

智能车辆有序通行无信号交叉路口的有向图方法及其应用研究

学校：清华附中国际学校

作者：李利鑫

指导教师：杨青明

摘要：随着智能网联汽车技术的发展，车车通信、车路通信技术得到了极大的进步。未来，通过智能车辆间的实时通信，智能车辆可实时获取周边车辆的位置、车速等信息，这种新技术将极大促进智能车路间的高效协同运行，提升整个交通系统的安全性、高效性。为保证不同方向的车辆队列通过同一无信号交叉路口的安全性和高效性，本文提出了一种有向图方法，通过实时获取路口周边智能车辆位置、速度信息，将二维平面上不同方向的车辆映射在同一个一维的虚拟车辆队列中，按照基于有向图得到的无冲突通行顺序先后通过路口，确保所有方向的车辆不发生冲突，并且安全高效通过路口。论文首先通过交通流冲突关系的分析得到不同交通流的总冲突集。而后，按交叉路口二维车群的到达时距（Time to Intersection, TTI）从小到大旋转投影得到虚拟车辆队列及其冲突关系图谱。在此基础上，通过深度优先搜索算法获取冲突关系图的深度优先生成树，从而得到无冲突的虚拟队列几何拓扑重构。本文提出的有向图方法有助于智能车辆高效、安全通过无信号路口，可应用于未来的无人驾驶车辆控制、智能交通系统控制等。

关键词：有向图、智能车、交叉路口、有序通行

一、引言

在日常生活中，交通拥堵是常见的交通出行问题。车辆经过无信号灯控制的路口时，不同方向的车辆可能在同一时间抢占路口通行权，导致双方车辆均无法顺利通过路口，停留在路口中，近而引发路口周边更大范围内的交通拥堵，如图 1-1 所示。



图 1-1 交通流冲突关系示意图

同时，传统车辆经过无信号灯控制的路口时，驾驶员无法及时感知其它方向

行驶的车辆, 导致不同行驶方向的交通流在路口发生交叉、汇聚极易发生造成交通事故, 如图 1-2 所示。据统计, 中国接近 25%的交通事故发生在交叉路口^[1], 而这一数据在美国更是超过 36%^[2]。由此可见, 传统车辆经过路口时, 引发的交通拥堵、交通事故等问题对社会造成巨大的经济损失, 急需开发新型的道路交通安全系统, 确保车辆安全、高效通过无信号交叉路口。



图 1-2 T 型无信号交叉路口事故

本世纪初, 融合车联网技术和自动驾驶技术的智能网联汽车(Intelligent and Connected Vehicle, ICV)的出现和发展为交叉路口车辆安全通行的研究提供了新的思路——智能汽车通过车联网获取交叉路口周边所有车辆的运动信息, 并通过对智能车辆速度和轨迹的控制, 实现交叉路口下的多车无冲突、高效通行。因此, 研究智能汽车在各类交叉路口下的协同通行方法对提高交通系统运行安全性, 减少交通事故的数量具有十分重要的意义。

目前, 智能汽车在交叉路口下的协同控制方法主要分为分层优化式路口协同控制方法、集中优化式路口协同控制方法和预约式路口协同控制方法^[3,4]。然而, 上述的方法存在的问题在于未综合考虑二维路网约束下交叉路口交通流的复杂冲突关系, 未充分利用无冲突交通流在路口空间共存的可能性, 因而难以实现在保证交通安全的前提下提高交叉路口交通效率。

针对上述问题, 本文提出了一种基于有向图及其深度优先生成树的智能汽车交叉路口协同通行的方法, 其主要的思想为通过将属于不同交通流的二维车群映射为一个虚拟车辆队列, 并基于不同交通流的冲突关系构造一个无冲突虚拟队列几何拓扑, 从而实现智能汽车在各类交叉路口的高效率协同通行。本文各部分如下安排: 第二节中简要介绍了交叉路口中的交通流的概念以及不同交通流的冲突关系; 第三节定义了虚拟队列冲突有向图及其深度优先生成树, 并证明了虚拟队

列深度优先生成树的存在性和重要性质；第四节通过三岔路口与十字路口的应用举例，说明了本文提出方法对不同类型交叉路口的适用性。

二、交通流冲突模型

2.1 交通流模型

交叉路口车辆根据其进入路口车道和退出路口车道不同可划分为不同的交通流向，因此交通流可用入口车道与出口车道的组合来描述，几何上表现为车辆从入口车道到出口车道的一条行驶轨迹。一条交通流与一个入口与出口车道的组合唯一对应。当交叉路口的形式确定后，其交通流的数量与流向也就确定。为便于交通流的表示，下文将各车道交通流以数字 $1 \sim N_M$ 按逆时针方向编号，其中 N_M 为交叉路口中的交通流总数。

