参赛队员姓名：张籽周

中学：涪陵区第五中学校高二零二二级二班

省份：重庆市

国家/地区：中国

指导教师姓名：张韶华

指导教师单位：长江师范学院数学与统计学院

论文题目：超图的互素标号问题研究

超图的互素标号问题研究

张籽周
重庆市涪陵区第五中学校高 2022 级二班

摘　　要

图的标号问题是图论中最重要的研究问题之一，其中图的互素标号问题是一个研究热点，倍受广大数学家关注，一个著名的猜想是 Entringer 和 Tout 所提出的：所有的树是可以互素标号的。本文的研究目的是试图将图的互素标号问题推广到超图，并利用 Pomerance 和 Selfridge 在上个世纪八十年代所证明的 Newman 互素映射猜想（现在称为互素映射定理）证明一类线性超图是素超图，希望以此引发广大数学爱好者的进一步研究。

关键词：互素映射定理；互素标号；素图；线性超图；素超图

目　　录

1 研究背景

所谓图的标号问题就是在图的顶点或者边上（或者同时在其顶点和边上）标出整数，使其满足一定的性质，该问题始于上世纪六十年代，至今已有上千篇论文研究图的标号问题[1]，Rosa 、Ringel 和 Kotzig 等人猜想每棵树都是优美的就是其中一个著名的例子。半个世纪的研究历史已经证明图的标号问题是图论中最重要的研究问题之一，也是非常活跃的研究课题之一，它不仅具有重要的理论研究意义而且也有着广泛的应用价值，它不仅丰富了图论的研究内容，而且也刺激了数论研究、尤其是整数性质的深刻研究，将整数标号在图上，不仅给人以很直观的感觉和遐想，而且也充分体现了数学的内在联系和数学美感。因此许多数学家对图的标号问题十分着迷，其中印度、美国、加拿大、德国、中国等国家的学者尤为关注，除了图的优美标号以外，还有一类图的标号问题甚是有趣，那就是图的互素标号问题。

设图 G 的顶点集为 V，记|V|为 V 的元素个数。如果可以将 1, 2, . . . , |V|这|V|个连续的正整数适当地标在图的顶点上，使得共边的两个顶点的标号是互素的，那么我们就说 G 有一个互素标号，此时也说图 G 是素的，或者称其为素图。图的互素标号问题就是研究图的素性，也就是研究它是否存在互素标号。确定哪些图是素的，非常有趣，一个著名的猜想是上个世纪八十年代，Entringer 和 Tout 等人所提出的，说每棵树都是素的。到目前为止，人们已经证明某些树类是素的，例如：路，星形树，毛毛虫，蜘蛛，橄榄树，完全二元树等等，1981 年 RaoHebbare 证明顶点数目不超过 15 的树是素的，1994 年 Fu 和 Ching[2]再次证明了这个结果；2002 年，Pikhurko[3]证明顶点数目不超过 50 的树是素的，2007 年，Pikhurko[4]证明了几乎所有的树是素的，但离问题的最后解决还差一步。最近，Kou 和 Fu 声称顶点数目不超过 206 的树是素的。Robertson Leanne 和 Small Ben 于 2009 年证明掌形树，香蕉树，二项式树等都是素的，他们用到了数论中一些经典的结果，例如 Bertrand-chebyshev 定理、Pomerance 和 Selfridge 在上个世纪八十年代所证明 Newman 互素映射猜想（特别地，他们进一步推广了 Pomerance 和 Selfridge 的结果到算数级数情形），现在人们称其为互素映射定理[5]。2010 年 Penny Haxell, Oleg Pikhurko 和 AnuschTaraz 在预印上发表论文进一步研究了树的素性问题。在 2011 年的一次国际专题讨论会上，SuryaprakashNagojiRao 写了一篇综述性文章 *A Creative Review on Coprime (Prime) Graphs*（网上可以下载）进一步概括了图的互素标号问题的进展情况。由此可以看到人们对图的互素标号问题的研究一直方兴未艾。

2 动机与问题的提出

首先我们在此指出将图的互素标号问题推广到超图是很自然的，如果说素图要求共边的两个顶点的标号是互素的话，那么素超图要求共边的顶点的标号中有一个标号与这条边上其他点的标号都互素即可。

