参赛队员姓名： 邱瑞昕 袁勾如月

中学： 南京师范大学附属中学

省份： 江苏省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 周盾 曾素樵

论文题目： 一类完全非负矩阵的整值 Lyapunov 函数性质

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：邱瑞明 袁匀娟　　指导老师：周盾 曾素樵

2018 年　**9** 月　**5** 日

一类完全非负矩阵的整值Lyapunov函数性质

作者：邱瑞昕　袁勾如月
南京师范大学附属中学
指导教师：周盾　曾素樵

摘要:本文首先在$\mathbb{R}^n$空间的一个开的稠密子集Λ上定义了Lyapunov 函数$\sigma : \Lambda \to \{0,1,2,\cdots,n-1\}$,并进一步对任意的$x_0 \in \mathbb{R}^n$定义了$\sigma_M(x_0) = \max_{x\in U(x_0,\delta)\cap\Lambda} \sigma(x)$.然后讨论了一类完全非负矩阵的整值Lyapunov函数σ的性质,利用分类讨论法证明了对任意的$x \in \Lambda$ 均有$\sigma_M(Ax) \le \sigma(x)$.

关键词:　完全非负矩阵；整数值Lyapunov函数；振荡矩阵；分类讨论

1　引言

1984年John Smille[1]研究了如下的三对角竞争和合作的微分方程

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_j' = f_j(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}), 2 \le j \le n-1, \\ x_n' = f_n(x_{n-1}, x_n), \end{cases} \tag{1}$$

其中$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$为定义在非空开集$\Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续可微函数,且存在$\delta_i \in \{-1,1\}, 1 \le i \le n-1$使得$\delta_i \partial f_i/\partial x_{i+1} > 0, \delta_i \partial f_{i+1}/\partial x_i > 0, 1 \le i \le n-1$.对于系统(1),John Smille证明了所有的有界解趋向于平衡点的重要结论.由于这类系统在生物系统中是一类重要的模型,它可以描述具有等级结构的n种群的生态动力学,因此这类模型的研究得到了许多学者的关注([4],[2],[5] 及其参考文献),相应的结果表明这类系统具有较为简单的长久动力学性态,如周期系统的所有有界解均趋向于周期解,等等.由于三对角竞争和合作的微分方程经过适当的坐标变换均可以化为合作系统进行研究,下面如不特别申明,只需要考虑合作的情形,即假设$\delta_i = 1, 1 \le i \le n-1$. 通常来说,离散系统具有比连续系统更为复杂的动力学性态,如一维离散的虫口方程能够发生混沌现象[6],因此有必要考虑如下的离散三对角竞争和合作的差分方程的动力学性态：

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = f_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}), \\ x_j^{(k)} = f_j(x_{j-1}^{(k-1)}, x_j^{(k-1)}, x_{j+1}^{(k-1)}), 2 \le j \le n-1 \\ x_n^{(k)} = f_n(x_{n-1}^{(k-1)}, x_n^{(k-1)}). \end{cases} \tag{2}$$

值得指出的是,在研究系统(1)及其相应的推广系统中,首先考虑了如下的连续系统所对应的线性化系统

$$\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + b_1x_2, \\ x_j' = c_{j-1}x_{j-1} + a_jx_j + b_{j+1}x_{j+1}, 2 \le j \le n-1, \\ x_n' = c_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n, \end{cases} \tag{3}$$

其中$a_i > 0, i = 1, 2 \cdots, n, b_j > 0, c_j > 0, j = 1, 2, \cdots, n-1$,然后引入了一类整数值的Lyapunov函数（见第二节）,并证明了该整数值的Lyapunov函数沿着系统(3) 的非平凡解$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$ 具有如下的性质：

1. 除了在至多有限个点t处没有定义外均有定义；
2. 在有定义点t处的局部邻域内,整数值的Lyapunov函数是常数；
3. 当经过没有定义的t点处,整数值的Lyapunov函数是严格递减的.