2.2 冲突模型

交叉路口存在四种形式的交通流冲突关系，如图 2-1 所示，具体包括交叉冲突关系、合流冲突关系、分流冲突关系和无冲突关系。

图(a)所示为交通流的交叉冲突关系。交通流交叉冲突关系指不同行驶方向的交通流轨迹在交叉路口的内部存在几何关系上的交叉点，交叉冲突关系描述了交通流在交叉路口内部的冲突关系。

图(b)所示为交通流的合流冲突关系。交通流合流冲突关系指不同行驶方向的交通流在交叉路口的同一车道发生汇聚，合流冲突关系描述了交通流在交叉路口出口的冲突关系。

图(c)所示为交通流的分流冲突关系。交通流分流冲突关系指相同行驶方向的交通流在交叉路口入口的同一车道行驶到交叉路口发生分叉，其在入口车道内前后车运动发生冲突。分流关系描述了交通流在交叉路口入口的冲突关系。由于分流冲突关系反映车辆在交叉路口入口的冲突关系，因此任意交通流与其自身也存在分流冲突关系。

图(d)为交通流的无冲突关系。无冲突关系指不同的交通流在交叉路口不存

在上述的交叉冲突关系、合流冲突关系和分流冲突关系。若车辆处于无冲突关系的交通流中，则其可在同一时间通过交叉路口而不存在碰撞风险。

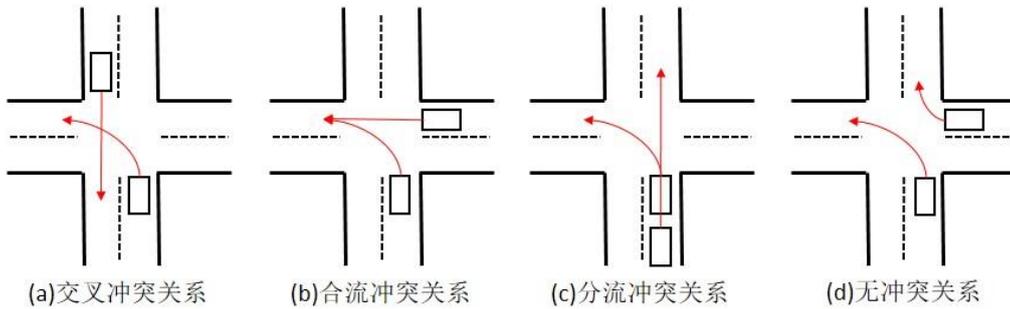


图 2-1 交通流冲突关系示意图

2.3 交通流冲突集的定义

基于上述的交通流冲突关系，可定义交通流冲突集。定义交通流 $i (i \in \{1, 2, \dots, N_M\})$ 的交叉冲突集 S_i 为与之存在交叉冲突关系的所有交通流的集合，合流冲突集 Q_i 为与之存在合流冲突关系的所有交通流的集合，分流冲突集 R_i 为与之存在分流冲突关系的所有交通流的集合。进一步地，定义交通流 i 的总冲突集 C_i 为与之存在冲突关系的所有交通流的集合，也即 Q_i 、 R_i 和 S_i 的并集。

若车辆所处交通流位于另一车辆所属交通流的冲突集，则这两个车辆位移轨迹必然在路口入口、路口内部或路口出口处发生冲突。相反地，如果两个车辆的位移轨迹在交叉路口发生冲突，则两个车辆所属的交通流必然处于彼此的冲突集中。

三、虚拟队列几何拓扑

3.1 虚拟队列的构造

3.1.1 到达时距的定义

在汽车人因工程的研究当中，碰撞时距(Time to Collision, TTC)被广泛地应用于表示驾驶员感知到的潜在碰撞风险，可作为驾驶事件发生紧迫程度的一个指标。本文进一步地引用并延伸这一概念，定义到达时距(Time to Intersection, TTI)为车辆到交叉路口中心点的距离与车辆当前的车速之比，即以不同车道不同交通

流的车辆到达交叉路口中心点的时间作为汽车通过交叉路口紧迫程度的一种量度。

3.1.2 车辆旋转投影

在前述 TTI 的定义之上, 这里将交叉路口入口处位于不同车道不同交通流的所有车辆根据各车辆的 TTI 旋转投影至一虚拟车道上, 将交叉路口二维车群几何拓扑转化为一维虚拟队列几何拓扑。

如下图所示, 在交叉路口引入一与实际车道交于交叉路口中心的虚拟车道。对于交叉路口入口不同车道不同交通流的所有车辆, 以交叉路口中心为圆心, 以各车辆到交叉路口中心点的 TTI 大小为先后顺序, 旋转投影到虚拟车道上, 最终形成虚拟车道上的一维车辆虚拟队列, 从而在队列几何拓扑上将二维车群转化为一维队列。