一个超图H=(X,E)就是由一个顶点集X和一个超边集E构成的图，其中每条超边是X的子集。设E是m条超边（说 $E_1=\{e_{11},e_{12},...,e_{1k_1}\}$, $E_2=\{e_{21},e_{22},...,e_{2k_2}\}$,..., $E_m=\{e_{m1},e_{m2},...,e_{mk_m}\}$）的集合，X是这些集合的并，如可将1, 2, . . . , |X|这|X|个连续的正整数适当地标在超图的顶点 e_{ij} 上，使得每条超边都有性质：每条超边上至少有一个点的标号与这条超边上的其他所有的点的标号都互素，即对于 $\forall 1\le i\le m$， $E_i=\{e_{i1},e_{i2},...,e_{ik_i}\}$ 中至少有一个顶点的标号，

说$e_{ij}(1\le j\le k_i)$，与这个集合中其他所有顶点的标号$e_{ir}(1\le r\ne j\le k_i)$互素，那么超图H=(X,E)就有一个互素标号，此时也说超图H=(X,E)是素超图。这里我们必须指出的是本论文中考虑的超图是它的每条超边至少包括两个顶点，这与普通图的边包含两个顶点对应，我们不考虑孤立点或者单个的圈，这是因为要满足互素这个条件的需要。

我们说超图 H=(X,E)是线性的，如果任何两条超边至多一个公共的顶点。说超图 H=(X,E)是均匀的，如果$k_1=\ldots=k_m$. 因此树可以看做一类特殊的线性超图。我们的研究就从研究线性超图和均匀超图的素性入手。本文将证明下面的定理：

定理 1：如果线性超图 H=(X,E)的任何两条超边没有公共的顶点，也就是说$E_i\cap E_j=\varnothing$，那么 H 是素超图。

3 主要结果的证明

引理 1[6]： 如果n是一个正整数且I是一个含有n个连续正整数的整数集，那么有一个一一映射$f:\{1,2,\cdots,n\}\to I$满足$\gcd(a,f(a))=1$对于所有的$1\le a\le n$成立(这样的映射叫互素映射，下同)。

定理 1 的证明：假设线性超图 H=(X,E)有n条超边，每条超边上的顶点数分别为$k_1,k_2,\cdots,k_n$，不失一般性我们假定$k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_n$。假设我们在第$i$条超边上的点标的数字为$v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{ik_i}$，因为任何两条超边没有公共的顶点，这样，我们得到一个阶梯形阵列：

$$\begin{matrix} v_{11} & \ldots & v_{1k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & \ldots & v_{nk_n} \end{matrix}.$$

首先我们在第i条超边上的第一列的点上标号数字为$v_{i1}=i$，其中$1\le i\le n$，这样$v_{11},v_{21},\cdots,v_{n1}$正好是$1,2,\cdots,n$这$n$个连续正整数，现在我们分别来标每条超边上的第二列的点v_{i2}，由引理 1（也叫互素映射定理)，可知在集合{1，2，…,n} 与任意连续n个正整数的集合之间有个互素映射，特别地，{1，2，…,n}与{n+1，n+2，…，n+n}有互素映射。这样我们可以重排n+1，n+2，…，n+n 到第二列使得v_{i2}与i互素。根据我们事先的约定，于是阶梯形阵列变成如下形状：$$\begin{matrix} 1 & v_{12} & \ldots & v_{1k_1} \\ 2 & v_{22} & \ldots & v_{2k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & v_{n2} & \ldots & v_{nk_n} \end{matrix}.$$

标完了所有的v_{i2}，下面我们再标第三列，如果第三列仍然有n个元素，那么由互素映射定理可知{1，2，…,n}与{2n+1，2n+2，…，2n+n}有互素映射。这样我们可以重排 2n+1，

$2n+2$，…，$2n+n$ 到第三列使得使得 v_{i3} 与 i 互素。如果第三列只有 t 个元素，而 t 小于 n，由互素映射定理，可知在集合 $\{1,...,t\}$ 与任意 t 个连续正整数的集合$\{2n+1，2n+2，…，2n+t\}$之间有个互素映射，我们仍然可以重排 $2n+1$，$2n+2$，…，$2n+t$ 到第三列使得 v_{i3} 与 i 互素。

于是阶梯形阵列变成如下可能形状：$\begin{matrix} 1 & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1k_1} \\ 2 & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t & v_{t2} & v_{t3} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & v_{n2} & & & \end{matrix}$.