利用该整数值的Lyapunov 函数的性质,文献[1],[4],[2],[5]得到了相应的三对角合作系统的全局性态, 结论表明该类系统具有较为简单的动力学性态.毫无疑问,引入的一类整数值的Lyapunov 函数在证明系统(1)及其相应的推广系统的全局动力学性态中取得非常重要的作用.

因此,为了研究差分系统(2)的动力学性态,研究该差分系统所对应的线性化系统

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + b_1 x_2^{(k-1)}, \\ x_j^{(k)} = c_{j-1} x_{j-1}^{(k-1)} + a_j x_j^{(k-1)} + b_{j+1} x_{j+1}^{(k-1)}, 2 \le j \le n-1, \\ x_n^{(k)} = c_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)} + a_n x_n^{(k-1)}, \end{cases} \tag{4}$$

所对应的整数值Lyapunov函数具有非常重要的作用,本文的主要目的就是研究线性差分系统(4)的整数值Lyapunov函数的性质.

本文的安排如下：在第二节首先给出整数值Lyapunov函数的定义,然后利用例子说明一般情况下连续系统的整数值Lyapunov函数对于离散系统不一定成立,从而研究一类特殊的离散三对角线性系统,即完全非负矩阵系统,因此在第二节中,我们还介绍完全非负矩阵的定义及其相关性质,整数值Lyapunov函数,进一步给出本文的主要结论；在第三节中,我们给出本文主要的结论的证明,在第四节中,我们给出本文结论的相关讨论.

2 主要结论

为了研究差分系统(4)解的整数值Lyapunov函数,首先给出整数值Lyapunov 函数的定义.令

$$\Lambda = \{v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in R^n : v_1 \neq 0, v_n \neq 0 \text{ and if}$$
$$v_i = 0 \text{ for some } i, 2 \le i \le n-1, \text{ then } v_{i-1}v_{i+1} < 0\}$$

设$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T$为$\mathbb{R}^n$中分量全不为0向量,定义$\sigma(v) = \#\{i : v_i v_{i+1} < 0\}$,其中#表示集合元素的个数.容易知道$\Lambda$ 是在$\mathbb{R}^n$ 中的开集且是稠密的.进一步,映射σ 可以连续的延拓到Λ 上,即Λ为映射σ的定义域.对于$x_0 \notin \Lambda$,令$U(x_0, \delta)$表示以x_0 为中心的充分小的邻域,定义

$$\sigma_M(x_0) = \max_{x \in U(x_0, \delta) \cap \Lambda} \sigma(x).$$

显然当$x \in \Lambda$,则有$\sigma_M(x) = \sigma(x)$.

为了叙述方便,令

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

其中$a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n, b_i > 0, c_i > 0, i = 1, 2\cdots, n-1$.显然差分系统(4)经过初始问题的解可以表示为

$$x^{(k)} = A^{k-1}x^{(1)}$$

其中$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \cdots$. 因此根据连续系统的相关结论,我们猜测所定义的整数值Lyapunov函数沿着离散线性系统(4) 的解$x^{(k)}$也是单调不增的.不难发现要证明上述猜测只需要证明对任一的$x \in \Lambda$有$\sigma_M(Ax) \leq \sigma(x)$成立即可.综上所述,本文的主要目的转化为试图证明下面的猜测:

- **猜测:** 对任意的$x \in \Lambda$有$\sigma_M(Ax) \leq \sigma(x)$

需要指出的是,对于一般的非负三对角矩阵,上述猜测并不成立.例如,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}; \qquad x=\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$Ax=\begin{pmatrix} 66 \\ -2 \\ 66 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

因此我们有$\sigma(x) = 3, \sigma_M(Ax) = \sigma(Ax) = 4$,从而$\sigma(x) < \sigma_M(Ax)$,故上述猜测是不成立的.

为此,我们下面讨论一类特殊的非负三对角矩阵的整值Lyapunov函数性质,即,完全非负三对角矩阵.首先给出相关的定义.

