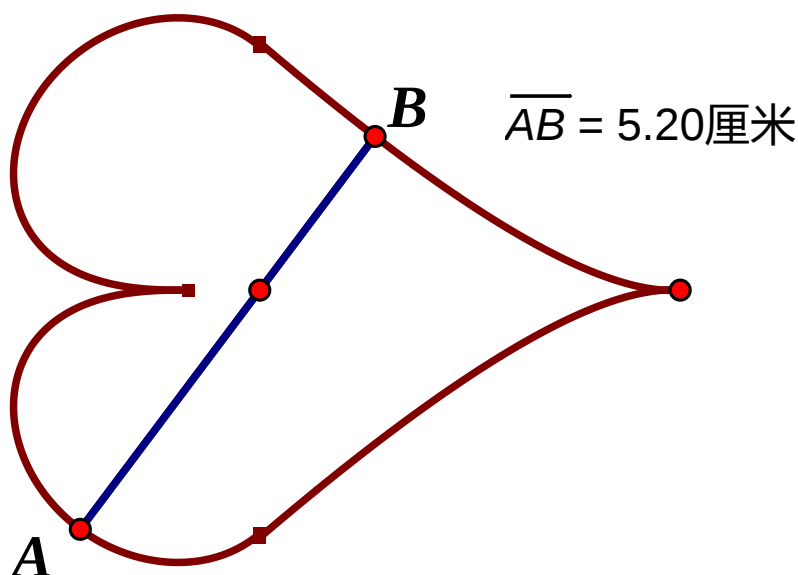


中华人民共和国广东省广州市 广州市第六中学
GUANGZHOU / GUANGDONG PROVINCE / THE PEOPLE REPUBLIC OF CHINA /
GUANGZHOU NO.6 MIDDLE SCHOOL.

常曲率曲线上的等弦长曲线

Equichordal Curves on Surfaces of Constant Curvature



李岳桐
Yuetong Li
指导老师 璩斌
Supervisor / Bing Qu
2018/8/24
Version 6.8
数学奖
Mathematics Award

独立版权声明

本人郑重声明本论文为该课题小组成员在导师和教授指导下独立创作的研究成果。尽我所知, 本论文中除文中已经标明引用部分以外, 本论文不包含其他个人或团体已经发表或撰写的研究成果。对给予我们帮助的同志和其所做贡献均在文中做出明确说明并表示了致谢。

该课题组成员均拥有本论文的独立版权和解释权。其他任何人未经本人或其他成员同意, 不得印刷、出版、销售、传播本论文。一经发现, 我们将追究其法律责任。

若本论文有不实之处, 本人将承担一切相关责任。

课题负责人: 李岳桐

指导老师: 璩斌

摘要

论文标题: 常曲率面上的等弦长曲线

等弦长曲线是一类特殊的曲线,它的特点在于,其内部存在一点使得任意一条过该点的弦长度相等. 这类曲线最早出现于著名的等弦点问题中,该问题可以概括为:在欧氏平面内,一个闭曲线是否可以有两个等弦点?这一问题由Fujiwara于1916年提出,并由Rychlik于1996年彻底解决,证明了在欧氏平面内,一个闭曲线不可以有两个等弦点. 然而事实上,除了等弦点问题以外,等弦长曲线的诸多性质也是十分值得研究的. 本文研究的对象正是常曲率面上的等弦长曲线的构造和性质.

本文研究的内容主要分成三个部分. 我们首先研究的是,对于等弦长曲线,需要附加什么条件才能使之成为圆. 我们得出了几个曲率限制条件和对称限制条件使得等弦长曲线为圆并据此得到了一些推论.

其次,我们对单位球面和Poincaré圆盘上的等弦长曲线进行了研究,探究了它们的构造原理并得到了几个使之成为测地圆的限制条件.

最后,我们对单位球面和Poincaré圆盘上等弦长曲线的部分几何量进行了估计并将其与非欧平面上的等宽曲线联系起来得到了几个重要的结论. 值得注意的是,等弦长曲线面积的极值问题实际上可以看做是Kakeya问题的一类特殊情形,具有较高的研究价值.

关键词: 等弦长曲线; 等弦点; 等弦点问题; 曲率; 单位球面; Poincaré圆盘; 几何量; 等宽曲线; Kakeya问题

Abstract

Title: Equichordal Curves on Surfaces of Constant Curvature

Equichordal curves are a special kind of curves, which are characterized by the fact that there is a point within them that makes any chord passing through the point equal in length. This kind of curve first appeared in the famous Equichordal Point problem. This problem was put forward by Fujiwara in 1916 and thoroughly solved by Rychlik in 1996. It is proved that a closed curve can not have two equichordal points in the Euclidean plane. However, many properties of equichordal curves are worth studying besides the equichordal point problem. The object of this paper is the construction and properties of Equichordal Curves on the surfaces of constant curvature.

The contents of this paper are mainly divided into three parts. The first thing we considered was to find what conditions are needed to make an equichordal curve equal to a circle. We obtained several curvature and symmetry constraints which can make an equichordal curve equal to a circle and we consequently got several inference.

Secondly, we studied the equichordal curves on the unit sphere and Poincaré disk. We explored their structural principles and obtained several constraints for making them equal to circles.

At last, we estimate some geometric quantities of equichordal curves on the unit sphere and Poincaré disk. We connected them with the curves of constant width on the non-Euclidean plane and obtained some important conclusion. It is noteworthy that the extremum problem of the area of equichordal curves can actually be regarded as a special case of the Kakeya problem, which has great study value.

Keywords: Equichordal Curves; Equichordal Point; Curvature; Unit Sphere; Poincaré Disk; Geometric Quantities; Curves of Constant Width; Kakeya Problem

目录

1. 引言.....6

2. 预备知识.....8

2.1 球面.....8

2.2 Poincaré圆盘.....8

2.3 等宽曲线.....9

3. 欧氏平面上的等弦长曲线.....10

3.1 在曲率限制条件下等弦长曲线为圆的情况.....10

3.2 在对称限制条件下等弦长曲线为圆的情况.....14

4. 非欧平面上的等弦长曲线.....15

4.1 测地圆情形.....15

4.2 非测地圆情形.....19

4.3 非欧平面上等弦长曲线的几何量估计.....21

4.3.1 面积的估计.....21

4.3.2 周长的估计.....23

4.3.3 全曲率的估计.....24

4.4 非欧平面上在等宽条件限制下的等弦长曲线.....25

5. 参考文献.....28

6. 致谢.....28

1. 引言

设 (N^2, g) 是二维完备Riemann流形, $\gamma \subset N^2$ 是 N^2 上的简单闭曲线, $\Omega \subset N^2$ 是 γ 所围成的区域. $O \in \Omega$, l 是过 O 的测地线. $l \cap \Omega$ 的连通分支称为 γ 的弦. 如果 γ 的所有包含 O 的弦都具有相同的长度, 则称 γ 为相对于 O 的等弦曲线 (Equichordal Curve), 此时称 O 为等弦点 (Equichordal Point), l 为恒弦 (Equichordal Chord) (简称弦).

本文研究单连通常曲率面上的等弦长曲线的构造和性质. 我们知道, 单连通常曲率曲面本质上只有3种, 它们的度量可以分别表示为

$$g_c = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{[1 + c(x^2 + y^2)]^2}$$

其中 $c = 0$ 对应的是欧氏平面 (和欧氏平面上的标准度量相差一个伸缩因子); $c = 1$ 对应的是Gauss曲率为1的三维欧氏空间中的单位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$; $c = -1$ 对应的是Gauss曲率为-1的Poincaré圆盘 $D = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 < 1\} = \{z = x + yi | |z| < 1\}$. 更确切地说, 我们关心的是下面三个问题:

(1) 由于欧氏平面上存在非圆形的等弦长曲线, 因此自然会问: 对于等弦长曲线, 需要附加什么条件才能使之成为圆. 我们将寻找这样的一些条件. 特别的我们得到下述定理.

①设 $\gamma \subseteq R^2$ 是相对曲率 $k_r \geq 1$ 的简单闭曲线, O 是 γ 所围成区域内一点. 若过 O 的所有弦的长度均为2, 则 γ 是以 O 为圆心的单位圆周.