虚拟队列中的车辆按照其到交叉路口中心点的 TTI 从小到大以此编号为 1~N, 其中 N 为虚拟队列中车辆的总数, 同时在虚拟队列编号为 1 的车辆前方生成一虚拟领航车, 并编号为 0, 将车辆 i 所属交通流定义为 S_i 。此外, 将虚拟领航车的车速设定为匀速 v_t , 其定义为车辆安全高效通过交叉路口的最高车速, 根据交叉路口安全车速预先设定。

需要指出的是, 根据各车辆 TTI 投影得到的虚拟队列中车辆在实际车道行驶时不一定跟随其在虚拟队列中的相邻前车, 也不一定跟随其他的前方车辆。因为车辆在虚拟队列中的前车有可能来源于不同车道中的 TTI 较小的车辆, 也可能来源于同一车道中跟随该车辆但 TTI 较该车要小的车辆。

以 TTI 作为交叉路口二维车群的投影先后顺序的指标, 能够在保证车辆无冲突通行交叉路口的基础上, 兼顾不同车辆对通过交叉路口的紧迫程度的不同需要, 从而提高交通系统的运行效率。

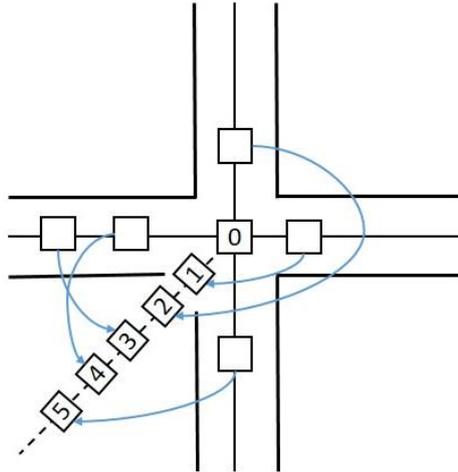


图 2-2 二维车群按 TTI 从小到大进行旋转投影

3.2 虚拟队列冲突图

3.2.1 冲突车辆集的定义

对于属于交通流 $S_i (S_i \in N^+, S_i \leq N_M)$ 的车辆 $i (i \in N^+, i \leq N)$, 若属于交通流 $S_j (S_j \in N^+, S_j \leq N_M)$ 的车辆 $j (j \in N^+, i \leq N)$ 与其存在冲突关系, 则车辆 j 所属交通流必然位于车辆 i 所属交通流的冲突集中, 即满足 $S_j \in C_{S_i}$ 。

定义 3-1 车辆 i 的冲突车辆集 P_i 为所有在虚拟队列中位于车辆 i 前方并与车辆 i 存在冲突关系的车辆的集合, 即:

$$P_i = \{j | j < i, S_j \in C_{S_i}, j \in N^+\}$$

虚拟队列中某些车辆前方可能不存在冲突车辆, 此时 $P_i = \Phi$ 。在此情况下, 将此车辆的冲突前车设置为虚拟领航车 0, 即

$$P_i = \{0\}$$

因此, 对于除虚拟领航车外的任意车辆 i , 其冲突车辆集 P_i 均不为空集。

3.2.2 冲突有向图

基于以上定义的冲突集, 采用冲突有向图 $\Psi_{N+1} = \{v_{N+1}, \varepsilon_{N+1}\}$ 表征车辆虚拟队列中各车辆的冲突关系。在有向图中, Ψ_{N+1} 的节点集 $v_{N+1} (v_{N+1} = \{0, 1, 2, \dots, N\})$ 表示虚拟队列中的所有车辆的集合; 有向边集 $\varepsilon_{N+1} (\varepsilon_{N+1} = \{(i, j) | i, j \in v_{N+1}\})$ 表示车辆两辆之间存在的冲突关系的集合。因此, 给出冲突有

向图的具体定义为:

定义 3-2 给定虚拟车辆队列 $\{0,1,2,\dots,N\}$ 、各车辆冲突集 P_i 以及有向图 $\Psi_{N+1} = \{v_{N+1}, \varepsilon_{N+1}\}$, 若 $v_{N+1} = \{0,1,2, \dots, N\}$, 且 $\forall i \in v_{N+1} \setminus \{0\}$, 当且仅当 $j \in P_i$, 有 $(j, i) \in \varepsilon_{N+1}$, 则 Ψ_{N+1} 为虚拟车辆队列的冲突有向图。

由以上冲突有向图的定义, 可以得到冲突有向图中有向路径和有向生成树的定义:

定义 3-3 若冲突有向图中存在一个有向边序列集 $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)\}$, 其中 $\forall k \in \{2,3, \dots, n\}$ 有 $(i_{k-1}, i_k) \in \varepsilon_{N+1}$, 则该有向边序列集称为从节点 i_1 到节点 i_n 的一条有向路径。