定义1: 设A是n阶方阵,在矩阵A中取k行k列,$1 \leq k \leq n$ 位于这些行列交叉处的k^2个元素按照相对位置排成一个k阶行列式,称这个k阶行列式为矩阵A 的一个k阶子式.

定义2:[7] 设A是n阶方阵. 如果矩阵A的所有阶子式均为非负数,则矩阵A 为完全非负矩阵；如果n阶方阵A的所有阶子式均为正数,则矩阵A 为完全正矩阵.

定义3:[7] 设n阶方阵A是完全非负矩阵. 如果存在整数$q>0$使得矩阵A^q为完全正矩阵,则矩阵A为振荡矩阵(Oscillatory Matrix).

对于非负的三对角矩阵A,我们有下面的结论：

引理1:[7] 如果A是式(5) 中表示的非负三对角矩阵,则矩阵A是振荡的当且仅当下面两个条件满足：

1. $b_i>0, c_i>0, i=1,2,\cdots,n-1$；
2. 矩阵A的所有顺序阶主子式大于0,即

$$a_1>0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{vmatrix}>0,\cdots, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}>0.$$

现在我们给出本文的主要结论：

定理 如果A是式(5)中表示的非负三对角矩阵且为振荡矩阵,则有对任意的$x\in\Lambda$有$\sigma_M(Ax)\leq\sigma(x)$.

3 主要结论证明

本节中,如不特别申明,矩阵A均为式(5)表示的非负三对角矩阵,且设矩阵A为振荡矩阵.为了证明本文的主要定理,首先证明下面的引理.

引理2. 如果对任意的y满足$y\in\Lambda$且$Ay\in\Lambda$均有$\sigma(Ay)\leq\sigma(y)$ 成立,则对任意的$x\in\Lambda$均有$\sigma_M(Ax)\leq\sigma(x)$.

证明： 由于矩阵A是非奇异矩阵且集合Λ为开集,因此对任意的$x_0\in\Lambda$,存在$\delta_1>0$ 使得$V=A^{-1}U(Ax_0,\delta_1)\subset\Lambda$ 且V 为开集,由于

$$\sigma_M(Ax_0)=\max_{y\in U(Ax_0,\delta_1)\cap\Lambda}\sigma(y),$$

所以对任意的$y\in U(Ax_0,\delta_1)\cap\Lambda$有$\sigma_M(Ax_0)\geq\sigma(y)$. 由于对任意的$y\in U(Ax_0,\delta_1)\cap\Lambda$存在$x\in V$使得$Ax=y$,所以由$\sigma_M$的定义可得,存在$y'\in U(Ax_0,\delta_1)\cap\Lambda$和$x'\in V$满足$\sigma_M(Ax_0)=\sigma(y'), Ax'=y'$,从而有$\sigma_M(Ax_0)=\sigma(Ax')$. 由已知条件$\sigma(Ax')\leq\sigma(x')$可得,$\sigma_M(Ax_0)\leq\sigma(x')=\sigma(x_0)$. 从而命题成立.

由引理2可得,为了证明主要定理,我们只需要证明对任意的$x\in\Lambda$且$Ax\in\Lambda$均有$\sigma(Ax)\leq\sigma(x)$ 成立即可.不失一般性,我们总假设$x\in\Lambda$ 且$Ax\in\Lambda$.

3.1 情形$n=3$时定理的证明.

当$n=3$时,则

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{pmatrix},$$

其中$b_i>0,c_i>0,i=1,2$且

$$a_1>0,\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{vmatrix}>0.$$

令$x=(x_1,x_2,x_3)^T$,则

$$Ax=\begin{pmatrix} a_1x_1+b_1x_2 \\ c_1x_1+a_2x_2+b_2x_3 \\ c_2x_2+a_3x_3 \end{pmatrix}.$$

下面分三种情况进行讨论:(1)$\sigma(x)=0$; (2)$\sigma(x)=2$; (3)$\sigma(x)=1$.

(1)当$\sigma(x)=0$时,则显然有Ax的三个元素全部同号,即$\sigma(Ax)=0$,所以命题自然成立.

