参赛队员名字：马博文

中　　　　学：上海市育才中学

省　　　　份：上海市

国　家/地　区：中国/华东地区

指导教师名字：尹德好、蔡晙哗

论　文　题　目：Thomson问题二维反问题的初步探讨

A study of the 2-dimensional inverse problem of Thomson

摘　要: Thomson问题二维反问题：设$z_1, \cdots, z_n$是复平面的单位圆周上的n个点，满足 $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$， 试求 $\sum_{1\le i<j\le n} |z_i - z_j|$ 的最小值。本文试图在当 $n = 5, 7$ 时给出其解答。

关键词: Thomson问题，复平面，最小值，数值计算

参赛队员：________________　　指导教师：________________

Thomson问题二维反问题的初步探讨

A study of the 2-dimensional inverse problem of Thomson

马博文

上海市育才中学

指导老师：尹德好、蔡晙晔 (上海市育才中学)

August 20, 2020

摘要： Thomson问题二维反问题：设$z_1, \cdots, z_n$是复平面的单位圆周上的n个点，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i = 0$， 试求 $\sum\limits_{1\le i<j\le n} |z_i - z_j|$ 的最小值。本文试图在当 $n = 5, 7$ 时给出其解答。

关键词： Thomson问题，复平面，最小值，数值计算

1 引言

1999年著名美国数学家Fields奖获得者 S. Smale 在文献 [3]中列出"18个下世纪数学问题"中的第七个为"distribution of points on the 2-sphere"，其研究的与下面的问题有关联。

Thomson问题: 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面上的 n 个点，求

$$\sum_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|$$

的最大值 (另一种说法是求 $\sum_{1\le i<j\le n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|}$ 的最小值)。

Thomson问题是为原子结构理论提出所谓的原子"Plum puding(葡萄干布丁)"模型(参见 [2, 4])，在生物学和化学中均有重要的应用。Thomson问题有各种各样的推广形式，其

中Thomson 问题的如下的二维反问题也是至今没有完全解决的：

Thomson问题的二维反问题: 设$z_1, \cdots, z_n$是复平面的单位圆周上的n个点，满足 $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$， 试求

$$\sum_{1\le i<j\le n} |z_i - z_j|$$

的最小值。

这是一个初等数学问题，因此本文试图求解某些简单的情形。当 n 是偶数时，这个问题似乎是平凡的，利用三角不等式就可以推出*， 其最小值是 $\frac{n^2}{2}$。当 n 是奇数时，问题似乎又变得十分困难，是人们多年未解决的问题，即使当 $n=5,7$ 时也没有彻底解决。当 $n=5$ 时，牟晓生给出一个解答，参见 [5]。

本文的目标是试图在 $n = 5, 7$ 时给出Thomson问题的二维反问题的回答，其中当$n=5$时是 [5] 中结论的一个新的支持证明。我们的结论如下：

定理: 1) 当 $n=5$ 时，$\min\{\sum_{1\le i<j\le 5} |z_i - z_j|\} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$;

2) 当 $n=7$ 时，$\min\{\sum_{1\le i<j\le 7} |z_i - z_j|\} = 2\sqrt{21} + 3\sqrt{35}$。

我们采用的方法是这样的，利用问题的对称关系，首先把 $n=5,7$ 时的问题转化为求一个函数在变量限制在一定范围内的最小值问题；其次，由于函数表达式的复杂性，用微积分方法求其极值变得几乎不可能，于是我们求助于数值计算的思想方法，通过数值计算在理论上验证上述结论。

作者十分感谢尹老师和蔡老师的悉心指导！感谢复旦大学数学学院徐熙宁博士(生)在数值计算方面给予的帮助和支持！

---

*这里的简单证明是由上海大学冷岗松教授提供的，其证明如下：

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n=2k} |z_i - z_j| &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |z_i - z_j| \\
&\ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} (z_i - z_j)\right| \ \ (\text{三角不等式}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left|n z_i - \sum_{j=1}^{n} z_j\right| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |n z_i| \ \ (\text{因 } \textstyle\sum_{i=1}^{n} z_i = 0) \\
&= \frac{n^2}{2} \ \ (\text{因 } |z_i| = 1).
\end{aligned}$$

当n是奇数时上述证明是不能成立的。

2　$n=5,7$ 时问题的转化

以下我们只关心 n 是奇数的情形。当 $n=3$ 时是最简单的，在这里我们简要地讨论一下。此时设 $z_i=(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$ $(0\le\theta_i<2\pi)$ $(i=1,2,3)$，它们要满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{3}z_i=0$，即 $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0$，这意味着 $(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2=1$，亦即 $1+2\cos(\theta_1-\theta_2)=0\Longleftrightarrow\cos(\theta_1-\theta_2)=-\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\ \theta_1-\theta_2=\frac{2\pi}{3}$。由此可得 $\theta_1-\theta_2=\theta_2-\theta_3=\theta_3-\theta_1=\frac{2\pi}{3}$，从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 3} &= |z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_2|\\ &= \sqrt{2-2\cos(\theta_1-\theta_2)}+\sqrt{2-2\cos(\theta_2-\theta_3)}+\sqrt{2-2\cos(\theta_3-\theta_2)}\\ &= 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

这样可得

$$\min\left\{\sum_{1\le i<j\le 3}|z_i-z_j|\right\}=3\sqrt{3}=\max\left\{\sum_{1\le i<j\le 3}|z_i-z_j|\right\}.$$