上述定理可看成下述定理的推论.

②设 $\gamma \subseteq R^2$ 是相对曲率 $k_r \geq 1$ 的简单闭曲线, 则

i. γ 的直径小于等于2;

ii. 若 γ 的直径为2, 则 γ 必为单位圆周.

回忆 γ 的直径 D 定义为 γ 上两点间的最大距离, 即

$$D = \max_{p, q \in \gamma} d(p, q)$$

其中 $d(p, q)$ 为 p, q 间的距离, 亦即直径是最长的弦.

此外, 我们还证明了以下定理.

③若平面曲线 $\gamma \subseteq R^2$ 既是等弦长曲线又是等宽曲线, 则 γ 必为圆.

④若平面曲线 $\gamma \subseteq R^2$ 是中心对称的等弦长曲线, 则 γ 必为圆.

(2) 接下来我们考虑单位球面 S^2 上的等弦长曲线. 易见球面 S^2 上的测地圆 (测地曲率为常数的曲线) 是

③设 γ 是单位球面上弦长为 θ_0 的等弦长曲线, 则 γ 的周长 L 满足

$$L \geq 2\pi \sin \theta_0/2$$

且等号成立当且仅当 γ 为半径是 $\theta_0/2$ 的测地圆.

④设 γ 是Poincaré圆盘上弦长为 ρ_0 的等弦长曲线的等弦长曲线, 则 γ 的周长 L 满足

$$L \geq 2\pi \sinh \rho_0/2$$

且等号成立当且仅当 γ 为半径是 $\rho_0/2$ 的测地圆.

记 γ 的全曲率

$$J = \oint_{\gamma} k_g ds$$

其中 k_g 为 γ 的测地曲率. 有下述两个定理.

⑤设 γ 是单位球面上以北极为等弦点且弦长为 θ_0 的等弦长曲线, 则 γ 的全曲率

$$J \leq 2\pi \cos \theta_0/2$$

且等号成立, 等且仅当 γ 是测地圆.

⑥设 γ 是一条Poincaré圆盘上的, 弦长为 ρ_0 的等弦长曲线, 则 γ 的全曲率

$$J \geq 2\pi \cosh \rho_0/2$$

且等号成立, 等且仅当 γ 是测地圆.

利用上述结论并与非欧平面上等宽曲线的部分性质相结合可以得到下述两个定理.

⑦球面上既等宽又等弦长的曲线必为测地圆

⑧Poincaré圆盘上既等宽又等弦长的曲线必为测地圆

注: 若没有特别说明, 本文中讨论的等弦长曲线均视作连续且光滑的简单闭曲线.

2. 预备知识

本节介绍球面几何及双曲几何的一些基本知识及球面和Poincaré圆盘上等弦长曲线的表示方法.

2.1 球面

在空间直角坐标系 (x, y, z) 下, 单位球面 S^2 可表示为

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

S^2 上的测地线对应于 S^2 上的大圆. 设 $P, Q \in S^2$, 则 P, Q 间的球面距离 $d(P, Q)$ 是连接 P, Q 的大圆劣弧的长度. 在球面坐标系下, 单位球面 S^2 可表示为

$$X(\theta, \varphi) = \cos \varphi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$$

即

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \sin \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = \sin \varphi \sin \theta & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

特别的, 上半球面上的点 P 到北极 N 的球面距离就是 P 的余纬度 θ . 我们规定, 若已知单位球 S^2 的一个极点 N 或 S , 那么以赤道为界限, 我们称 N 所在的部分为 S^2 的上半部分, 记作 S^2_+ ; S 所在的部分为 S^2 的下半部分, 记作 S^2_- .

设 $\gamma \subset S^2$ 是单位球面 S^2 上包含北极点 N 的简单闭曲线. 若包含 z 轴的任何平面与 γ 仅交于两点, 则利用球面坐标 γ 可表示为

$$\theta = \theta(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

若 γ 是以北极 $N(0, 0, 1)$ 为等弦点的等弦长曲线, 则有

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) = \text{Constant}, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

2.2 Poincaré圆盘

对于双曲几何, 我们采用Poincaré圆盘模型. 设 $C \supseteq D = \{z = x + yi | |z| < 1\}$ 是复平面上的单位圆盘. 其上赋予Poincaré度量

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \frac{4(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{(1 - r^2)^2}$$

我们称赋予了Poincaré度量的单位圆盘 (D, ds^2) 为Poincaré圆盘.

Poincaré圆盘上的测地线是和单位圆周正交的圆弧. 特别地, 过 $z = 0$ 的测地线就是圆盘的直径.

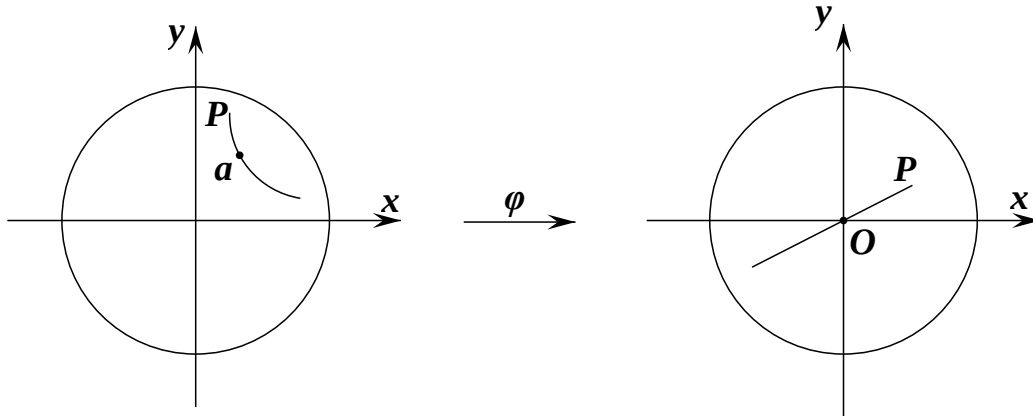
任给 $a \in D$, $\theta \in R$. 由于变换

于是 (ρ, φ) 即为Poincaré圆盘 D 的测地极坐标系. 由此可知Poincaré度量 (Poincaré 圆盘的第一基本形式) 可表示为

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2$$

现设 γ 是Poincaré圆盘上以坐标原点为等弦点的等弦长曲线, 则 $\rho(\varphi) = \ln \frac{1+r(\varphi)}{1-r(\varphi)}$ 满足

$$\rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) = \text{Constant}$$



2.3 等宽曲线

我们引入等宽曲线的概念. 设 (N^2, g) 是单连通常曲率曲面 (欧氏平面或非欧平面), $\gamma \subset N^2$ 是光滑的简单闭曲线, $\mathbf{n}$ 是 γ 的单位外法向量, $d > 0$ 是 γ 的直径 (当 N^2 是单位球面 S^2 时, 要求 $d < \pi$). 记

$$\gamma_{-d} = \{\exp_p(-d\mathbf{n}) \mid p \in \gamma\}$$

其中 $\exp_p: T_p N^2 \rightarrow N^2$ 是 p 处的指数映射. 若 $\gamma_{-d} = \gamma$, 则称 γ 是宽度为 d 的等宽曲线. 我们不难得到以下定理.

定理 2.3.1 设 γ 是宽度为 d 的等宽曲线, p, q 为 γ 上两点. 若过 p, q 的测地线在 p, q 两处均与 γ 正交, 则 $d(p, q) = d$.

事实上, 对于欧氏平面上的等宽曲线, 我们有另外一种定义. 设 Ω 是 R^2 中的一个凸集, P 是 Ω 的边界 γ 上的一点. 直线 l 称为 Ω 在 P 处的支撑曲线 (Supporting line), 如果 $P \in l$ 且 Ω 位于 l 的一侧. 注意, 如果 γ 在 P 处有切线, 则在 P 处的支撑直线就是过 P 的切线.