(2)当$\sigma(x)=2$时,则向量x的三个元素全部异号,而三阶向量Ax的元素至多有两次变号,因此命题自然成立.

(3)当$\sigma(x)=1$时,则此时在向量x中存在两个相邻的元素具有相同的符号,另一个元素具有与其相异的符号.不失一般性,我们只需讨论$x_1>0,x_2>0,x_3<0$的情形,其他的情形可以类似地讨论.

设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$,其中$x_1>0,x_2>0,x_3<0$. 记$y=Ax,y=(y_1,y_2,y_3)^T$. 显然$y_1=a_1x_1+b_1x_2>0$,且

$$\begin{cases} c_1x_1+a_2x_2+b_2x_3=y_2, \\ c_2x_2+a_3x_3=y_3. \end{cases} \tag{6}$$

下证$y_2<0,y_3>0$不可能成立即可.假设$y_2<0,y_3>0$,则由克莱姆法则解线性方程(6)可得

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} y_2-c_1x_1 & b_2 \\ y_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_3 \end{vmatrix}};x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & y_2-c_1x_1 \\ c_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_3 \end{vmatrix}}.$$

由于矩阵A是振荡矩阵,所以

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_3 \end{vmatrix}>0.$$

又由于$a_2>0,a_3>0,b_2>0,c_1>0,c_2>0$和$x_1>0,y_2<0,y_3>0$可得$x_2<0,x_3>0$, 这和条件$x_2>0,x_3<0$相悖,从而在此种情况下命题成立.

综上所述,当x为三阶向量时,定理成立.

3.2 情形$n=4$时主要定理的证明.

当$n=4$时,则

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

其中$b_i>0, c_i>0, i=1,2,3$且

$$a_1>0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 \end{vmatrix}>0.$$

令$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$,则

$$Ax=\begin{pmatrix} a_1x_1+b_1x_2 \\ c_1x_1+a_2x_2+b_2x_3 \\ c_2x_2+a_3x_3+b_2x_4 \\ c_3x_3+a_4x_4 \end{pmatrix}.$$

下面分四种情况进行讨论:(1)$\sigma(x)=0$; (2)$\sigma(x)=3$; (3)$\sigma(x)=1$; (4)$\sigma(x)=2$.

(1)当$\sigma(x)=0$时,则显然有Ax的四个元素全部同号,即$\sigma(Ax)=0$,所以命题自然成立.

(2)当$\sigma(x)=3$时,则由于四阶向量Ax的元素至多有三次变号,因此命题自然成立.

(3)当$\sigma(x)=1$时,为不失一般性,我们只讨论$x_1>0,x_2>0,x_3<0,x_4<0$ 的情形,其他的情形可以类似地讨论.

设$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$,其中$x_1>0,x_2>0,x_3<0,x_4<0$. 记$y=Ax, y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$. 显然$y_1=a_1x_1+b_1x_2>0, y_4=c_3x_3+a_4x_4<0$,且

$$\begin{cases} c_1x_1+a_2x_2+b_2x_3=y_2, \\ c_2x_2+a_3x_3+b_3x_4=y_3. \end{cases} \tag{7}$$

下证$y_2<0, y_3>0$不可能成立即可.假设$y_2<0, y_3>0$,则由克莱姆法则解线性方程(7)可得

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} y_2-c_1x_1 & b_2 \\ y_3-b_3x_4 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_3 \end{vmatrix}}; x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & y_2-c_1x_1 \\ c_2 & y_3-b_3x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_3 \end{vmatrix}}.$$

由于矩阵A是振荡矩阵,所以

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_3 \end{vmatrix}>0.$$

又由于$a_2 > 0, a_3 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0$和$x_1 > 0, y_2 < 0, x_4 < 0, y_3 > 0$可得$x_2 < 0, x_3 > 0$, 这和条件$x_2 > 0, x_3 < 0$相悖,从而在此种情况下命题成立.

(3)当$\sigma(x) = 2$时,不失一般性,我们只讨论$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 < 0, x_4 > 0$ 的情形,其他的情形可以类似地讨论.