从以上的讨论中，我们可以看到在 $n=3$ 的情形，在条件 $\sum\limits_{i=1}^{3}z_i=0$ 之下，z_1, z_2, z_3 在单位圆周上形成一个正三角形，尽管其位置可以不尽相同。这意味着， 在三个变量 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 中只有一个自由度，其余两个变量随之而定，这一现象在下面的讨论中也是一样的。

为了讨论 $n=5,7$ 时的Thomson问题的二维反问题， 我们首先建立如下的引理。

引理1. *Thomson* 问题的二维反问题中的单位圆周上的点 z_i、条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=0$ 以及 $\sum\limits_{1\le i<j\le n}|z_i-z_j|$ 的值，在以原点为中心的旋转变换*:* $w=ze^{\theta_0}$ （$\theta_0\in[0,2\pi)$）下保持不变。

证明：显然。　证毕

引理2. 在复平面上任给向量 $\vec{\beta}$ 且 $0<|\vec{\beta}|<2$，则存在唯一的两个单位向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 使得

$$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\vec{\beta}.$$

证明：以向量 $\vec{\beta}$ 的顶点（其始点为原点）为中心作单位圆周，因 $0<|\vec{\beta}|<2$，则该圆周必然与以原点为中心的单位圆周恰有两个交点，那么以这两个交点为终点（起始点为原

点）的两个单位向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 就满足

$$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 = \vec{\beta}.$$

证毕

当 $|\vec{\beta}| = 0$ 时显然有类似的结论，但是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 的唯一性不成立，而当 $|\vec{\beta}| = 2$ 时类似的结论和唯一性成立，这时 $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$ 。 若 $\vec{\beta} = (a, b)$ $(0 < |\vec{\beta}|^2 = a^2 + b^2 \leq 4)$，我们要推导出显式表达的 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$。

引理3. 设向量 $\vec{\beta}$ 给定如上，则引理*2*中的单位向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_1 &= \left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{4-(a^2+b^2)}}{2\sqrt{a^2+b^2}}b, \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{4-(a^2+b^2)}}{2\sqrt{a^2+b^2}}a\right), \\
\vec{\alpha}_2 &= \left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{4-(a^2+b^2)}}{2\sqrt{a^2+b^2}}b, \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{4-(a^2+b^2)}}{2\sqrt{a^2+b^2}}a\right).
\end{aligned}$$

证明：以向量 $\vec{\beta}$ 的顶点（其始点为原点）为中心的单位圆周的方程是: $(x-a)^2+(y-b)^2 = 1$， 于是问题归结为求解联立方程组：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1. \end{cases}$$

为了求解，我们令 $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，并作 xy-坐标系的旋转变换：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

上述联立方程组就化为

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = 1 \\ (x' - \sqrt{a^2+b^2})^2 + (y')^2 = 1. \end{cases}$$

此时容易解出

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ y' = \pm\frac{\sqrt{4-(a^2+b^2)}}{2}. \end{cases}$$

再由 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$，代回到 xy-坐标系就得到引理3的结论。证毕

现在我们先讨论 $n=5$ 的情形，设 $z_i=(\cos\theta_i,\sin\theta_i)\ (i=1,2,5)$，由于引理1，不妨假定 $\theta_1=0$。这样我们有

$$z_1+z_2+z_5=(1+\cos\theta_2+\cos\theta_5,\sin\theta_2+\sin\theta_5),$$

可见 $z_1+z_2+z_5=-z_3-z_4$ 的充分必要条件是

$$|z_1+z_2+z_5|\le 2.$$

等价于

$$3+2\cos\theta_2+2\cos\theta_5+2\cos(\theta_2-\theta_5)\le 4 \iff cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos(\theta_2-\theta_5)\le\frac{1}{2}.$$

在此条件之下（$|z_1+z_2+z_5|>0$），由引理3可得 z_3 和 z_4 由 $\theta_2,\theta_5\in[-\pi,\pi]$ 所表示的显式表达式：

$$\begin{aligned}
z_3 &= \left(-\frac{1+\cos\theta_2+\cos\theta_5}{2}+r\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_5}{2},-\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_5}{2}-r\frac{1+\cos\theta_2+\cos\theta_5}{2}\right),\\
z_4 &= \left(-\frac{1+\cos\theta_2+\cos\theta_5}{2}-r\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_5}{2},-\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_5}{2}+r\frac{1+\cos\theta_2+\cos\theta_5}{2}\right),
\end{aligned}$$

其中 $r=\sqrt{\frac{4-(a^2+b^2)}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{4}{3+2\cos\theta_2+2\cos\theta_5+2\cos(\theta_2-\theta_5)}-1}$。由此，可得