定义 3-4 若冲突有向图的一个子图中存在从某一节点到其余任意节点的有向路径, 则称该子图为冲突有向图的有向生成树, 该节点成为有向生成树的根节点。

3.3 虚拟队列深度优先生成树

将交叉路口的二维车群按 TTI 旋转投影得到一维虚拟车辆队列后, 本节将构造虚拟队列冲突有向图的深度优先生成树, 在证明其存在性的基础上给出具体的生成算法, 并证明构成此生成树的兄弟节点代表的车辆在通过交叉路口前后不存在交通冲突关系, 从而构造出交叉路口中属于不同交通流的车辆协同通行的几何拓扑。

3.3.1 以节点 0 为根节点的生成树的存在性证明

首先使用数学归纳法证明虚拟队列冲突有向图 Ψ_{N+1} 存在以节点 0 为根节点的生成树。

定理 3-1. 定义 3-2 给出的虚拟队列冲突有向图中存在以节点 0 为根节点的生成树。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时, 由于虚拟队列中节点 1 所表示的车辆前方只有虚拟领航车, 没有真实车辆, 因此由定义 3-1 可知, $P_1 = \{0\}$ 。因此有向边 $(0,1) \in \varepsilon_{N+1}$, 即存在从节点 0 到节点 1 的有向路径, 命题成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时命题成立, 即冲突有向图中存在从节点 0 到节点 $1 \sim k$ 的有向路径。当 $n=k+1$ 时, 若 $P_{k+1} \neq \{0\}$, 即节点 $k+1$ 所代表的的车辆前方存在冲突车

辆, 则 $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得有向边 $(i, k+1) \in \varepsilon_{N+1}$, 又由假设可知存在从节点 0 到节点 i 的有向路径 $\{(0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_m, i)\}$, 所以冲突有向图中存在从节点 0 到节点 $k+1$ 的有向路径 $\{(0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_m, i), (i, k+1)\}$; 若 $P_{k+1} = \{0\}$, 则有向边 $(0, k+1) \in \varepsilon_{N+1}$ 。于是, 当 $n=k+1$ 时, 冲突有向图中存在从节点 0 到节点 $1 \sim k+1$ 的有向路径, 命题成立。

结论: 冲突有向图中存在从节点 0 到其余任意节点的有向路径, 由定义 3-4 可知, 冲突有向图中存在以节点 0 为根节点的生成树。

3.3.2 深度优先搜索算法的设计

下面提出一种虚拟队列冲突有向图的深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1} = \{\overline{v}_{N+1}, \overline{\varepsilon}_{N+1}\}$ 的构造算法, 从而在冲突有向图中提取出上述已证明必然存在的以节点 0 为根节点的生成树。

表 3-1 深度优先搜索算法

输入: 冲突有向图 Ψ_{N+1} .
输出: 深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1}$.
初始化: 节点 0 的层数 l_0 设置为 1, 即 $l_0 = 1$; $\overline{v}_{N+1} = \{0\}$, $\overline{\varepsilon}_{N+1} = \Phi$.
1 for $i=1, 2, 3, \dots, N$ do
2 找到有向图 Ψ_{N+1} 中节点 i 的所有父节点 j , 即所有 $j \in \{j (j, i) \in \varepsilon_{N+1}\}$.
3 找到节点 i 的所有父节点中层数和数值最大的节点 k , 其层数为 l_k .
4 $\overline{v}_{N+1} := \overline{v}_{N+1} \cup \{i\}$, $\overline{\varepsilon}_{N+1} := \overline{\varepsilon}_{N+1} \cup \{k, i\}$, $l_i = l_k + 1$.
5 end for

3.3.3 特殊节点的定义

在深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1} = \{\overline{v}_{N+1}, \overline{\varepsilon}_{N+1}\}$ 中, 可定义父节点、子节点和兄弟节点等。

定义 3-3 深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1} = \{\overline{v}_{N+1}, \overline{\varepsilon}_{N+1}\}$ 中, 若存在 $(j, i) \in \varepsilon_{N+1}$, 则节点 j 为节点 i 的父节点, 节点 i 为节点 j 的子节点。

定义 3-4 深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1} = \{\overline{v}_{N+1}, \overline{\varepsilon}_{N+1}\}$ 中, 所有层数相同的节点互为兄弟节点。

3.3.4 深度优先生成树的性质及其证明

下面证明虚拟队列冲突有向图的深度优先生成树的一个重要性质。

定理 3-2 深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1}$ 中兄弟节点表示的车辆之间不存在冲突关系。