设$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$,其中$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 < 0, x_4 > 0$. 记$y = Ax, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$. 显然$y_1 = a_1x_1 + b_1x_2 > 0$,且

$$\begin{cases} c_1x_1 + a_2x_2 + b_2x_3 = y_2, \\ c_2x_2 + a_3x_3 + b_2x_4 = y_3, \\ c_3x_3 + a_4x_4 = y_4 \end{cases} \tag{8}$$

下证$y_2 < 0, y_3 > 0, y_4 < 0$不可能成立即可.假设$y_2 < 0, y_3 > 0, y_4 < 0$,则由克莱姆法则解线性方程(8)可得

$$x_2 = \frac{(y_2 - c_1x_1)\Delta_{11} - y_3\Delta_{21} + y_4\Delta_{31}}{\Delta};$$
$$x_3 = \frac{-(y_2 - c_1x_1)\Delta_{12} + y_3\Delta_{22} - y_4\Delta_{32}}{\Delta};$$
$$x_4 = \frac{(y_2 - c_1x_1)\Delta_{13} - y_3\Delta_{23} + y_4\Delta_{33}}{\Delta}.$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ c_2 & a_3 & b_4 \\ 0 & c_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

且Δ_{ij}为Δ的第i行j列的余子式.

由于矩阵A是振荡矩阵,所以$\Delta > 0, \Delta_{ij} > 0, i, j = 1, 2, 3$. 又由于$c_1 > 0, x_1 > 0, y_2 < 0, y_3 > 0, y_4 < 0$可得$x_2 < 0, x_3 > 0, x_4 < 0$, 这和条件$x_2 > 0, x_3 < 0, x_4 > 0$ 相悖,从而在此种情况下命题成立.

综上所述,当x为四阶向量时,定理成立.

3.3 一般情形的定理证明

在前面两小节,我们给出了当$n = 3, n = 4$两种特殊情况下的证明,根据上面两种情况的证明思路,我们本小节将给出本文的主要定理的一般性证明.

现令$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$. 记$y = Ax$,其中$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, $1 \le i < m \le n$. 为了完成本文主要定理在一般情形下的证明我们需要一个引理.

引理3.如果$x_ix_{i+1} > 0, x_{m-1}x_m > 0$且对任意的$j, i + 1 \le j \le m - 2$均有$x_jx_{j+1} < 0$,则$x_ky_k < 0$不可能对所有的$k, i + 1 \le k \le m - 1$成立,即,向量$x$与$y$的第$i + 1$个元素至第$m - 1$个元素的符号不能够完全相反.

证明:考虑方程$y=Ax$的第$i+1$到$m-1$个方程可得

$$\begin{cases} c_ix_i+a_{i+1}x_{i+1}+b_{i+1}x_{i+2}=y_{i+1} \\ c_{i+1}x_{i+1}+a_{i+2}x_{i+2}+b_{i+2}x_{i+3}=y_{i+2} \\ c_{i+2}x_{i+2}+a_{i+3}x_{i+3}+b_{i+3}x_{i+4}=y_{i+3} \\ \cdots\cdots \\ a_{m-3}x_{m-3}+a_{m-2}x_{m-2}+b_{m-2}x_{m-1}=y_{m-2} \\ c_{m-2}x_{m-2}+a_{m-1}x_{m-1}+b_{m-1}x_m=y_{m-1} \end{cases}$$

运用克莱姆法则对该方程组进行求解$x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{m-1}$可得

$$x_j=\frac{1}{\Delta}\left[\sum_{k=i+1}^{m-1}y_k(-1)^{k-i+j-i}\Delta_{k-i,j-i}-c_ix_i(-1)^{1+j-i}\Delta_{1,j-i}-b_{m-1}x_m(-1)^{m-i-1+j-i}\Delta_{m-i-1,j}\right], \tag{9}$$

其中$j=i+1,i+2,\cdots,m-1$,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{i+1} & b_{i+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{i+1} & a_{i+2} & b_{i+2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{i+2} & a_{i+3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{m-2} & b_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{m-2} & a_{m-1} \end{vmatrix},$$

且$\Delta_{i,j},i,j=1,2,\cdots,m-i-1$为$\Delta$的第$i$行$j$列的余子式.