重复这个过程，反复利用互素映射定理，直到把所有顶点标号完，最后可得：当 j 不等于 1 时第 i 行第 j 列的数必都与 i 互素，因此 H=(X,E)必是素超图，定理 1 证完。

4 结论

超图是有限集合的子集系统，是最一般的离散结构，在信息科学、生命科学等领域有着广泛的应用，因此研究超图意义重大。我们国家在超图理论研究中取得了突破性进展，例如王建方和李海珠得到了严格高维连通匀齐无圈超图的技术公式，尤其是得到了无圈超图的边数公式，在这样广阔的背景下，本文给超图理论又增加了新的视角，首次将图的互素标号问题推广到超图，采用的有力工具是互素映射定理，利用该定理可以得到其他一些素超图，比方说，某些均匀超图也是素的，但我们不知道线性超图是否也是素的，限于篇幅不再赘述。

最后值得指出的是，由于超图本质上可以看做有限集的组合，因此，对形形色色看似杂乱无章的超图便可以大致建立一般的代数模型，这样，在处理问题的时候显得更方便。因为超图的互素标号问题可以转化为将集合 $\{1,2,...,|X|\}$ 分为m个子集 $E_1=\{e_{11},e_{12},...,e_{1k_1}\}$，$E_2=\{e_{21},e_{22},...,e_{2k_2}\},\cdots,E_m=\{e_{m1},e_{m2},...,e_{mk_m}\}$，使得在每个子集合 E_i 中有一个元素与 E_i 中其他元素都互素的问题，于是这样一个图论问题又可以视为一个数论问题。而在数论中考虑一个有限的正整数集合中是否有一个元素与该集合中其他元素都互素的问题是一个非常有意义的问题。Pillai.S早就证明任意连续 m 个正整数的集合中必定有一个元素与该集合中其他元素都互素，只要 m 不超过16，而 m 大于16时，不再具有此性质。人们已经证明随机 m 个正整数中有一个数与其他数互素的概率是 $\left(\frac{1}{\zeta(2)}\right)^{m-1}$，其中 $\zeta(.)$ 就是著名的黎曼zeta函数。数论中有一个没解决的大猜想说两个平方数 m^2 与 $(m+1)^2$ 之间必有素数，而这个猜想等价于集合 $\{m^2+1,...,m^2+2m\}$ 中必定有一个元素与该集合中其他元素都互素。利用Bertrand-chebyshev定理，不难证明 m 个连续正整数中若有素数那么必有一个数与其他数互素，……，如此等等，由此可见，超图的互素标号问题与数论密切相关，通过研究这个问题，我们期待从中提出新的数论问题，发现整数新的规律和性质。

5 参考文献

[1] J. Gallian, Dynamic Survey of Graph Labeling, *Elec. J. Combin.*, 14, No. DS6, (2008). See also *Elec. J. Combin.*, thirteenth edition, November 13, 2010.

[2]F. Hung-Lin and H.Kuo-Ching, On prime labellings, *Discrete Math.*, 127 (1994), 181-186.

[3] O.Pikhurko, Every tree with at most 34 vertices is prime, *Util. Math.*, 62 (2002) 185-190. (http://www.pmms.cam.ac.uk/~oleg/Papers/TreesAreAlmostPrime.ps).

[4] O.Pikhurko, Trees are almost prime, *Discrete Math.*, 307 (2007) 1455–1462.

[5] L.Robertson and B.Small, On Newman's Conjecture and Prime Trees, *Integers*. 9, 2 (2009), 117-128.

[6] C. Pomerance and J. L. Selfridge, Proof of D. J. Newman's coprime mapping conjecture, *Mathematika*, 27 (1980), 69-83.

6 致谢

我衷心感谢我的指导老师张韶华博士为我选取这么一个有趣的数学问题，从中体会到证出一个定理的兴奋和激动，感谢他牺牲大量休息时间给予我理论指导、为我提供重要的参考文献、详细讲解超图的互素标号问题与数论的内在联系，这不仅拓宽了我的视野，而且也让我深深体会到做研究学写论文的快乐。

附：如实说明---

1. 论文的选题来源：指导老师命题。
2. 我在论文撰写中承担的工作以及贡献：搜集资料、研读文献，深入研究线性超图的互素标号问题、撰写论文。
3. 指导老师与学生的关系：校外指导老师。
4. 指导老师在论文写作过程中所起的作用：负责理论指导、给出文献综述批注、修改论文。
5. 他人协助完成的研究成果：无。