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{1\le i<j\le 5}|z_i-z_j| = |z_1-z_2|+|z_1-z_3|+|z_1-z_4|+|z_1-z_5|+|z_2-z_3|\\
&\qquad +|z_2-z_4|+|z_2-z_5|+|z_3-z_4|+|z_3-z_5|+|z_4-z_5|\\
&= \sqrt{2-2\cos\theta_2}+\sqrt{3+\cos\theta_2+\cos\theta_5-r(\sin\theta_2+\sin\theta_5)}\\
&\quad +\sqrt{3+\cos\theta_2+\cos\theta_5+r(\sin\theta_2+\sin\theta_5)}+\sqrt{2-2\cos\theta_5}\\
&\quad +\sqrt{3+\cos\theta_2+\cos(\theta_2-\theta_5)-r(\sin\theta_2+\sin(\theta_2-\theta_5))}\\
&\quad +\sqrt{3+\cos\theta_2+\cos(\theta_2-\theta_5)+r(\sin\theta_2+\sin(\theta_2-\theta_5))}\\
&\quad +\sqrt{2-2\cos(\theta_2-\theta_5)}+\sqrt{1-2\cos\theta_2-2\cos\theta_5-2\cos(\theta_2-\theta_5)}\\
&\quad +\sqrt{3+\cos\theta_5+\cos(\theta_5-\theta_2)-r(\sin\theta_5+\sin(\theta_5-\theta_2))}\\
&\quad +\sqrt{3+\cos\theta_5+\cos(\theta_5-\theta_2)+r(\sin\theta_5+\sin(\theta_5-\theta_2))}.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

这样 $n=5$ 的Thomson 问题的二维反问题就归结为在条件 $cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos(\theta_2-\theta_5)\leq\frac{1}{2}$ 之下，求由(2.1)给出的 Φ 的最小值。

我们再来讨论 $n=7$ 的情形，这时情况要比 $n=5$ 的情形复杂得多，然而思想方法上基本相同。设 $z_i=(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$ $(i=1,2,5,6,7)$，同样由于引理1，不妨假定 $\theta_1=0$。这样我们有

$$\begin{aligned}&z_1+z_2+z_5+z_6+z_7\\=\;&(1+\cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos\theta_6+\cos\theta_7,\sin\theta_2+\sin\theta_5+\sin\theta_6+\sin\theta_7),\end{aligned}$$

可见 $z_1+z_2+z_5+z_6+z_7=-z_3-z_4$ 的充分必要条件是

$$|z_1+z_2+z_5+z_6+z_7|\leq 2.$$

不难验证上述条件等价于

$$\begin{aligned}F(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7)\;&=\;\cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos\theta_6+\cos\theta_7+\cos(\theta_2-\theta_5)+\cos(\theta_2-\theta_6)+\cos(\theta_2-\theta_7)\\&+\;\cos(\theta_5-\theta_6)+\cos(\theta_5-\theta_7)+\cos(\theta_6-\theta_7)+\frac{1}{2}\leq 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

由引理3可得 z_3 和 z_4 由 $\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7\in[-\pi,\pi]$ 所表示的显式表达式：

$$\begin{aligned}z_3&=\left(-\frac{A}{2}+r\frac{B}{2},-\frac{B}{2}-r\frac{A}{2}\right),\\z_4&=\left(-\frac{A}{2}-r\frac{B}{2},-\frac{B}{2}+r\frac{A}{2}\right),\end{aligned}$$

其中

$$A=1+\cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos\theta_6+\cos\theta_7,\quad B=\sin\theta_2+\sin\theta_5+\sin\theta_6+\sin\theta_7$$

以及$r=\sqrt{\frac{4}{A^2+B^2}-1}$。由此，得到

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{1\le i<j\le 7} |z_i - z_j| \\
&= \sqrt{2-2\cos\theta_2} + \sqrt{2-2\cos\theta_5} + \sqrt{2-2\cos\theta_6} + \sqrt{2-2\cos\theta_7} \\
&\quad + \sqrt{2-2\cos(\theta_2-\theta_5)} + \sqrt{2-2\cos(\theta_2-\theta_6)} + \sqrt{2-2\cos(\theta_2-\theta_7)} \\
&\quad + \sqrt{2-2\cos(\theta_5-\theta_6)} + \sqrt{2-2\cos(\theta_5-\theta_7)} + \sqrt{2-2\cos(\theta_6-\theta_7)} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos\theta_6+\cos\theta_7 - r(\sin\theta_2+\sin\theta_5+\sin\theta_6+\sin\theta_7)} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos\theta_6+\cos\theta_7 + r(\sin\theta_2+\sin\theta_5+\sin\theta_6+\sin\theta_7)} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_2+\cos(\theta_2-\theta_5)+\cos(\theta_2-\theta_6)+\cos(\theta_2-\theta_7) - r(\sin\theta_2+\sin(\theta_2-\theta_5)+\sin(\theta_2-\theta_6)+\sin(\theta_2-\theta_7))} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_2+\cos(\theta_2-\theta_5)+\cos(\theta_2-\theta_6)+\cos(\theta_2-\theta_7) + r(\sin\theta_2+\sin(\theta_2-\theta_5)+\sin(\theta_2-\theta_6)+\sin(\theta_2-\theta_7))} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_5+\cos(\theta_5-\theta_2)+\cos(\theta_5-\theta_6)+\cos(\theta_5-\theta_7) - r(\sin\theta_5+\sin(\theta_5-\theta_2)+\sin(\theta_5-\theta_6)+\sin(\theta_5-\theta_7))} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_5+\cos(\theta_5-\theta_2)+\cos(\theta_5-\theta_6)+\cos(\theta_5-\theta_7) + r(\sin\theta_5+\sin(\theta_5-\theta_2)+\sin(\theta_5-\theta_6)+\sin(\theta_5-\theta_7))} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_6+\cos(\theta_6-\theta_2)+\cos(\theta_6-\theta_5)+\cos(\theta_6-\theta_7) - r(\sin\theta_6+\sin(\theta_6-\theta_2)+\sin(\theta_6-\theta_5)+\sin(\theta_6-\theta_7))} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_6+\cos(\theta_6-\theta_2)+\cos(\theta_6-\theta_5)+\cos(\theta_6-\theta_7) + r(\sin\theta_6+\sin(\theta_6-\theta_2)+\sin(\theta_6-\theta_5)+\sin(\theta_6-\theta_7))} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_7+\cos(\theta_7-\theta_2)+\cos(\theta_7-\theta_5+\cos(\theta_7-\theta_6) - r(\sin\theta_7+\sin(\theta_7-\theta_2)+\sin(\theta_7-\theta_5)+\sin(\theta_7-\theta_6))} \\
&\quad + \sqrt{3+\cos\theta_7+\cos(\theta_7-\theta_2)+\cos(\theta_7-\theta_5)+\cos(\theta_7-\theta_6) + r(\sin\theta_7+\sin(\theta_7-\theta_2)+\sin(\theta_7-\theta_5)+\sin(\theta_7-\theta_6))} \\
&\quad + \sqrt{-1-2(\cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos\theta_6+\cos\theta_7+\cos(\theta_2-\theta_5)+\cos(\theta_2-\theta_6)+\cos(\theta_2-\theta_7)+\cos(\theta_5-\theta_6)+\cos(\theta_5-\theta_7)+\cos(\theta_6-\theta_7))}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