证明：不妨假设深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1}$ 的任意层 k 中存在 N_k 个兄弟节点，分别为 n_1, n_2, \dots, n_{N_k} ($n_1 < n_2 < \dots < n_{N_k}$ ，且 $l_{n_1} = l_{n_2} = \dots = l_{n_{N_k}}$)。对于车辆 n_i 和 n_j ($\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N_k\}$),

(1) 当 $n_j > n_i$ 时，由定义 3-1 可知， $n_j \notin P_{n_i}$;

(2) 当 $n_j < n_i$ 时，假设 $n_j \in P_{n_i}$ ，由表 3-1 的深度优先搜索算法可知，在深度优先生成树中节点 n_i 的层数要大于其包括节点 n_j 在内的所有父节点，即 $l_{n_i} > l_{n_j}$ ，这与 n_j 和 n_i 是兄弟节点的假设矛盾。因此当 $n_j < n_i$ 时， $n_j \notin P_{n_i}$ 。

综上，对深度优先生成树中的任意节点 n_i 和 n_j ，均有 $n_j \notin P_{n_i}$ 。即深度优先生成树 $\overline{\Psi}_{N+1}$ 中兄弟节点表示的车辆之间不存在冲突关系，命题得证。

3.4 虚拟队列几何拓扑重构

基于上述构造的虚拟车辆队列深度优先生成树及其性质，下面进行一维虚拟队列的几何拓扑重构，构造稳定状态下的虚拟车辆队列无冲突几何拓扑构型。

在重构的几何拓扑中，虚拟队列中车辆节点 i ($i \in \{1, 2, \dots, N\}$)将跟随其在深度优先生成树中的父节点 P_i 运动，并在虚拟队列跟车保持稳定时与父节点 P_i 保持恒定的期望车头距离 D 和相同的跟车速度，即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_{P_i}(t)\| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (p_{P_i}(t) - p_i(t) - D) = 0 \end{cases}, i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

其中，父节点车辆 P_i 称为车辆节点 i 的虚拟前车， p_i 和 v_i 分别表示车辆节点 i 与交叉口的距离和车速， p_{P_i} 和 v_{P_i} 分别表示父节点车辆 P_i 与交叉路口的距离和车速。

在稳定状态下，虚拟队列中所有车辆速度趋于一致，即：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_i(t) - v_j(t)) = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

由于虚拟队列中子节点车辆与父节点车辆间车头距离均为 D ，因此从虚拟领

航车节点 0 到任意车辆节点 i 的距离为生成树中从节点 0 到 i 的路径的边数与期望车头距离 D 的乘积, 而这个路径的边数即为节点 i 在生成树中的层数 $l_i - 1$, 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_i(t) - p_0(t)) = D(l_i - 1), \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

且稳定状态下虚拟队列中任意两个车辆节点 i 和 j 之间的距离为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_i(t) - p_j(t)) = D \|l_i - l_j\|, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

其中, l_i 和 l_j 分别为车辆 i 和车辆 j 在深度优先生成树中的层数。

当车辆 i 和车辆 j 在深度优先生成树中的层数相等, 节点 i 和 j 互为兄弟节点时, 由上式可知, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_i(t) - p_j(t)) = 0, (l_i = l_j)$$

这说明深度优先生成树中的兄弟节点车辆会在相同时间通过交叉路口, 结合 3.3.4 节中深度优先生成树的性质可知, 此时兄弟节点所表示的车辆不存在冲突关系。即重构后的虚拟队列几何拓扑能够保证所对应的二维车群在无冲突协同通过交叉路口的同时, 通过使得无冲突关系的兄弟节点车辆同时通过交叉路口而充分利用无冲突交通流在路口空间共存的可能性, 从而提高交通效率。

四、实际应用

由于上述方法解决的是智能汽车在各类交叉路口下的协同无冲突通行问题, 因此这里假设下面的应用举例中的车辆具备自动驾驶功能以及车联网功能。

4.1 三岔路口问题

T 形路口在几何上是三岔路口的一个特例, 但在具体的交通流分析中, 其与一般的三岔路口交通流一致。因此这里以如图 4-1 所示的 T 形路口为例, 说明如何将前文所提出的方法应用于三岔路口的智能汽车协同通行问题当中。