不失一般性,我们只讨论**条件A:** $x_i<0,x_{i+1}<0,x_{i+2}>0,\cdots,x_{m-3}>0,x_{m-2}<0,x_{m-1}>0,x_m>0$ 的情形,此时$m-i+1$为偶数.其他的情形可以类似的证明.下面证明**结论A:** $y_{i+1}>0,y_{i+2}<0,\cdots,y_{m-3}<0,y_{m-2}>0,y_{m-1}<0$在条件A下不可能成立. 现假设$y_{i+1}>0,y_{i+2}<0,\cdots,y_{m-3}<0,y_{m-2}>0,y_{m-1}<0$. 由于矩阵$A$是振荡矩阵,所以$\Delta>0,\Delta_{i,j}>0,i,j=1,2,\cdots,m-i-1$.又由于$c_i>0,b_{m-1}>0,x_i<0,x_m>0$,直接计算可得

$$x_{i+1}=\frac{1}{\Delta}\left[\sum_{k=i+1}^{m-1}y_k(-1)^{k-i+1}\Delta_{k-i,1}-c_ix_i(-1)^2\Delta_{1,1}-b_{m-1}x_m(-1)^{m-i+2}\Delta_{m-i-1,i+1}\right]>0.$$

同理计算可得$x_{i+2}<0,\cdots,x_{m-3}<0,x_{m-2}>0,x_{m-1}<0$,这与已知条件矛盾,所以结论A得证.因此引理3得证.

有了以上引理,下面我们可以给出在一般情形下主要定理的证明.

定理的证明 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\Lambda$.如果$x$的元素有零元素,则根据$\Lambda$的定义,我们对零元素做充分小的扰动,使得$x$的每一个元素都不为零,且不改变$x$的整值Lyapunov函数的值.因此,不失一般性,设x的任何分量都不为零.为了叙述方便,现引入以下概念:

1)向量x的块恒正分量,如果向量x的块满足下面四种情形之一:

(a) 当$i > 1, m < n$时,如果$x_{i-1} < 0,\ x_j > 0, j = i, i+1, \cdots, m, x_{m+1} < 0$,则记$x_+^{i+1,m-1} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{m-1})^T$;

(b) 当$i = 1, m < n$时,如果$x_j > 0, j = 1, 2, \cdots, m, x_{m+1} < 0$, 则记$x_+^{1,m-1} = (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1})^T$;

(c) 当$i > 1, m = n$时,如果$x_{i-1} < 0$,$x_j > 0, j = i, i+1, \cdots, n$, 则记$x_+^{i+1,n} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n)^T$;

(d) 当$i = 1, m = n$时,如果$x_j > 0, j = 1, i+1, \cdots, n$, 则记$x_+^{1,n} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n)^T$;

2）向量x的块恒负分量,如果向量x的块满足下面四种情形之一：

(a) 当$i > 1, m < n$时,如果$x_{i-1} > 0, x_j < 0, j = i, i+1, \cdots, k, x_{m+1} > 0$,则记$x_-^{i+1,k-1} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{m-1})^T$;

(b) 当$i = 1, m < n$时,如果$x_j < 0, j = 1, 2, \cdots, m, x_{m+1} > 0$, 则记$x_-^{1,m-1} = (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1})^T$;

(c) 当$i > 1, m = n$时,如果$x_{i-1} > 0$,$x_j < 0, j = i, i+1, \cdots, n$, 则记$x_-^{i+1,n} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n)^T$;

(d) 当$i = 1, m = n$时,如果$x_j < 0, j = 1, i+1, \cdots, n$, 则记$x_-^{1,n} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n)^T$;