这样 $n=7$ 的Thomson 问题的二维反问题就归结为在条件(2.2) 之下，求由(2.3)给出的 Φ 的最小值。

从表达式(2.1)和(2.3)来看，利用微积分的方法来求其极值似乎是不可行的，因为函数表达式实在是太复杂了， 表达式(2.3)的复杂程度和表达式(2.1)相比更是“指数级”的增长。在下一节中，我们将求助于数值计算的方法来探求结论，在此之前，通过观察我们有：

引理4. Φ 在点$z_1,\cdots,z_n$的任何一个置换下不变，特别地， 表达式*(2.1)*和*(2.3)*在关于它们的变量（对于表达式*(2.1)*是 θ_2,θ_5，对于表达式*(2.3)*是 $\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7$）的任何一个置换下也是不变的。

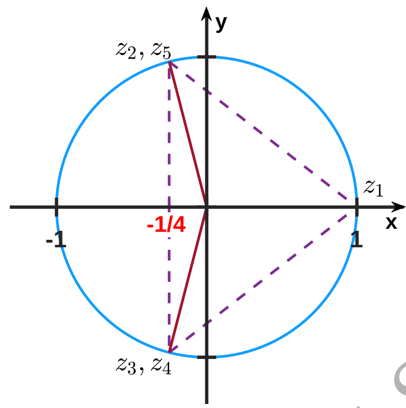
例1. 在 $n=5$ 时取

$$z_1=(1,0),\quad z_2=\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{15}}{4}\right),\quad z_5=\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

那么，由引理3可以算出 $r=0$,

$$z_3=\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4}\right),\quad z_4=\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

由此，可以直接计算得到 $\Phi = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} \approx 14.071\cdots$，参见下图：



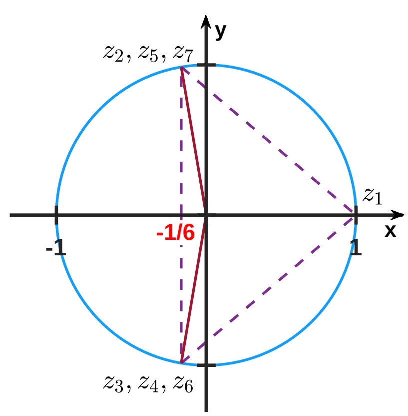
例2. 在 $n = 7$ 时取

$$z_1 = (1, 0), \quad z_2 = z_5 = z_7 = \left(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right), \quad z_6 = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right).$$

那么，同样由引理3可以算出：$r = 0$,

$$z_3 = z_4 = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right).$$

由此，一个直接计算可得 $\Phi = 2\sqrt{21} + 3\sqrt{35} \approx 26.913\cdots$，参见下图：



3 数值计算及结论验证

这一节我们将通过计算求解上一节提到的优化问题，并由此证明§1中的定理。

首先考虑 $n=5$ 的情况. 此时需要求解带非线性不等式约束的优化问题

$$\begin{aligned} &\min_{\theta_2,\,\theta_5\in[0,\pi]} \Phi(\theta_2,\theta_5), \\ &\text{subject to} \quad \cos\theta_2+\cos\theta_5+\cos(\theta_2-\theta_5)-\frac{1}{2}\le 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中, $\Phi(\theta_2,\theta_5)$ 由(2.1)给出.

由于优化的变量只有2个, 可以先通过网格点的函数值对 $\Phi(\theta_2,\theta_5)$ 进行观察, 如图1. 编号 1-6 给出了所有局部最小值出现的区域.