设 Ω 是 R^2 中的一个凸集, 取定一个方向 $\mathbf{n}(\varphi)$, 则 Ω 恰好有两条支撑直线 l_1 和 l_2 与 $\mathbf{n}(\varphi)$ 垂直, l_1 和 l_2 间的距离称为 Ω 沿 $\mathbf{n}(\varphi)$ 方向的宽度, 记作 $w(\varphi)$. 如果 $w(\varphi)$ 在 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 上恒为常数, 则称 γ 是等宽曲线.

可以证明, 此定义与之前介绍的定义等价, 详情请参见^[9]中的定理 4.2.

3. 欧氏平面上的等弦长曲线

3.1 在曲率限制条件下等弦长曲线为圆的情况

我们先证明下述定理.

定理 3.1.1 设 $\gamma \subset R^2$ 是相对曲率 $k_r \geq 1$ 的简单闭曲线, 则

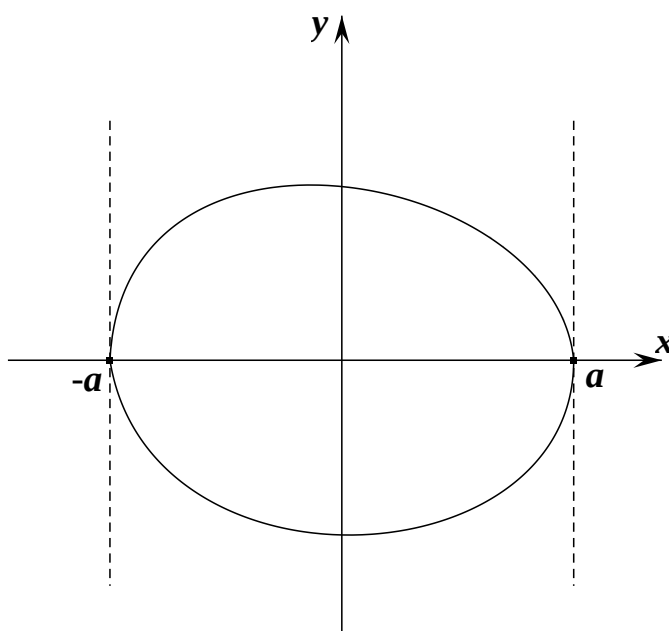
i. γ 的直径小于等于 2;

ii. 若 γ 的直径为 2, 则 γ 必为单位圆周.

注: 由于直径是最长的弦, 因此上述定理表明相对曲率 $k_r \geq 1$ 的简单闭曲线的所有弦的长度均小于等于 2, 且若有一条长度为 2 的弦则此曲线必为单位圆.

证明:

i. 设 γ 的直径为 $2a$, 以直径所在的直线为 x 轴, 直径的中点为坐标原点建立平面直角坐标系



由于 γ 是凸的, 故平行于 y 轴的直线与 γ 的交点数小于等于 2, 设 γ 位于上半平面和下半平面的部分分别是函数

$$y = y_1(x) \text{ 和 } y = y_2(x), \quad x \in (-a, a)$$

的图像, 则由 γ 的曲率大于等于 1 知

$$\frac{-y_1''}{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 1$$

令 $y_0(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, 则

$$\frac{-y_0''}{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}$$

假设 $a > 1$, 则

$$\frac{1}{a} < 1$$

从而

$$\frac{-y_1''}{(1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 1 > \frac{1}{a}$$

即

$$y_1'' + \frac{1}{a}(1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}} < 0$$

而

$$y_0'' + \frac{1}{a}(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

令 $v = y_0 - y_1$, 则

$$v'' + \frac{1}{a} \left[(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}} - (1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}} \right] > 0$$

由Lagrange中值定理可知

$$v'' + \frac{1}{a} \left[(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}} - (1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}} \right] = v'' + \left(\frac{3}{a} \xi \sqrt{1+\xi^2} \right) v' > 0$$

其中

$$\xi = (1-\alpha)y_0' + \alpha y_1', \quad \alpha \in (0, 1)$$

若 v 在 $[-a, a]$ 的内部取到极大值, 即存在 $x_0 \in (-a, a)$, 使得 $v(x_0) = \max_{x \in [-a, a]} v(x) \geq 0$, 则

$$v''(x_0) \leq 0, \quad v'(x_0) = 0$$

和上式矛盾, 故 $\forall x \in (-a, a)$, 有

$$v(x) < 0$$

即

$$y_0(x) < y_1(x), \quad \forall x \in (-a, a)$$

类似的也可以证明

$$y_2(x) < -\sqrt{a^2 - x^2}$$

故曲线 γ 所围的区域真包含半径为 a 的圆, 从而由Crofton公式知, 曲线 γ 的周长

$$L \geq 2\pi a > 2\pi$$

另一方面, 由于

$$\frac{d\theta}{ds} = k_r \geq 1$$

可知

$$d\theta = k_r ds \geq ds$$

即

$$\int_0^{2\pi} d\theta \geq \int_0^L ds$$

即

$$2\pi \geq L$$

其中 $h(x) \leq 0$. 若 g, h 在含于 (c, d) 内的任何闭子区间上有界, 且 h 在区间 (c, d) 内某点 x_0 处取到非负极大值 M , 则 $u(x) \equiv M, \forall x \in (c, d)$.

回到对 ii 的证明, 已知 γ 的直径为 2, 仿照 i 的证明, 以直径所在的直线为 x 轴, 直径的中点为坐标原点建立平面直角坐标系. 设 γ 位于上半平面的部分是函数 $y = y_1(x)$, $x \in (-1, 1)$ 的图像, 则 $y_1(x)$ 满足

$$\frac{-y_1''}{(1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 1, \forall x \in (-1, 1)$$

于是

$$y_1'' + (1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}} \leq 0$$

令 $y_0(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$, 有

$$\frac{-y_0''}{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

可得

$$y_0'' + (1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

令 $v = y_0 - y_1$, 则

$$v'' + \left[(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}} - (1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}} \right] \geq 0$$

由Lagrange中值定理可知

$$v'' + \left[(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}} - (1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}} \right] = v'' + (3\xi\sqrt{1+\xi^2})v' \geq 0$$

其中

$$\xi = (1-\alpha)y_0' + \alpha y_1', \alpha \in (0, 1)$$

根据最大值原理可知, 要么 $v \equiv 0$, 要么 $v(x) < 0, \forall x \in (-1, 1)$. 类似的, 对于 γ 位于下半平面的部分 $y = y_2(x)$, 我们也可得到 $y_2(x) + \sqrt{1-x^2} \equiv 0$ 或 $y_2(x) + \sqrt{1-x^2} < 0$. 因此若 γ 不与单位圆重合, 则 γ 所围的区域包含于单位圆, 从而由Crofton公式知 γ 的长度大于 2π . 而由 γ 的曲率大于等于 1 知 γ 的长度小于等于 2π , 矛盾. 故 γ 是单位圆. ■

接下来我们考虑等宽曲线.

定理 3.1.2 设 $\gamma \subset R^2$ 为一等宽曲线, O 是 γ 所围区域内的一点, 若过 O 的所有弦的长度均为 d , 则 γ 必为半径为 $d/2$ 的圆.

证明: 以 O 为极点, 任意一条过点 O 的直线为极轴建立极坐标系. 设 γ 在该极坐标系内的解析式为一周期为 2π 的光滑非负函数 $r(\theta)$, 有

$$\begin{cases} x'(\theta) = r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta \\ y'(\theta) = r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{y(\theta_0)}{x(\theta_0)} \cdot \frac{y'(\theta_0)}{x'(\theta_0)} &= \tan \theta_0 (-\cot \theta_0) = -1 \\ \frac{y(\theta_0 + \pi)}{x(\theta_0 + \pi)} \cdot \frac{y'(\theta_0 + \pi)}{x'(\theta_0 + \pi)} &= \tan(\theta_0 + \pi) [-\cot(\theta_0 + \pi)] = -1 \end{aligned}$$

因此我们可以知道, 所有过 O 的弦中必有一条弦和曲线 γ 垂直. 因此 d 是曲线 γ 沿某方向的宽度.