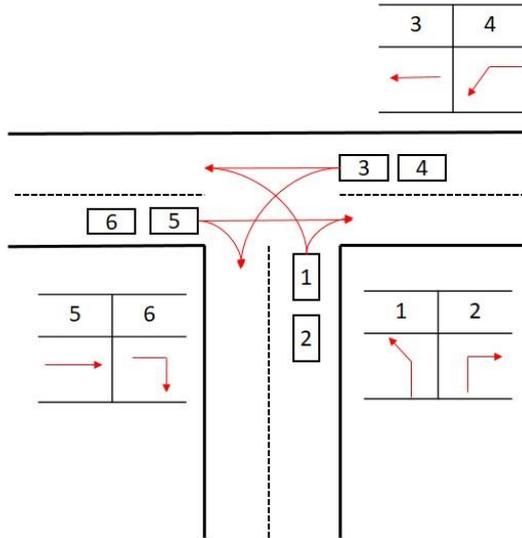


图 4-1 T 形路口交通流分析

4.2.1 交通流冲突关系分析

如上图所示，T 形路口中存在 6 种交通流，分别编号为1~6。其中交通流 1 与交通流 4、交通流 1 与交通流 5，交通流 4 与交通流 5 存在交叉冲突关系；交通流 1 与交通流 3、交通流 2 与交通流 5、交通流 3 与交通流 6 存在合流冲突关系；交通流 1 和 2、交通流 3 和 4、交通流 5 和 6 存在分流冲突关系，于是可得各交通流的总冲突集如表 4-1。

表 4-1 T 形路口交通流总冲突集

交通流编号	总冲突集
1	$C_1 = \{1,2,3,4,5\}$
2	$C_2 = \{1,2,5\}$
3	$C_3 = \{1,3,4\}$
4	$C_4 = \{1,3,4,5,6\}$
5	$C_5 = \{1,2,4,5,6\}$
6	$C_6 = \{4,5,6\}$

4.2.2 虚拟车辆队列及其冲突有向图

假设 T 形路口上的二维车群包括如图 4-2 所示的 6 辆属于以上 6 种不同交通流的车辆，将各车辆按其 TTI 从小到大旋转投影至一虚拟车道上，并分别编号 1~6，从而得到 T 形路口的虚拟车辆队列，如图 4-2 所示。

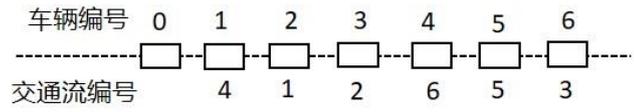


图 4-2 T 形路口的虚拟车辆队列

根据各车辆在虚拟队列中的排序以及所属的交通流, 可以得到虚拟队列中各车辆的冲突车辆集, 如表 4-2.

表 4-2 T 形路口虚拟队列的冲突车辆集

车辆编号	冲突车辆集
1	$P_1 = \{0\}$
2	$P_2 = \{1\}$
3	$P_3 = \{1,2\}$
4	$P_4 = \{1\}$
5	$P_5 = \{1,2,3,4\}$
6	$P_6 = \{1,2\}$

根据以上各车的冲突车辆集, 可得到虚拟队列的冲突车辆有向图:

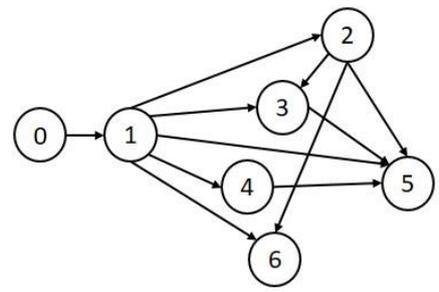


图 4-3 T 形路口的虚拟队列冲突有向图

4.2.3 虚拟队列深度优先生成树及几何拓扑重构

由以上虚拟队列的冲突车辆有向图可得到其深度优先生成树如图 4-4 所示:

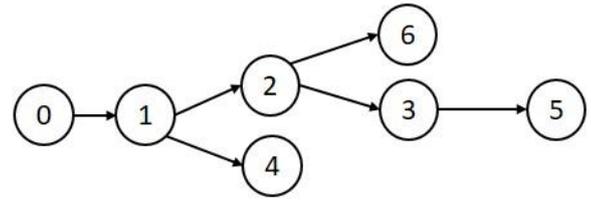


图 4-4 T 形路口的虚拟队列深度优先生成树

由深度优先生成树即可得到重构后的虚拟队列几何拓扑, 即到达稳定状态后车辆 1 将会首先沿交通流 4 通过交叉路口; 接着当车辆 2 和车辆 4 行驶过期望

车头距离 D 后, 将分别沿交通流 1 和 6 通过交叉路口, 此时可以看到, 车辆 2 和 4 并没有发生冲突; 接着车辆 3 和 6 分别要交通流 2 和 3 通过; 最后, 车辆 5 沿交通流 5 通过交通路口。从而实现智能车群协同高效地通过 T 形路口而不产生交通冲突。