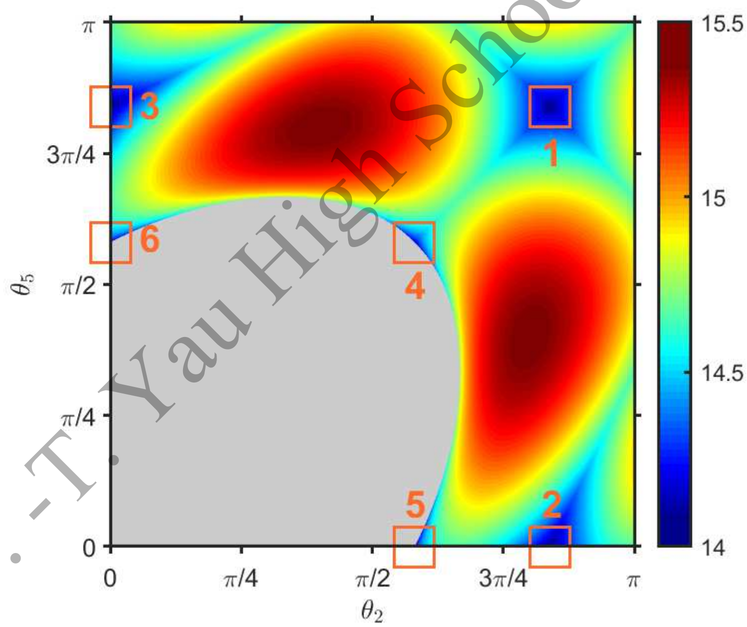


Figure 1: $n=5$ 时, 优化问题目标函数 $\Phi(\theta_2,\theta_5)$ 在可行区域内的热力图. 编号 1-6 的方框标出了最小值点可能的位置.

利用 MATLAB 优化工具箱中 fmincon 函数求解带约束的非线性多变量优化问题(3.4), 优化算法选用默认的内点法, 算法基本原理可参考 [1].

注: 为保证数值计算的顺利运行, 这里将目标函数Φ的表达式(2.1)中最后一项由$\sqrt{\cdot}$调整为$\sqrt{|\cdot|}$. 由于约束条件可以保证根号下的表达式非负, 这样的调整不会对问题 (3.4) 本身

产生影响。我们在区域 $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 内随机选取 10^4 个初值进行优化求解，这是由于 Φ 关于点$z_1,\cdots,z_n$的任何一个置换下的不变性，这种限制在 $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 内讨论是不失一般性的。得到 6 个最小值点 (保留2 位小数)及对应的函数值, 见表1. 序号1-6的结果与图1 中编号1-6 区域的最小值点相对应. 同时, 这6 个点两两满足置换关系.

序号	θ_2	θ_5	$\Phi(\theta_2,\theta_5)$
1	2.64	2.64	14.071
2	2.64	0.00	14.071
3	0.00	2.64	14.071
4	1.82	1.82	14.071
5	1.82	0.00	14.071
6	0.00	1.82	14.071

Table 1: $n=5$ 时, 问题(3.4)优化结果 (保留两位小数).

注意到, $\arccos(-7/8)\approx 2.64$, $\arccos(-1/4)\approx 1.82$. 代入计算, 可以发现表1中的6个结果所对应的函数值 Φ 均为 $2\sqrt{10}+2\sqrt{15}\approx 14.071$。我们要指出的是，在表1（Table 1）所列出的6种情况，实际上在相差$z_1,\cdots,z_5$的一个置换下等同于Case 4，即§2中例1的情形。事实上，对于Case 1，当$\theta_2=\theta_5=\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$时，我们可计算得到 $r=\sqrt{\frac{5}{3}}$，并代入上节的公式得到

$$z_3=(1,0)\ (=z_1),\quad z_4=\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

这样在置换

$$z_4\to z_1,\quad z_2=z_5\to z_3=z_4,\quad z_3=z_1\to z_2=z_5$$

之下便是Case 4. 对于Case 2的情形，此时$\theta_2=\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$, $\theta_5=0$，直接计算可得 $r=\sqrt{\frac{5}{3}}$，并代入上节的公式得到

$$z_3=\left(-\frac{7}{8},\frac{\sqrt{15}}{8}\right)\ (=z_2),\quad z_4=\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

这样在置换

$$z_4\to z_1,\quad z_2=z_3\to z_3=z_4,\quad z_5=z_1\to z_2=z_5$$

之下便是Case 4。同理讨论Cases 3,5,6的情况（在Case 5,6的情形，得到$r=0$并由此$z_3=z_4=(-7/8,-\sqrt{15}/8)$，这是关于$x$-轴对称的Case 1）。总之，在相差$z_1,\cdots,z_5$ 的一个置换下，Φ 在例1 情形取得最小值。 至此，$n=5$ 的定理证毕。

现在考虑 $n=7$ 时的情况. 此时需要求解带非线性的等式约束的优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7\in[-\pi,\pi]} & \Phi(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7), \\ \text{subject to} \quad & F(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7)\leq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中, $\Phi(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7)$ 满足(2.3), $F(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7)$由(2.2)给出.

由于这里需要优化的变量有4个, 难以通过直接观察得到(局部)最小值的数量或者出现的区域, 直接通过数值方法求解优化问题. 类似 $n=5$ 时的情况, 首先对 (2.3) 的最后一项进行调整$\sqrt{\cdot}\to\sqrt{|\cdot|}$, 调整后的问题与优化问题(3.5)是等价的.

仍然采用MATLAB提供的优化求解工具 fmincon 函数求解优化问题. 优化算法选择默认算法内点法. 在区间 $[-\pi,\pi]^4$ 内随机选取 5×10^4 个初值进行优化求解. $n=7$ 时带不等式约束的优化问题(3.5)求解结果见表2.

