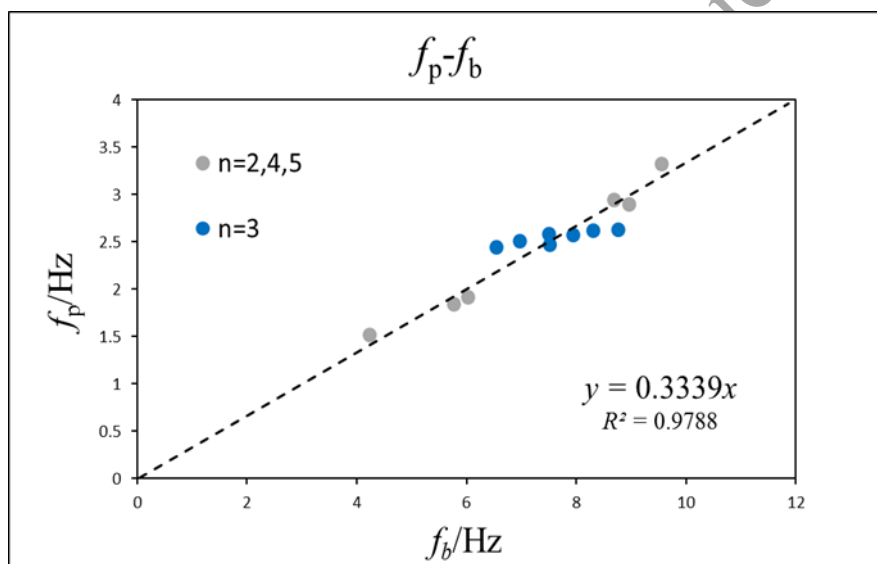


图 9 对 $h=4.5\text{cm}$ 状态下的多边形结构旋转频率和底板圆盘的旋转频率的关系绘图

注释: 椭圆, 四边形, 五边形对应的点有良好的线性关系, 拟合直线 $R^2=0.9788$, 且拟合直线穿过三角形结构对应点迹的中点.

图 8 中, 多边形结构旋转频率随着底板圆盘旋转频率的变化而变化, 这一变化呈现阶梯式的而非连续的增长, 但这一变化在液面高度较小时, 即各多边形区间在相图上面积较小, 多边形随底板圆盘转速的变化切换较快时, 会更趋近于线性的关系. 相应地, 本文也对其三角形状态下的傅立叶系数随底板圆盘转速与多边形结构转速之比的变化关系进行了研究, 如图 9 所示.

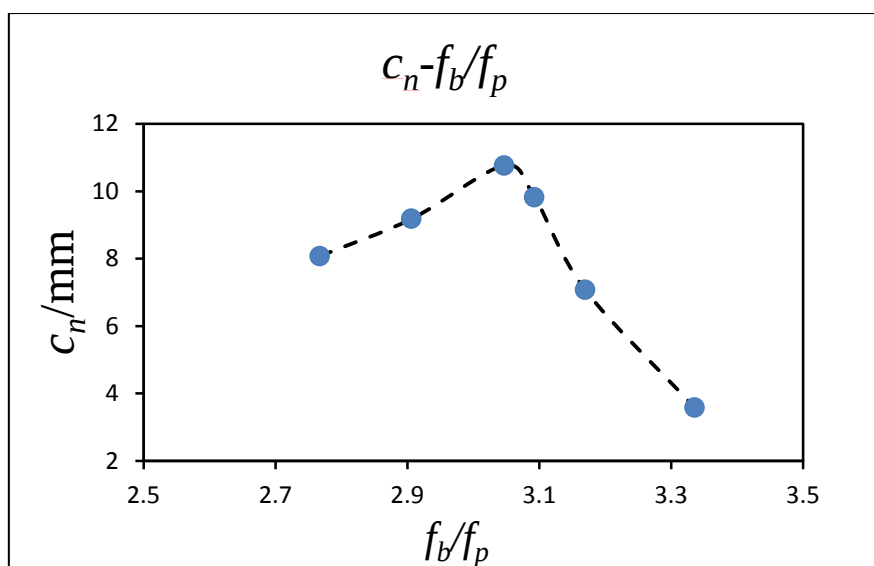


图 10

上图表示 $h=4.5\text{cm}$ 时，三角形状态下的傅立叶系数随底板圆盘转速与多边形结构转速之比的变化关系，图中傅立叶系数值最大的三点，在图 8 中为最接近拟合曲线的三点。