4.3 十字路口问题

下面用上述方法解决十字路口下的智能汽车协同通行问题, 具体的十字路口如下图 4-5 所示。

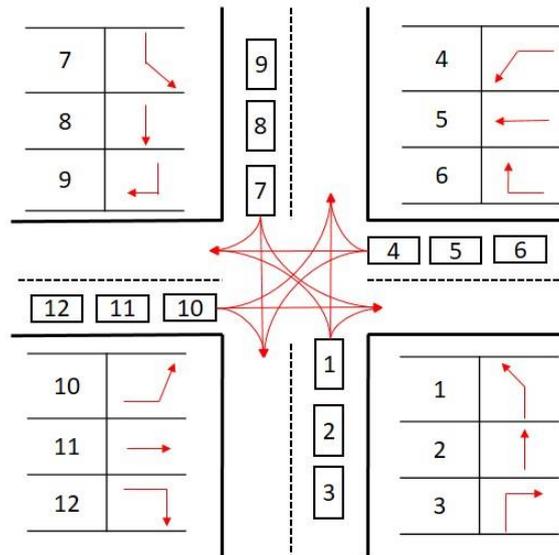


图 4-5 十字路口交通流分析

4.3.1 交通流冲突关系分析

由上图可知, 十字路口中存在 12 种交通流, 分别编号为 1~12。其中, 交通流 1 与交通流 4、10、11 存在交叉冲突关系, 与交通流 5、9 存在合流冲突关系, 与交通流 1、2、3 存在合流冲突关系; 交通流 2 与交通流 4、7、11 存在交叉冲突关系, 与交通流 6、10 存在合流冲突关系, 与交通流 1、2、3 存在分流冲突关系; 交通流 3 与交通流 7、11 存在合流冲突关系, 与交通流 1、2、3 存在分流冲突关系; 交通流 4 与交通流 7、11 存在交叉冲突关系, 与交通流 8、12 存在分流冲突关系, 与交通流 4、5、6 存在分流冲突关系; 交通流 5 与交通流 2、7、8、10 存在交叉冲突关系, 与交通流 1、9 存在合流冲突关系, 与交通流 4、5、6 存在分流冲突关系; 交通流 6 与交通流 2、10 存在合流冲突关系, 与交通流 4、5、6 存在分流冲突关系; 交通流 7 与交通流 2、4、5、10 存在交叉冲突关系, 与交

通流 3、11 存在合流冲突关系，与交通流 7、8、9 存在分流冲突关系；交通流 8 与交通流 1、5、10、11 存在交叉冲突关系，与交通流 4、12 存在合流冲突关系，与交通流 7、8、9 存在分流冲突关系；交通流 9 与交通流 1、5 存在合流冲突关系，与交通流 7、8、9 存在分流冲突关系；交通流 10 与交通流 1、5、7、8 存在交叉冲突关系，与交通流 2、6 存在合流冲突关系，与交通流 10、11、12 存在分流冲突关系；交通流 11 与交通流 1、2、4、8 存在交叉冲突关系，与交通流 3、7 存在合流冲突关系，与交通流 10、11、12 存在分流冲突关系；交通流 12 与交通流 4、8 存在合流冲突关系，与交通流 10、11、12 存在分流冲突关系。于是可得各交通流的总冲突集如表 4-3。

表 4-3 十字路口交通流总冲突集

交通流编号	总冲突集
1	$C_1 = \{1,2,3,4,5,9,10,11\}$
2	$C_2 = \{1,2,3,4,6,7,10,11\}$
3	$C_3 = \{1,2,3,7,11\}$
4	$C_4 = \{4,5,6,7,8,11,12\}$
5	$C_5 = \{1,2,3,4,5\}$
6	$C_6 = \{1,2,4,5,6,7,8,9,10\}$
7	$C_7 = \{2,3,4,5,7,8,9,10,11\}$
8	$C_8 = \{1,4,5,7,8,9,10,11,12\}$
9	$C_9 = \{1,5,7,8,9\}$
10	$C_{10} = \{1,2,5,6,7,8,10,11,12\}$
11	$C_{11} = \{1,2,3,4,7,8,10,11,12\}$
12	$C_{12} = \{4,8,10,11,12\}$

4.3.2 虚拟车辆队列及其冲突有向图

假设十字形路口上的二维车群包括 10 辆属于 10 种不同交通流的车辆，将各车辆按其 TTI 从小到大旋转投影至一虚拟车道上，并分别编号 1~10，从而得到十字路口的虚拟车辆队列，如图 4-6 所示。

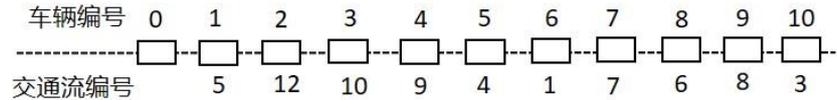


图 4-6 十字路口虚拟车辆队列

根据各车辆在虚拟队列中的排序以及所属交通流的总冲突集, 可以得到虚拟队列中各车辆的冲突车辆集, 如表 4-4.