组别	编号	θ_2	θ_5	θ_6	θ_7	Φ
G1	1	0.00	0.00	2.81	2.81	26.913
	2	0.00	2.81	0.00	2.81	26.913
	3	0.00	2.81	2.81	0.00	26.913
	4	2.81	0.00	0.00	2.81	26.913
	5	2.81	0.00	2.81	0.00	26.913
	6	2.81	2.81	0.00	0.00	26.913
G2	7	0.00	0.00	-2.81	-2.81	26.913
	8	0.00	-2.81	0.00	-2.81	26.913
	9	0.00	-2.81	-2.81	0.00	26.913
	10	-2.81	0.00	0.00	-2.81	26.913
	11	-2.81	0.00	-2.81	0.00	26.913
						续表见下页

组别	编号	θ_2	θ_5	θ_6	θ_7	Φ
	12	-2.81	-2.81	0.00	0.00	26.913
G3	13	0.00	2.81	2.81	2.81	26.913
	14	2.81	0.00	2.81	2.81	26.913
	15	2.81	2.81	0.00	2.81	26.913
	16	2.81	2.81	2.81	0.00	26.913
G4	17	0.00	-2.81	-2.81	-2.81	26.913
	18	-2.81	0.00	-2.81	-2.81	26.913
	19	-2.81	-2.81	0.00	-2.81	26.913
	20	-2.81	-2.81	-2.81	0.00	26.913
G5	21	-1.74	-1.74	1.74	1.74	26.913
	22	-1.74	1.74	-1.74	1.74	26.913
	23	-1.74	1.74	1.74	-1.74	26.913
	24	1.74	-1.74	-1.74	1.74	26.913
	25	1.74	-1.74	1.74	-1.74	26.913
	26	1.74	1.74	-1.74	-1.74	26.913
G6	27	0.00	-1.74	2.81	2.81	26.913
	28	0.00	2.81	-1.74	2.81	26.913
	29	0.00	2.81	2.81	-1.74	26.913
	30	-1.74	0.00	2.81	2.81	26.913
	31	2.81	0.00	-1.74	2.81	26.913
	32	2.81	0.00	2.81	-1.74	26.913
	33	-1.74	2.81	0.00	2.81	26.913
	34	2.81	-1.74	0.00	2.81	26.913
	35	2.81	2.81	0.00	-1.74	26.913
	36	-1.74	2.81	2.81	0.00	26.913
	37	2.81	-1.74	2.81	0.00	26.913
						续表见下页

组别	编号	θ_2	θ_5	θ_6	θ_7	Φ
	38	2.81	2.81	-1.74	0.00	26.913
G7	39	0.00	1.74	-2.81	-2.81	26.913
	40	0.00	-2.81	1.74	-2.81	26.913
	41	0.00	-2.81	-2.81	1.74	26.913
	42	1.74	0.00	-2.81	-2.81	26.913
	43	-2.81	0.00	1.74	-2.81	26.913
	44	-2.81	0.00	-2.81	1.74	26.913
	45	1.74	-2.81	0.00	-2.81	26.913
	46	-2.81	1.74	0.00	-2.81	26.913
	47	-2.81	-2.81	0.00	1.74	26.913
	48	1.74	-2.81	-2.81	0.00	26.913
	49	-2.81	1.74	-2.81	0.00	26.913
	50	-2.81	-2.81	1.74	0.00	26.913

Table 2: $n = 7$ 时带不等式约束的优化问题 (3.5) 求解结果(保留2位小数). 同一组别的求解结果满足置换关系.

接下来再考虑约束边界上的情况, 即考虑带非线性等式约束的优化问题

$$\begin{aligned} &\min_{\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7\in[-\pi,\pi]} \Phi(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7), \\ &\text{subject to} \quad F(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7) = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中, $\Phi(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7)$ 满足(2.3), $F(\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_7)$ 由 (2.2)给定. 此时, $r = 0$.

采用与前面同样的方法求解带非线性等式约束的优化问题(3.6). 在区间 $[-\pi,\pi]^4$ 内随机选取5×10^4个初值进行优化求解计算, 得到优化问题(3.6)求解结果见表3. 同一组别内的结果满足置换关系.

组别	编号	θ_2	θ_5	θ_6	θ_7	Φ
B1	1	1.74	-1.74	-1.74	-1.74	26.913
	2	-1.74	1.74	-1.74	-1.74	26.913
	3	-1.74	-1.74	1.74	-1.74	26.913
	4	-1.74	-1.74	-1.74	1.74	26.913
B2	5	-1.74	1.74	1.74	1.74	26.913
	6	1.74	-1.74	1.74	1.74	26.913
	7	1.74	1.74	-1.74	1.74	26.913
	8	1.74	1.74	1.74	-1.74	26.913
B3	9	0.00	0.00	1.74	-2.81	26.913
	10	0.00	0.00	-2.81	1.74	26.913
	11	0.00	1.74	0.00	-2.81	26.913
	12	0.00	-2.81	0.00	1.74	26.913
	13	0.00	1.74	-2.81	0.00	26.913
	14	0.00	-2.81	1.74	0.00	26.913
	15	1.74	0.00	0.00	-2.81	26.913
	16	-2.81	0.00	0.00	1.74	26.913
	17	1.74	0.00	-2.81	0.00	26.913
	18	-2.81	0.00	1.74	0.00	26.913
	19	1.74	-2.81	0.00	0.00	26.913
	20	-2.81	1.74	0.00	0.00	26.913
B4	21	0.00	0.00	-1.74	2.81	26.913
	22	0.00	0.00	2.81	-1.74	26.913
	23	0.00	-1.74	0.00	2.81	26.913
	24	0.00	2.81	0.00	-1.74	26.913
	25	0.00	-1.74	2.81	0.00	26.913