对 γ 上任意一点 P 引正向切线, 设其与极轴正方向的交角为 φ . 从极点 O 引此切线的垂线, 设其距离为 p , 则 p 是 φ 的函数 $p(\varphi)$. 由于, 则 γ 是等宽曲线, 故

$$p(\varphi) + p(\varphi + \pi) = d$$

由Cauchy公式可知 γ 的周长

$$L = \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi = \int_0^\pi [p(\varphi) + p(\varphi + \pi)] d\varphi = \pi d$$

另一方面

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta \geq \int_0^{2\pi} r(\theta) d\theta = \int_0^\pi [r(\theta) + r(\theta + \pi)] d\theta = \pi d$$

即

$$L \geq \pi d$$

当且仅当 $r'(\theta) \equiv 0$ 时取等, 即当且仅当 γ 为圆时取等. 由于

$$L = \pi d$$

因此 γ 必为半径为 $d/2$ 的圆. ■

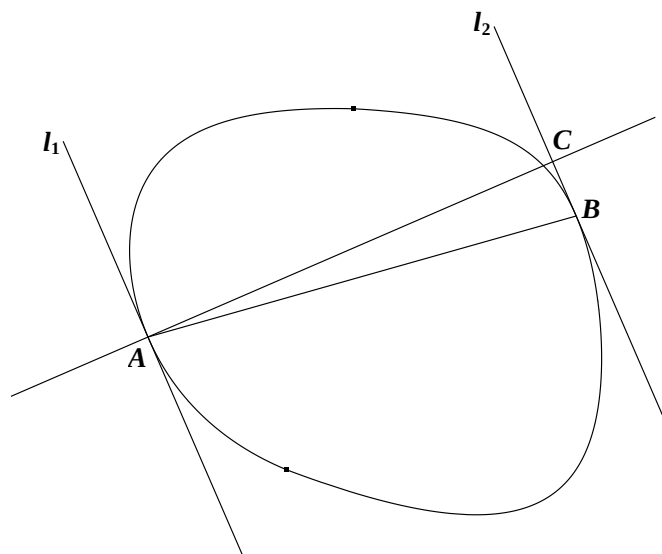
定理 3.1.3 设 $\gamma \subset R^2$ 是曲率大于等于1的简单闭曲线, O 是 γ 所围区域内的一点, 若过 O 的所有弦的长度均为2, 则 γ 必为单位圆.

证明: 若 γ 的曲率大于等于1, 则由定理1可知 γ 的直径小于等于2, 由于过 O 的所有弦的长度均为2, 故过 O 的所有弦均为直径. 即 γ 为宽度 $d = 2$ 的等宽曲线.

由于我们已经推得 γ 为宽度 $d = 2$ 的等宽曲线, 而过 O 的所有弦的长度均为2, 因此由定理 3.1.2 可知, γ 必为半径为1的圆, 即 γ 必为单位圆. ■

定理 3.1.4 设 $\gamma \subset R^2$ 是曲率大于等于1的简单闭曲线, 若 γ 为宽度为2的等宽曲线, 则 γ 必为单位圆.

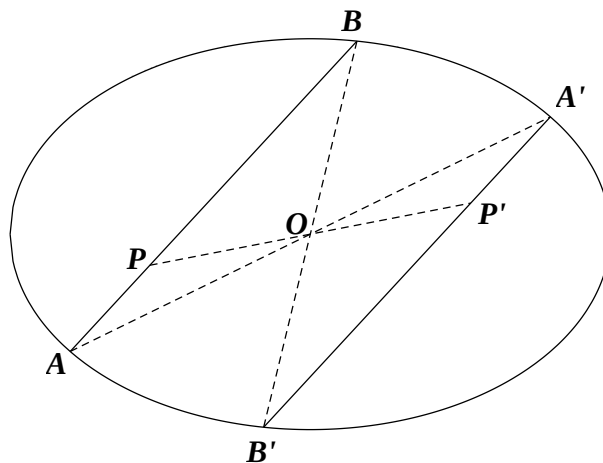
证明: 由定理



3.2 在对称限制条件下等弦长曲线为圆的情况

著名的等弦点问题 (the Equichordal Point Problem) 可以叙述为: 在欧氏平面内, 一条闭曲线是否可以有两个等弦点? 这一问题由Fujiwara于1916年提出, 并由Rychlik于1996年彻底解决, 证明了在欧氏平面内, 一个闭曲线不可以有两个等弦点. 我们可以根据这个定理证明以下结论.

定理 3.2.1 若平面曲线 $\gamma \subseteq R^2$ 是中心对称的等弦长曲线, 则 γ 必为圆.
证明:



设 P 为 γ 的等弦点, O 为 γ 的对称中心. AB 为任意一条过 P 的弦. 假设 P 与 O 不重合, 分别作 A 、 B 和 P 关于 O 的对称点 A' 、 B' 和 P' . 由于 γ 是中心对称图形, 故 $|BO| = |B'O|$, $|AO| = |A'O|$, 且 A' 、 B' 均位于 γ 上. 又因为 $\angle AOB = \angle A'OB'$, 所以 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$, 从而 $|A'B'| = |AB| = \text{constant}$, 且 $\angle A = \angle OA'B'$. 同理可得 $\triangle AOP \cong \triangle A'OP'$, 可知 $\angle A = \angle OA'P'$, 即 $\angle OA'B' = \angle OA'P'$, 故 A' 、 P' 、 B' 三点共线, 故弦 $A'B'$ 恒过 P' , 因此 P' 亦为 γ 的等弦点. 由于在欧氏平面内, 一个闭凸曲线不可以有两个等弦点, 因此假设不成立, P 必与 O 重合, 因此 $|AP| = |BP| = |AB|/2 = \text{constant}$, 故 γ 必为圆. ■

注: 本章中的极坐标系均指二维欧氏平面上的欧氏极坐标系.

4. 非欧平面上等弦长曲线

4.1 测地圆情形

记 T_n 为阶数小于等于 n 的实系数三角多项式的全体所构成的线性空间

$$T_n = \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

引理 4.1.1 若函数 $f(x) \in T_n$ 满足

$$Af^2(x) + Bf^2(x + \pi) + Cf(x)f(x + \pi) + Df(x) + Ef(x + \pi) = 1$$

其中 A, B, C, D, E 均为常数且 A, B, C 不全为0, 则

$$f(x) \equiv \text{Constant}$$

证明: 考虑由三角多项式构成的函数系

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

当 $f(x) = F_1(x)$ 时, 有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

$$f(x + \pi) = \frac{a_0}{2} - a_1 \cos x - b_1 \sin x$$

代入条件可知

$$\begin{aligned} & A \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x \right)^2 + B \left(\frac{a_0}{2} - a_1 \cos x - b_1 \sin x \right)^2 \\ & + C \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x \right) \left(\frac{a_0}{2} - a_1 \cos x - b_1 \sin x \right) \\ & + D \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x \right) + E \left(\frac{a_0}{2} - a_1 \cos x - b_1 \sin x \right) \\ & = \left(\frac{A+B+C}{4} a_0 + \frac{D+E}{2} \right) a_0 + \frac{A+B-C}{2} (a_1^2 + b_1^2) \\ & + [(A-B)a_0 + D-E] a_1 \cos x + \frac{A+B-C}{2} (a_1^2 - b_1^2) \cos 2x \\ & + [(A-B)a_0 + D-E] b_1 \sin x + (A+B-C) a_1 b_1 \sin 2x = 1 \end{aligned}$$

由于等式右侧为常量1, 因此左侧也应为常量1, 首先对比阶数为2的项的系数, 可知

$$\begin{cases} a_1 b_1 = 0 \\ a_1^2 - b_1^2 = 0 \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

因此

$$\left(\frac{A+B+C}{4} a_0 + \frac{D+E}{2} \right) a_0 = 1$$

可得

$$a_0 = \frac{\sqrt{4(A+B+C) + (D+E)^2} - D - E}{A+B+C}$$

故

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x \equiv \frac{\sqrt{4(A+B+C) + (D+E)^2} - D - E}{2(A+B+C)}$$

引入两个函数系 $p_n(x)$ 和 $q_n(x)$

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (a_{2k} \cos 2kx + b_{2k} \sin 2kx)$$