可以发现，这一现象与共振有着明显的平行关系，这与 L.Topoj [5] 等人理论相符合。这一理论可以很好地解释实验中出现的一些现象，比如在图案由椭圆向三角形变幻时，存在一个“过渡态”同时具有椭圆状态与三角形状态的特征，表现在上图就是 $n=2$ 的傅立叶系数减少而 $n=3$ 的傅立叶系数增加的过程，两种现象（振动模式）相互叠加，呈现了“过渡态”的图案模式。在文献中提到的所有多边形的形成过程都趋向于首先形成圆形涡流再发生不稳定性破缺，最终出现多边形图案的现象也可以如此解释，多边形形成的本质是流体表面的振动现象，因此需要首先形成了圆形涡流，达到稳定状态，才会在底板圆盘振动扰动的作用下发生流体表面的振动现象，形成多边形。

5. 研究结论

本文研究了横截面非圆形的多边形涡旋的若干特征。首先本文研究了多边形涡流中三角形涡流现象对应的流体转速分布情况。本文发现多边形涡流现象中多边形角上的流体流动速度大于相同半径下边上的流动速度。这为进一步从涡旋流场分布的角度具体阐释多边形涡流的成因和特征打下了基础。

其次以底板圆盘转速及液体总量对多边形涡流的相图进行测量，结果表明多边形的边数随着底板圆盘的转速的升高而减少，多边形边数随着液体总量的增多而降低，并且观察到了多边形之间的分界线几乎呈线性的现象。

最后，通过引入多边形的“尖锐程度”，本文对影响多边形特征的因素进行了进一步探究.我们通过实验发现，多边形的“尖锐程度”随着液面高度及底板圆盘转速的提高呈现出先增大后减小的趋势.且其峰值出现在多边形旋转频率和底板圆盘旋转频率的比值为 1: 3 的数值附近.

2020 S.-T. Yau High School Sciences Award

参考文献

- [1] G.H. Vatistas, J. Fluid Mech. 217, 241 (1990)
- [2] Thomas R.N. Jansson, Martin P. Haspang, Kåre H. Jensen, et al. Polygons on a rotating fluid surface [J]. Physical Review Letters, 2006, 96(174502):1-4
- [3] BERGMANN, R., TOPHØJ, L., HOMAN, et al. Polygon formation and surface flow on a rotating fluid surface [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 679: 415-431.
- [4] Bach, B., Linnartz, E., Vested, M., et al. (2014). From Newton's bucket to rotating polygons: Experiments on surface instabilities in swirling flows [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 759: 386-403.
- [5] T. Bohr, L. Tophøj, J. Mougel, et al. Rotating Polygon Instability of a Swirling Free Surface Flow [J]. Physical review letters, 2013, 110(19):194502.1-194502.5.

2020 S.-T. Yau High School Sciences Award

致谢

在此由衷的感谢邱孝兵老师对我的研究从实验思路确定与实验平台搭建到论文撰写提供的指导和帮助.感谢邓慧文老师对于实验思路，报告修改提供的建议.感谢赵芸赫老师对实验思路的指导，对论文提供的修改建议.

2020 S.-T. Yau High School Sciences Award

实验时间、地点

除开实验现象观察，装置制作与几次失败的实验尝试外，本课题总共进行了三次实验.主体在 2020 年 1 月-5 月之间完成.第一次和第三次在四川省温江中学进行，第二次因新冠肺炎疫情的原因在家中完成.三次实验分别为：

- 1.实验现象的相图测定
- 2.多边形尖锐程度的相关测定
- 3.多边形表面流速的测定

2020 S.-T. Yau High School Sciences Award