续表见下页

组别	编号	θ_2	θ_5	θ_6	θ_7	Φ
	26	0.00	2.8	-1.74	0.00	26.913
	27	-1.74	0.00	0.00	2.81	26.913
	28	2.81	0.00	0.00	-1.74	26.913
	29	-1.74	0.00	2.81	0.00	26.913
	30	2.81	0.00	-1.74	0.00	26.913
	31	-1.74	2.81	0.00	0.00	26.913
	32	2.81	-1.74	0.00	0.00	26.913
B5	33	1.74	-2.81	-2.81	-2.81	26.913
	34	-2.81	1.74	-2.81	-2.81	26.913
	35	-2.81	-2.81	1.74	-2.81	26.913
	36	-2.81	-2.81	-2.81	1.74	26.914
B6	37	-1.74	2.81	2.81	2.81	26.913
	38	2.81	-1.74	2.81	2.81	26.914
	39	2.81	2.81	-1.74	2.81	26.914
	40	2.81	2.81	2.81	-1.74	26.913

Table 3: $n=7$ 时, 带等式约束的优化问题 (3.6) 数值求解结果 (保留2位小数). 在同一组别的结果满足置换关系.

注意到, $\arccos(-1/6) \approx 1.74$, $\arccos(-17/18) \approx 2.81$. 代入表2与表3中的全部90个结果, 其对应的目标函数值 Φ 均为 $3\sqrt{35}+2\sqrt{21} \approx 26.913$。我们要指出的是，在表2（Table 2）和表3（Table 3）所列出的13种大类情况，实际上在相差$z_1, \cdots, z_7$的一个置换下等同于表3（Table 3）Case B2(7)，即§2中例2 的情形，其验证我们在此省略。 至此，$n=7$ 的定理也就验证完毕。

4 代码

$n = 5$ 时, 求解优化问题(3.4)代码如下.

```
%% ===== Initialization ===== %%
N = 1e+4; % number of trials
% solution
Theta = zeros(2,N);
% objective function value at the solution
Fval = zeros(1,N);

%% ===== OPIMIZATION ===== %%
% bound contraints
lb = zeros(2,1); % lower bound
ub = pi * ones(2,1); % upper bound
% options
options = optimset('display','notify',...
                'TolFun', 1e-6,'MaxIter', 1e+3, ...
                'Algorithm', 'interior-point',...
                 'UseParallel', true);
% initial points
x0 = pi * rand(2,N);

parfor i = 1:N
        % minimize function fval_n5 subject to inequality constraints nonlin_con_n5
        [Theta(:,i), Fval(i)] = fmincon(...
                @fval_n5,x0(:,i),[],[],[],[],lb, ub,...
                @nonlin_con_n5,options);
end
Result = sortrows( [Fval;Theta]', 1); % sort results

%% ========= Objective Function for n = 5 ========= %%
function val = fval_n5(x)
        % x2: theta2;  x5:theta5
        theta2 = x(1); theta5 = x(2);

        X1 = [theta2; theta5; theta2 - theta5];
        X2 = [theta2, theta5; theta2, theta2-theta5; theta5, theta5 - theta2 ];

        c3 = cos(X1);
        r = 4 / ( 3 + 2 * sum(c3) ) - 1; r = sqrt(r);

```

```
        val1 = sqrt( 2 * ( 1 - c3 ) );
        val1 = sum( val1 );

        val3 = abs( 1 - 2 * sum( c3 ) );
        val3 = sqrt( val3 );

        val21 = 3 + sum( cos(X2), 2);
        val22 = r * sum( sin(X2), 2);
        val2 = sqrt( val21 + val22 ) + sqrt( val21 - val22 );
        val2 = sum( val2 );

        val = val1 + val2 + val3;
end

%% ========== Non-linear Contraints for n=5 ========== %%
function fval = non_con_fun(theta2,theta5)
        fval = cos(theta2) + cos(theta5) + cos( theta2 - theta5 ) - 1/2;
end

%% ========== Inequlity Contraints for n=5 ========== %%
function [fval,ceq] = nonlin_con_n5(x)
        fval = non_con_fun(x(1), x(2));
        ceq = [];
end
%% ========== Equlity Contraints for n=5 ========== %%
function [fval,ceq] = nonlin_con_eq_n5(x)
        fval = [];
        ceq = non_con_fun(x(1), x(2));
end
```