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} [a_{2k-1} \cos(2k-1)x + b_{2k-1} \sin(2k-1)x]$$

① 假设当 $n = 2m - 1$ ($m \in N^*$) 时引理成立, 则当 $n = 2m$ ($m \in N^*$) 时

$$f(x) = F_{2m}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m-1}(x)$$

$$f(x + \pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2m} [(-1)^k a_k \cos kx + (-1)^k b_k \sin kx] = \frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m-1}(x)$$

代入条件可知

$$\begin{aligned} & A \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m-1}(x) \right]^2 + B \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m-1}(x) \right]^2 \\ & + C \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m-1}(x) \right] \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m-1}(x) \right] \\ & + D \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m-1}(x) \right] + E \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m-1}(x) \right] \\ & = \left(\frac{A+B+C}{4} a_0 + \frac{D+E}{2} \right) a_0 + [(A+B)a_0 + D+E] p_{2m}(x) \\ & + (A+B+C) p_{2m}^2(x) + [(A-B)a_0 + D-E] q_{2m-1}(x) \\ & + (A+B-C) q_{2m-1}^2(x) + 2(A-B) p_{2m}(x) q_{2m-1}(x) = 1 \end{aligned}$$

由于等式右侧为常量1, 故左侧也应为常量1. 由于 $n = 2m$, 故等式左侧中最大阶数项均位于 $p_{2m}^2(x)$ 中, 因此我们首先考虑 $p_{2m}^2(x)$, 有

$$\begin{aligned} p_{2m}^2(x) &= [a_{2m} \cos 2mx + b_{2m} \sin 2mx + p_{2m-2}(x)]^2 \\ &= (a_{2m} \cos 2mx + b_{2m} \sin 2mx)^2 + 2(a_{2m} \cos 2mx + b_{2m} \sin 2mx) p_{2m-2}(x) \\ &\quad + p_{2m-2}^2(x) \end{aligned}$$

进一步得到包含所有最大阶数项的部分 $(a_{2m} \cos 2mx + b_{2m} \sin 2mx)^2$, 有

$$(a_{2m} \cos 2mx + b_{2m} \sin 2mx)^2 = \frac{1}{2} (a_{2m}^2 - b_{2m}^2) \cos 4mx + a_{2m} b_{2m} \sin 4mx</$$

立, 则 $n = 2m$ ($m \in N^*$) 时引理亦成立.

② 假设当 $n = 2m$ ($m \in N^*$) 时引理成立, 则当 $n = 2m + 1$ ($m \in N^*$) 时

$$f(x) = F_{2m+1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2m+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m+1}(x)$$

$$f(x + \pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2m+1} [(-1)^k a_k \cos kx + (-1)^k b_k \sin kx] = \frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m+1}(x)$$

代入条件可知

$$\begin{aligned} & A \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m+1}(x) \right]^2 + B \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m+1}(x) \right]^2 \\ & + C \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m+1}(x) \right] \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m+1}(x) \right] \\ & + D \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) + q_{2m+1}(x) \right] + E \left[\frac{a_0}{2} + p_{2m}(x) - q_{2m+1}(x) \right] \\ & = \left(\frac{A+B+C}{4} a_0 + \frac{D+E}{2} \right) a_0 + [(A+B)a_0 + D+E] p_{2m}(x) \\ & + (A+B+C) p_{2m}^2(x) + [(A-B)a_0 + D-E] q_{2m+1}(x) \\ & + (A+B-C) q_{2m+1}^2(x) + 2(A-B) p_{2m}(x) q_{2m+1}(x) = 1 \end{aligned}$$

由于等式右侧为常量1, 故左侧也应为常量1. 由于 $n = 2m + 1$, 故等式左侧中最大阶数项均位于 $q_{2m+1}^2(x)$ 中, 因此我们首先考虑 $q_{2m+1}^2(x)$, 有

$$\begin{aligned} q_{2m+1}^2(x) &= [a_{2m+1} \cos(2m+1)x + b_{2m+1} \sin(2m+1)x + q_{2m-1}(x)]^2 \\ &= [a_{2m+1} \cos(2m+1)x + b_{2m+1} \sin(2m+1)x]^2 \\ &\quad + 2[a_{2m+1} \cos(2m+1)x + b_{2m+1} \sin(2m+1)x] q_{2m-1}(x) + q_{2m-1}^2(x) \end{aligned}$$

进一步得到包含所有最大阶数项的部分 $[a_{2m+1} \cos(2m+1)x + b_{2m+1} \sin(2m+1)x]^2$, 有

$$\begin{aligned} & [a_{2m+1} \cos(2m+1)x + b_{2m+1} \sin(2m+1)x]^2 \\ &= \frac{1}{2} (a_{2m+1}^2 - b_{2m+1}^2) \cos(4m+2)x + a_{2m+1} b_{2m+1} \sin(4m+2)x \end{aligned}$$

可知

$$\begin{cases} a_{2m+1} b_{2m+1} = 0 \\ a_{2m+1}^2 - b_{2m+1}^2 = 0 \end{cases}$$

从而

$$a_{2m+1} = b_{2m+1} = 0$$

于是 $f(x) = F_{2m+1}(x)$ 完全等价于 $f(x) = F_{2m}(x)$,

$$\arcsin r(\varphi) + \arcsin r(\varphi + \pi) = \theta_0$$

于是有

$$\begin{aligned} r(\varphi)\sqrt{1-r^2(\varphi+\pi)} + r(\varphi+\pi)\sqrt{1-r^2(\varphi)} &= \sin \theta_0 \\ \sqrt{1-r^2(\varphi)}\sqrt{1-r^2(\varphi+\pi)} - r(\varphi)r(\varphi+\pi) &= \cos \theta_0 \end{aligned}$$

结合以上两式可得

$$r^2(\varphi) + r^2(\varphi + \pi) + 2r(\varphi)r(\varphi + \pi) \cos \theta_0 = \sin^2 \theta_0$$

所以

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_0} r^2(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta_0} r^2(\varphi + \pi) + \frac{2 \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} r(\varphi)r(\varphi + \pi) = 1$$

由于 $r(\varphi) \in T_n$, 由引理 4.1.1 可知

$$r(\varphi) \equiv \frac{\sqrt{4\left(\frac{2+2\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}\right)}}{2\left(\frac{2+2\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2+2\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta_0}{4\left(\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)}} = \frac{\sin\theta_0}{2\cos\frac{\theta_0}{2}}, \quad \theta_0 \neq \pi$$

特殊的, 当 $\theta_0 = \pi$ 时, 有

$$r(\varphi) \equiv \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} \frac{\sin\theta_0}{2\cos\frac{\theta_0}{2}} = \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} \frac{\cos\theta_0}{-\sin\frac{\theta_0}{2}} = 1$$

因此若 $r(\varphi) \in T_n$, 则 γ 为测地圆. ■

定理 4.1.2 设 $\gamma: z = r(\varphi)e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ 是 Poincaré 圆盘上以坐标原点为等弦点且弦长为 ρ_0 的等弦长曲线. 若 $r(\varphi) \in T_n$, 则 γ 为测地圆.