表 4-4 十字路口冲突车辆集

车辆编号	冲突车辆集
1	$P_1 = \{0\}$
2	$P_2 = \{1\}$
3	$P_3 = \{1,2\}$
4	$P_4 = \{1\}$
5	$P_5 = \{1,2,3,4\}$
6	$P_6 = \{1,3,4,5\}$
7	$P_7 = \{3,4,5\}$
8	$P_8 = \{1,3,5\}$
9	$P_9 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
10	$P_{10} = \{6,7\}$

根据以上各车的冲突车辆集, 可得到虚拟队列的冲突车辆有向图:

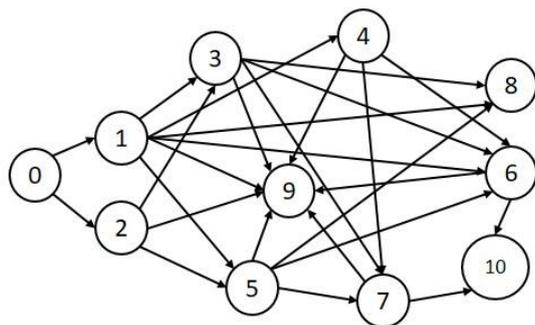


图 4-7 十字路口虚拟队列冲突有向图

4.2.3 虚拟队列深度优先生成树及几何拓扑重构

由以上虚拟队列的冲突车辆有向图可得到其深度优先生成树如图 4-8 所示:

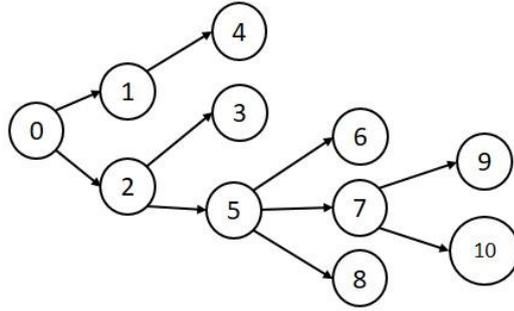


图 4-8 十字路口虚拟队列深度优先生成树

由深度优先生成树即可得到重构后的虚拟队列几何拓扑，即到达稳定状态后车辆 1 和车辆 2 将会首先沿交通流 5 和 12 无冲突地同时通过交叉路口；接着当车辆 3、4 和 5 行驶过期望车头距离 D 后，将分别沿交通流 10、9 和 4 同时通过交叉路口；接着车辆 6、7 和 8 分别同时沿交通流 1、7 和 6 通过；最后，车辆 9 和 10 沿交通流 8 和 3 同时通过交叉路口。

从以上三岔路口和十字路口的应用举例可知，对于不同类型的交叉路口，二维车群旋转投影后都是得到一虚拟车辆队列，不同之处在于不同的交叉路口的交通流冲突关系并不相同。因此，只要具体分析得到各类型交叉路口的交通流总冲突集，上述方法便可扩展至其余任何一种类型的交叉路口智能汽车协同通行的分析，如五岔路口和六岔路口，从而解决不同类型的交叉路口下智能汽车的协同通行问题。

五、结论

本文提出了一种基于有向图及其深度优先生成树的智能汽车在各类交叉路口下的协同无冲突通行的方法。通过建立交通流冲突关系模型，获得不同交通流的总冲突集。引入了 TTI 的概念并将其应用到二维车群旋转投影至一维车辆队列的过程当中，这样做的好处在于即实现了车辆的无冲突通行，也兼顾到不同车辆通过交叉路口的紧迫程度。在分析得到虚拟队列冲突有向图的基础上，通过设计深度优先搜索算法获得虚拟队列深度优先生成树，并从理论上证明了兄弟节点表示的车辆不具有冲突关系这一重要性质。从而基于深度优先生成树得到重构后的无冲突虚拟车辆队列几何拓扑

参考文献

- [1] 中华人民共和国国家统计局. 中国统计年鉴—2017[M]. 中国统计出版社, 2017.
- [2] CHOI E-H. Crash Factors in Intersection-Related Crashes: An On-Scene Perspective: (621942011-001)[J]. American Psychological Association, 2010.
- [3] CHEN L, ENGLUND C. Cooperative Intersection Management: A Survey[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2016, 17(2): 570–586.
- [4] RIOS-TORRES J, MALIKOPOULOS A A. A Survey on the Coordination of Connected and Automated Vehicles at Intersections and Merging at Highway On-Ramps[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2017, 18(5): 1066–1077.

致谢

衷心感谢清华大学附中杨青明老师在数学推导方面的指导, 感谢清华大学汽车系徐彪博士在智能车辆专业背景方面的指导。感谢丘成桐奖组委会提供的机会, 让我有机会深入探索学习。