相似地, $n = 7$ 时, 求解带不等式约束的优化问题(3.5)及带等式约束的优化问题(3.6)代码如下:

```
%% ====== Initialization ====== %%
N = 5e+4; % number of trails
% solution
Theta = zeros(4, N);
Theta_bdry = zeros(4,N);
% objective function value at the solution
Fval = zeros(1, N);
Fval_bdry = zeros(1,N);

%% ====== Optimization ====== %%
```

```matlab

% bound constraints
lb = - pi * ones(4,1); % lower bound
ub = pi * ones(4,1); % upper bound

% options
options = optimset('display','notify',
                   'TolFun',1e-6, 'MaxIter',1e+3,
                    'Algorithm', 'interior-point',
                    'UseParallel', true);

% initial points
x0 = - pi + 2 * pi * rand(4, N);

% minimize fval_n7 subject to nonliear constraints
parfor i = 1:N
        % inequality constraint -> nonlin_con_n7
        [Theta(:, i), Fval(i)] = fmincon(
                @fval_n7, x0(:,i), [],[],[],[],lb,ub,
                @nonlin_con_n7,options);
        % equality constraint -> nonlin_con_eq_n7
        [Theta_bdry(:, i), Fval_bdry(i)] = fmincon(
                @fval_n7,x0(:,i),[],[],[],[],lb,ub,
                @nonlin_con_eq_n7,options);
end
% sort results
Result = sortrows([Fval; Theta]', 1);
Result_bdry = sortrows([Fval_bdry; Theta_bdry]', 1);

%% ========= Objective Function for n = 7 ========= %%
function val = fval_n7(x)
        x2 = x(1); x5 = x(2); x6 = x(3); x7 = x(4);

        X1 = [x2; x5; x6; x7; x2-x5; x2-x6; ...
        x2-x7; x5-x6; x5-x7; x6-x7];
        X2 = [x2, x5, x6, x7; ...
        x2, x2-x5, x2-x6, x2-x7;...
        x5, x5-x2, x5-x6, x5-x7;...
        x6, x6-x2, x6-x5, x6-x7;...
        x7, x7-x2, x7-x5, x7-x6];

        R2 = 5 + 2 * sum(cos(X1));  r = sqrt(4/R2 - 1);

```

```
        val1 = sqrt( 2 * (1 - cos(X1)) );
        val1 = sum(val1);

        val3 = abs(- 1 - 2 * sum(cos(X1)));
        val3 = sqrt(val3);

        val21 = 3 + sum(cos(X2), 2);
        val22 = r * sum( sin(X2), 2);
        val2 = sqrt( val21 + val22 ) + sqrt( val21 - val22 );
        val2 = sum( val2);

        val = val1 + val2 + val3;
end

%% ======== Non-linear Contraints for n = 7 ======== %%
function val = nonlin_fun_n7(x)
        theta2 = x(1); theta5 = x(2);
        theta6 = x(3); theta7 = x(4);

        Y = [theta2; theta5; theta6; theta7; ...
        theta2-theta5; theta2-theta6; theta2-theta7;...
        theta5-theta6; theta5-theta7; theta6-theta7];

        val = sum( cos(Y) ) + 1/2;
end

%% ========= Inequlity Contraints for n=7 ========= %%
function [val, ceq] = nonlin_con_n7(x)
        val = nonlin_fun_n7(x);
        ceq = [];
end
%% ========= Equlity Contraints for n=7 ========= %%
function [val, ceq] = nonlin_con_eq_n7(x)
        val = [];
        ceq = nonlin_fun_n7(x);
end
```

References

[1] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

[2] J. Roth, Description of a highly symmetric polytope observed in Thomson's problem of charges on a hypersphere. Phys. Rev. E (3) 76 (2007) 047702.

[3] S. Smale, "Mathematical problems for the next century". In Arnold, V. I.; Atiyah, M.; Lax, P.; Mazur, B. (eds.). Mathematics: frontiers and perspectives. American Mathematical Society, 271-294, AMS, Providence, RI, 2000.

[4] J. J. Thomson. " On the Structure of the Atom: An Investigation of the Stability of the Periods of Oscillation of a Number of Corpuscles Arranged at Equal Intervals around the Circumference of a Circle with Application of the Results to the Theory of Atomic Structure." Philosophical magazine, Series 6 7:39 (1904), 237 – 265.

[5] 牟晓生, 冷老师的复数不等式，（2016-02），Preprint.

团队成员马博文简介： 上海市育才中学高二（5）班学生，校第26届学生会学习部部长。 2010.7－2015.7 上海市第一师范附属小学; 2015.7－2019.7 上海市市西初级中学; 2019.7－至今 上海市育才中学. 曾获得第八届”新知杯“沪港少年数学邀请赛三等奖；上海市“生活中的数学”实践活动三等奖；小提琴社会艺术水平考级8级（上海音乐学院）；多次获得校级“优秀学生”称号。

指导老师尹德好简介： 上海市育才中学数学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练员，上海师范大学硕士生校外导师，华东师范大学免费师范生导师。上海市静安区高中数学学科带头人，静安区教育科研先进个人，多次参加重大考试的命题工作。 曾获得上海市园丁奖，上海唐君远教育基金会的“优秀教师君远奖”。 指导学生参加上海市应用数学竞赛，1人获市一等奖，4人获市二等奖；指导学生在《中学生数学》杂志发表文章1篇。带教5 位老师。其中3人获静安区园丁奖，在各教学比赛中获全国二等奖1人、三等奖1人。获上海市一等奖2人次，区一等奖3人。 主编专著《用“心”启“智” 基于心理学的高中数学教学实践》《高中数学题根》《挑战高考数学压轴题—轻松入门篇》《挑战高考数学压轴题—训练篇》《中学数学教学研修》《数学作业的设计与评价》等10多部著作。发表文章30余篇。 主持和主研国家级课题、市级课题、区级课题20余项。其中获国家级教育成果一等奖1项，上海市教育科研一等奖1项，二等奖1项，区一等奖1项。