证明: 由于

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) &= \ln \frac{1+r(\varphi)}{1-r(\varphi)} + \ln \frac{1+r(\varphi+\pi)}{1-r(\varphi+\pi)} = \ln \frac{1+r(\varphi)+r(\varphi+\pi)+r(\varphi)r(\varphi+\pi)}{1-r(\varphi)-r(\varphi+\pi)+r(\varphi)r(\varphi+\pi)} \\ &= \rho_0 \end{aligned}$$

故

$$\frac{1+r(\varphi)+r(\varphi+\pi)+r(\varphi)r(\varphi+\pi)}{1-r(\varphi)-r(\varphi+\pi)+r(\varphi)r(\varphi+\pi)} = e^{\rho_0}$$

经化简可得

$$\frac{r(\varphi)+r(\varphi+\pi)}{1+r(\varphi)r(\varphi+\pi)} = \frac{e^{\frac{\rho_0}{2}} - e^{-\frac{\rho_0}{2}}}{e^{\frac{\rho_0}{2}} + e^{-\frac$$

$$r(\varphi) \equiv \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{e^{\frac{\rho_0}{2}} - e^{-\frac{\rho_0}{2}}}{e^{\frac{\rho_0}{2}} + e^{-\frac{\rho_0}{2}}} \right)^2}}{\left(\frac{e^{\frac{\rho_0}{2}} - e^{-\frac{\rho_0}{2}}}{e^{\frac{\rho_0}{2}} + e^{-\frac{\rho_0}{2}}} \right)} = \frac{e^{\frac{\rho_0}{4}} - e^{-\frac{\rho_0}{4}}}{e^{\frac{\rho_0}{4}} + e^{-\frac{\rho_0}{4}}} = \tanh \frac{\rho_0}{4}$$

即

$$\rho(\varphi) \equiv \frac{\rho_0}{2}$$

因此若 $r(\varphi) \in T_n$, 则 γ 为测地圆. ■

4.2 非测地圆情形

由 4.1 中的定理, 我们自然会问: 球面 S^2 或 Poincaré 圆盘上是否存在非测地圆的等弦长曲线? 下面的例子表明, 在球面和 Poincaré 圆盘上确实存在非测地圆的等弦长曲线.

例 4.2.1 (球面上非测地圆的等弦长曲线)

由 2.1 可知, 在球面坐标系下, 以北极点 N 为等弦点的等弦长曲线可表示为

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) = \text{Constant}$$

由于该方程的解不唯一, 因此有理由期待球面 S^2 上有许多非测地圆的等弦长曲线. 我们将用以下例子来说明这一猜测是正确的. 设

$$\gamma_\phi = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0 \text{ 且 } 2 \cos^2 \phi x^2 + 2(\cos \phi y - \sin \phi z)^2 = 1\}$$

记

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \sin \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cos^2 \phi \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \phi \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta \\ &\quad - 4 \sin \phi \cos \phi \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \sin 2\phi \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ = 2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \sin 2\phi \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned}$$

有

$$\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \sin 2\phi \sin \varphi \sin 2\theta$$

经化简可得

$$\cot 2\$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

因此 γ_ϕ 为一族球面上的等弦长曲线. 我们现在对 γ_ϕ 的挠率进行计算, 以说明其不是 S^2 上的测地圆. 求解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2 \cos^2 \phi x^2 + 2(\cos \phi y - \sin \phi z)^2 = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{-4z^4 + 4z^2 - \cos^2 2\phi}}{2 \sin 2\phi z} \\ y_1 = \frac{1 - 2z^2}{2 \tan 2\phi z} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{-4z^4 + 4z^2 - \cos^2 2\phi}}{2 \sin 2\phi z} \\ y_2 = \frac{1 - 2z^2}{2 \tan 2\phi z} \end{cases}$$

记

$$\begin{aligned} \gamma_{+\phi}(z) &= \frac{\sqrt{-4z^4 + 4z^2 - \cos^2 2\phi}}{2 \sin 2\phi z} \mathbf{i} + \frac{1 - 2z^2}{2 \tan 2\phi z} \mathbf{j} + z \mathbf{k} \\ \gamma_{-\phi}(z) &= -\frac{\sqrt{-4z^4 + 4z^2 - \cos^2 2\phi}}{2 \sin 2\phi z} \mathbf{i} + \frac{1 - 2z^2}{2 \tan 2\phi z} \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{aligned}$$

经计算可知分支 $\gamma_{+\phi}(z)$ 的挠率

$$\begin{aligned} \tau_+(z) &= \frac{[\gamma_{+\phi}'(z) \times \gamma_{+\phi}''(z)] \cdot \gamma_{+\phi}'''(z)}{\|\gamma_{+\phi}'(z) \times \gamma_{+\phi}''(z)\|^2} \\ &= \frac{24 \cos 2\phi z^3 (4z^2 - \cos^2 2\phi) \sqrt{-4z^4 + 4z^2 - \cos^2 2\phi}}{\cos^6 2\phi + 12 \cos^4 2\phi z^4 + 64 \cos^2 2\phi z^6 + 48 \cos^2 2\phi z^8 + 64 z^{12}} \end{aligned}$$

分支 $\gamma_{-\phi}(z)$ 的挠率

$$\begin{aligned} \tau_-(z) &= \frac{[\gamma_{-\phi}'(z) \times \gamma_{-\phi}''(z)] \cdot \gamma_{-\phi}'''(z)}{\|\gamma_{-\phi}'(z) \times \gamma_{-\phi}''(z)\|^2} \\ &= -\frac{24 \cos 2\phi z^3 (4z^2 - \cos^2 2\phi) \sqrt{-4z^4 + 4z^2 - \cos^2 2\phi}}{\cos^6 2\phi + 12 \cos^4 2\phi z^4 + 64 \cos^2 2\phi z^6 + 48 \cos^2 2\phi z^8 + 64 z^{12}} \end{aligned}$$

可知 γ_ϕ 为挠率不为 0 的空间曲线, 即 γ_ϕ 为 S^2 上非测地圆的等弦长曲线.

例 4.2.2 (Poincaré圆盘上非测地圆的等弦长曲线)

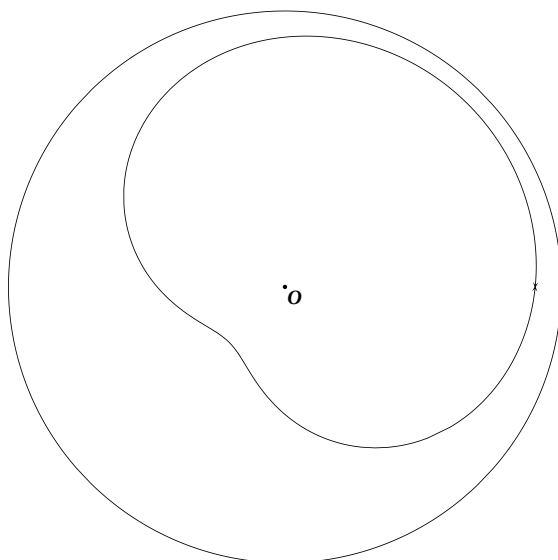
与球面情形相似, 由 2.2 可知, 在Poincaré圆盘上的测地极坐标 (ρ, φ) 下以坐标原点为等弦点的等弦长曲线可表示为

$$\rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) = \text{Constant}$$

由于该方程的解不唯一, 因此我们同样有理由期待Poincaré圆盘上有许多非测地圆的等弦长曲线. 我们将用以下例子来说明这一猜测是正确的. 设Poincaré圆盘上的曲线

$$\begin{aligned}\rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) &= \ln \frac{1+r(\varphi)}{1-r(\varphi)} + \ln \frac{1+r(\varphi+\pi)}{1-r(\varphi+\pi)} \\ &= 2 \operatorname{arctanh} \left(\tanh \frac{2 + \cos \varphi + \sin \varphi}{2} \right) + 2 \operatorname{arctanh} \left(\tanh \frac{2 - \cos \varphi - \sin \varphi}{2} \right) \\ &= 4\end{aligned}$$

因此 γ 为Poincaré圆盘上非测地圆的等弦长曲线. 其图像如下图



4.3 非欧平面上等弦长曲线的几何量估计

在这部分, 我们要对非欧平面上等弦长曲线的若干几何量给出估计.

4.3.1 面积的估计

由前人的工作可以知道, 当一个欧氏平面上的等弦长曲线为圆时, 其围成的面积取得最小值, 当其无限接近于一个圆心为等弦点的半圆时, 面积趋于最大. 实际上欧氏平面内等弦长曲线的面积极值问题可以看做是Kakeya问题的一类特殊情况. 在本节我们将对非欧平面上等弦长曲线的面积极值问题进行探讨.

我们有以下两个定理.

定理 4.3.1 设 γ 是一条落在单位球面上半部分 S_+^2 上以北极为等弦点, 弦长度 θ_0 的等弦长曲线. 则 γ 所围面积 A 满足

$$2\pi \left(1 - \cos \frac{\theta_0}{2} \right) \leq A < \pi (1 - \cos \theta_0)$$

且上述估计是最优的. 特别的, A 取到最小值当且仅当 γ 为测地圆.

证明: 由前文可知, 单位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上的等弦长曲线 γ 在 xOy 面上的投影 γ' , 在欧氏极坐标系 (r, φ) 中可表示为 $r(\varphi) = \sin \theta(\varphi)$. 设 D 为 γ' 所包围的区域.

对于 S_+^2 , 有

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

于是 γ 在 S^2 上所围区域的面积

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin \theta(\varphi)} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^{\sin \theta(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} [1 - \cos \theta(\varphi)] d\varphi \\ &= 2\pi - \int_0^\pi [\cos \theta(\varphi) + \cos \theta(\varphi + \pi)] d\varphi \end{aligned}$$

由于 γ 落在 S^2 的上半部分, 故

$$\theta(\varphi) \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

可知

$$\begin{aligned} \cos \theta(\varphi) + \cos \theta(\varphi + \pi) &= 2 \cos \frac{\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi)}{2} \cos \frac{\theta(\varphi) - \theta(\varphi + \pi)}{2} \\ &\leq 2 \cos \frac{\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi)}{2} = 2 \cos \frac{\theta_0}{2} \end{aligned}$$

当且仅当

$$\theta(\varphi) = \theta(\varphi + \pi) = \frac{\theta_0}{2}$$

时, 等号成立. 可知

$$A \geq 2\pi \left(1 - \cos \frac{\theta_0}{2} \right)$$

当且仅当 γ 为半径是 $\theta_0/2$ 的测地圆时等号成立. 另一方面, 注意到

$$\begin{aligned} \cos \theta(\varphi) + \cos \theta(\varphi + \pi) &= 2 \cos \frac{\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi)}{2} \cos \frac{\theta(\varphi) - \theta(\varphi + \pi)}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{2\theta(\varphi) - \theta_0}{2} > 2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2} = 1 + \cos \theta_0 \end{aligned}$$

可知

$$A < \pi(1 - \cos \theta_0)$$

考虑到 $1 - \cos \theta_0$ 在 $(0, \pi)$ 上恒大于 $2(1 - \cos \theta_0/2)$, 且当 γ 无限接近于一个圆心为等弦点的半测地圆时面积趋于 $(1 - \cos \theta_0)\pi$. 故 γ 所围面积 A 满足

$$2\pi \left(1 - \cos \frac{\theta_0}{2} \right) \leq A < \pi(1 - \cos \theta_0)$$

且上述估计是最优的.

定理 4.3.2 设 γ 是一条Poincaré圆盘上的, 弦长为 ρ_0 的等弦长曲线. 则 γ 所围面积 A 满足

$$2\pi \left(\$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \sinh \rho d\rho = \int_0^{2\pi} (\cosh \rho|_0^{\rho(\varphi)}) d\varphi = \int_0^{2\pi} [\cosh \rho(\varphi) - 1] d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} [\cosh \rho(\varphi) + \cosh \rho(\varphi + \pi)] d\varphi - 2\pi \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \cosh \rho(\varphi) + \cosh \rho(\varphi + \pi) &= 2 \cosh \frac{\rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi)}{2} \cosh \frac{\rho(\varphi) - \rho(\varphi + \pi)}{2} \\ &\geq 2 \cosh \frac{\rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi)}{2} = 2 \cosh \frac{\rho_0}{2} \end{aligned}$$

当且仅当

$$\rho(\varphi) = \rho(\varphi + \pi) = \frac{\rho_0}{2}$$

时, 等号成立. 可知

$$A \geq 2\pi \left(\cosh \frac{\rho_0}{2} - 1 \right)$$

当且仅当 γ 为半径是 s_0 的测地圆时等号成立. 另一方面, 注意到

$$\begin{aligned} \cosh \rho(\varphi) + \cosh \rho(\varphi + \pi) &= 2 \cosh \frac{\rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi)}{2} \cosh \frac{\rho(\varphi) - \rho(\varphi + \pi)}{2} \\ &= 2 \cosh \frac{\rho_0}{2} \cosh \frac{2\rho(\varphi) - \rho_0}{2} < 2 \cosh^2 \frac{\rho_0}{2} = 1 + \cosh \rho_0 \end{aligned}$$

可知

$$A < \pi(\cosh \rho_0 - 1)$$

考虑到 $\cosh \rho_0 - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒大于 $2(\cosh \rho_0/2 - 1)$, 且当 γ 无限接近于一个圆心为等弦点的半测地圆时面积趋于 $\pi(\cosh \rho_0 - 1)$. 故 γ 所围面积 A 满足

$$2\pi \left(\cosh \frac{\rho_0}{2} - 1 \right) \leq A < \pi(\cosh \rho_0 - 1)$$

且上述估计是最优的. ■

4.3.2 周长的估计

我们仅考虑等弦长曲线周长的最小值问题.

定理 4.3.3 设 γ 是单位球面上弦长为 θ_0 的等弦长曲线, 则 γ 的周长 L 满足

$$L \geq 2\pi \sin \frac{\theta_0}{2}$$

且等号成立当且仅当 γ 为半径是 $\theta_0/2$ 的为测地圆.

证明: 不妨设 γ 的等弦点为北极 $(0, 0, 1)$, 则等 γ 的参数方程可表示为

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \sin \theta$$

当且仅当 $\theta'(\varphi) = 0$, 即 $\theta(\varphi) = \text{Constant}$ 时取等. 另一方面, 不妨设

$$\psi(u) = \sin u + \sin(\theta_0 - u), \quad 0 < u < \theta_0$$

不难证明, 当且仅当 $u = \theta_0/2$ 时, $\psi(u)$ 取得最小值. 因此

$$L \geq \int_0^\pi \psi[\theta(\varphi)] d\varphi \geq \int_0^\pi \psi\left(\frac{\theta_0}{2}\right) d\varphi = 2\pi \sin \frac{\theta_0}{2}$$

当且仅当 γ 为半径是 $\theta_0/2$ 的测地圆时等号成立. ■

定理 4.3.4 设 γ 是Poincaré圆盘上弦长为 ρ_0 的等弦长曲线, 则 γ 的周长 L 满足

$$L \geq 2\pi \sinh \frac{\rho_0}{2}$$

且等号成立当且仅当 γ 为半径是 $\rho_0/2$ 的为测地圆.

证明: 由上文可知, Poincaré圆盘的第一基本形式为

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2$$

可知曲线 γ 的周长

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sinh^2 \rho(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\theta \geq \int_0^{2\pi} \sinh \rho(\varphi) d\varphi = \int_0^\pi [\sinh \rho(\varphi) + \sinh \rho(\varphi + \pi)] d\varphi \\ &= \int_0^\pi \{\sinh \rho(\varphi) + \sinh[\rho_0 - \rho(\varphi)]\} d\varphi \end{aligned}$$

当且仅当 $\rho'(\varphi) = 0$ 时取等, 即 $\rho(\varphi) = \text{Constant}$ 时取等. 另一方面, 不妨设

$$\psi(u) = \sinh u + \sinh(\rho_0 - u), \quad 0 < u < \rho_0$$

不难证明, 当且仅当 $u = \rho_0$ 时, $\psi(u)$ 取得最小值. 因此

$$L \geq \int_0^\pi \psi[\rho(\varphi)] d\varphi \geq \int_0^\pi \psi(\rho_0) d\varphi = 2\pi \sinh \frac{\rho_0}{2}$$

当且仅当 γ 为半径是 $\rho_0/2$ 的测地圆时等号成立. ■

4.3.3 全曲率的估计

利用Gauss – Bonnet公式, 我们可以给出等弦长曲线的全曲率估计.

定理 4.3.5 设 γ 是单位球面上以北极为等弦点且弦长为 θ_0 的等弦长曲线, 则 γ 的全曲率

$$J = \oint_{\gamma} k_g ds \leq 2\pi \cos \frac{\theta_0}{2}$$

$$J = 2\pi - A \leq 2\pi \cos \frac{\theta_0}{2}$$

若

$$J = 2\pi \cos \frac{\theta_0}{2}$$

则

$$A = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\theta_0}{2}\right)$$

根据定理 4.3.1 知此时 γ 是测地圆. ■

定理 4.3.6 设 γ 是一条 Poincaré 圆盘上的, 弦长为 ρ_0 的等弦长曲线, 则 γ 的全曲率

$$J = \oint_{\gamma} k_g ds \geq 2\pi \cosh \frac{\rho_0}{2}$$

且等号成立, 等且仅当 γ 是测地圆.

证明: 设 Ω 是 γ 所围区域. 由 Gauss – Bonnet 公式知

$$\oint_{\gamma} k_g ds - \iint_{\Omega} dA = 2\pi$$

即

$$J = \oint_{\gamma} k_g ds = 2\pi + \iint_{\Omega} dA = 2\pi + A$$

而根据定理 4.3.2 知

$$A \geq 2\pi \left(\cosh \frac{\rho_0}{2} - 1\right)$$

因此 γ 的全曲率满足

$$J = 2\pi + A \geq 2\pi \cosh \frac{\rho_0}{2}$$

若

$$J = 2\pi \cosh \frac{\rho_0}{2}$$

则

$$A = 2\pi \left(\cosh \frac{\rho_0}{2} - 1\right)$$

根据 4.3.2 知此时 γ 是测地圆. ■

4.4 非欧平面上在等宽条件限制下的等弦长曲线

作为前述估计的应用, 本节我们将刻画非欧平面上在等宽条件限制下的等弦长曲线.

定理 4.4.1 球面上既等宽又等弦长的曲线必为测地圆.

证明: 设 γ 是单位球面 S^2 上以北极 $N(0, 0, 1)$ 为等弦点的等弦长曲线, 其参数表示为

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \sin \theta(\varphi) \\ y = \sin \varphi \sin \theta(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \cos \theta(\varphi) \end{cases}$$

令

$$\mathbf{r}(\varphi) = \cos \varphi \sin \theta(\varphi) \mathbf{i} + \sin \varphi \sin \theta(\varphi) \mathbf{j} + \cos \theta(\varphi) \mathbf{k}$$

有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} &= [\cos \varphi \cos \theta(\varphi) \theta'(\varphi) - \sin \varphi \sin \theta(\varphi)] \mathbf{i} + [\sin \varphi \cos \theta(\varphi) \theta'(\varphi) + \cos \varphi \sin \theta(\varphi)] \mathbf{j} \\ &\quad - \sin \theta(\varphi) \theta'(\varphi) \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \cos \varphi \cos \theta(\varphi) \mathbf{i} + \sin \varphi \cos \theta(\varphi) \mathbf{j} - \sin \theta(\varphi) \mathbf{k} \end{aligned}$$

可知

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \theta'(\varphi)$$

由于

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) = \text{Constant}$$

两端求导可知

$$\theta'(\varphi) + \theta'(\varphi + \pi) = 0$$

由于 $\theta(0) = \theta(2\pi)$, 且 $\theta(\varphi)$ 光滑, 因此根据Rolle中值定理可知, 存在 $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$, 使得

$$\theta'(\varphi_0) = 0$$

从而

$$\theta'(\varphi_0 + \pi) = 0$$

因此 γ 过北极 N 的弦中至少有一条和 γ 正交. 结合定理 2.3.1 可知, 若 γ 等宽且宽度为 d , 则 γ 的弦长为 d . 由^[9]中的定理 5.1 可知, 对于宽度为 d 的等宽曲线, 其面积 A 满足

$$A \leq 2\pi \left(1 - \cos \frac{d}{2}\right)$$

而由定理 4.3.1 知

$$A \geq 2\pi \left(1 - \cos \frac{d}{2}\right)$$

因此

$$A = 2\pi \left(1 - \cos \frac{d}{2}\right)$$

由定理 4.3.1 可知球面上既是等弦长曲线又是等宽曲线的曲线必为测地圆. ■

定理 4.4.2 Poincaré圆盘上既等宽又等弦长的曲线必为测地圆.

证明: 设 γ 是Poincaré圆盘上以原点 O 为等弦点的等弦长曲线, γ 的参数表示为

$$\gamma: z = r(\varphi) e^{i\varphi} = \t$$

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - r^2)^2}$$

因此我们可以得到

$$\begin{aligned} & [\cos \varphi \quad \sin \varphi] \begin{bmatrix} \frac{4}{(1-r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-r^2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2e^\rho \cdot \rho'}{(e^\rho + 1)^2} \cos \varphi - \tanh \frac{\rho}{2} \sin \varphi \\ \frac{2e^\rho \cdot \rho'}{(e^\rho + 1)^2} \sin \varphi + \tanh \frac{\rho}{2} \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \frac{4}{(1-r^2)^2} \frac{2e^\rho}{(e^\rho + 1)^2} \rho' = \left[\frac{(e^\rho + 1)^2}{2e^\rho} \right]^2 \frac{2e^\rho}{(e^\rho + 1)^2} \rho' = \frac{[e^{\rho(\varphi)} + 1]^2}{2e^{\rho(\varphi)}} \rho'(\varphi) \end{aligned}$$

由于 $\rho(0) = \rho(2\pi)$, 且 $\rho(\varphi)$ 光滑, 因此根据 Rolle 中值定理可知, 存在 $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$, 使得

$$\rho'(\varphi_0) = 0$$

从而

$$\rho'(\varphi_0 + \pi) = 0$$

因此 γ 过原点 O 的弦中至少有一条和 γ 正交. 结合定理 2.3.1 可知, 若 γ 等宽且宽度为 d , 则 γ 的弦长为 d . 由^[9]中的定理 5.1 可知, 对于宽度为 d 的等宽曲线, 其面积 A 满足

$$A \leq 2\pi \left(\cosh \frac{d}{2} - 1 \right)$$

而由定理 4.3.2 知

$$A \geq 2\pi \left(\cosh \frac{d}{2} - 1 \right)$$

因此

$$A = 2\pi \left(\cosh \frac{d}{2} - 1 \right)$$

由定理 4.3.2 可知 Poincaré 圆盘上既是等弦长曲线又是等宽曲线的曲线必为测地圆. ■

注: 本节的内容可视为定理 3.1.2 的拓展

参考文献

- [1] (美) 普劳特 (Protter, M. H.), 温伯格 (Weinberger, H. F.) 著, 叶其考, 刘西垣译. 微分方程的最大值原理 [M]. 科学出版社, 1985.
- [2] 苏步青等编. 微分几何 [M]. 高等教育出版社, 1979.
- [3] 李忠, 周建莹编著. 高等数学 下 [M]. 北京大学出版社, 2004.
- [4] Paul J. Kelly. Curves with A Kind of Constant Width [J], 1957, 64(5):333-336.
- [5] Waldemar Cieślak, Józef Wolowik. g-chordal curves [J], 2009, 42(2):411-422.
- [6] N. Spaltenstein. A Family of Curves with Two Equichordal Points on a Sphere [J], 1984, 91(7):423.
- [7] Victor Klee. Can a Plane Convex Body have Two Equichordal Points? [J], 1969, 76(1):54-55.
- [8] Yves Martinez-Maure. Hedgehogs of constant width and equichordal point [J], 1997, 67(3):285-288.
- [9] K. Leichtweiss. Curves of constant width in the non-euclidean geometry [J], 2005, 75(1):257-284.
- [10] Araújo, Paulo Ventura. Barbier's theorem for the sphere and the hyperbolic plane. [J], 1996, 42(3-4):295-309.
- [11] 寿乐丽, 徐晨东. 双曲空间中的双曲线 [J]. 宁波大学学报 (理工版), 2015:58-61.
- [12] Ferenc Adorján. Equichordal curves and their applications - the geometry of a pulsation-free pump [D]. Applied Reactor Physics Department, KFKI Atomic Energy Research Institute, 1999.

致谢

通过这一阶段的努力, 我的论文《常曲率平面上的等弦长曲线》终于完稿了。本论文的顺利完成, 离不开教授、老师、同学和朋友的帮助和关心, 是他们的支持和鼓励才使我能够顺利地完此论文。

路还长, 唯勤勉前行。