3)向量x的块变号分量,如果向量x的块满足下面四种情形之一：

(a) 当$i > 1, m < n$时,如果$x_{i-1}x_i > 0, x_j x_{j+1} < 0, j = i, i+1, \cdots, m, x_m x_{m+1} > 0$,则记$x_\pm^{i,m} = (x_i, x_{i+2}, \cdots, x_m)^T$;

(b) 当$i = 1, m < n$时,如果$x_j x_{j+1} < 0, j = 1, 2, \cdots, m, x_m x_{m+1} > 0$, 则记$x_\pm^{1,m} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$;

(c) 当$i > 1, m = n$时,如果$x_{i-1}x_i > 0, x_j x_{j+1} < 0, j = i, i+1, \cdots, n-1$,则记$x_\pm^{i,n} = (x_i, x_{i+2}, \cdots, x_n)^T$;

(d) 当$i = 1, m = n$时,如果$x_j x_{j+1} < 0, j = 1, 2, \cdots, n-1$,则记$x_\pm^{1,n} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$;

根据引入的记号,向量x可以表示为如下的分块矩阵：

$$x = \begin{pmatrix} x^{[1]} \\ x^{[2]} \\ \cdots \\ x^{[k]} \end{pmatrix},$$

其中$x^{[l]}, l = 1, 2, \cdots, k$为向量$x$的块恒正分量,块恒负分量或者块变号分量.记$y = Ax$.根据向量$x$的分块方式同样的对向量$y$进行分块,并表示为

$$y = \begin{pmatrix} y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ \cdots \\ y^{[k]} \end{pmatrix}.$$

断言：如果$x^{[l]}$为块恒正分量或者块恒负分量,则$y^{[l]}$也是块恒正分量或者块恒负分量.下面主要讨论当$x^{[l]}$为块恒正分量的情形,$x^{[l]}$为块恒负分量时可类似的

讨论. 不失一般性,设$x^{[l]} = x_+^{i+1,m-1} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{m-1})^T$,则有$x_j > 0, j = i, i+1, \cdots, m$.考虑方程$y = Ax$的第$i+1$到$m-1$个方程可得

$$\begin{cases} c_i x_i + a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1} x_{i+2} = y_{i+1} \\ c_{i+1} x_{i+1} + a_{i+2} x_{i+2} + b_{i+2} x_{i+3} = y_{i+2} \\ c_{i+2} x_{i+2} + a_{i+3} x_{i+3} + b_{i+3} x_{i+4} = y_{i+3} \\ \cdots\cdots \\ a_{m-3} x_{m-3} + a_{m-2} x_{m-2} + b_{m-2} x_{m-1} = y_{m-2} \\ c_{m-2} x_{m-2} + a_{m-1} x_{m-1} + b_{m-1} x_m = y_{m-1}. \end{cases}$$

由于$x_j > 0, j = i, i+1, \cdots, m, a_i > 0, j = i+1, i+2, \cdots, m-1; c_j > 0, j = i, i+1, \cdots, m-2; b_j > 0, j = i+1, i+2, \cdots, m-1$,所以$y_j > 0, j = i+1, i+2, \cdots, m-1$,即$y^{[l]}$ 是块恒正分量.

下面仅讨论$k = 3$时且$x^{[1]} = x_\pm^{1,k_1}, x^{[2]} = x_+^{k_1+1,k_2-1}, x^{[3]} = x_\pm^{k_2,n}$,其中$x_1 < 0, x_n > 0$的情形,其他$k = 3$情形和$k$为任意自然数的情形可类似的讨论. 由于$x^{[1]} = x_\pm^{1,k_1}, x^{[2]} = x_+^{k_1+1,k_2-1}, x^{[3]} = x_\pm^{k_2,n}$且$x_1 < 0, x_m > 0$,所以$k_1$为偶数,$n - k_2 - 1$为奇数且$x_{k_1} > 0, x_{k_1+1} > 0, x_{k_2-1} > 0, x_{k_2} > 0$. 由$\sigma$ 的定义可得,$\sigma(x) = k_1 - 1 + n - k_2$且$\sigma(y^{[1]}) \le k_1 - 1$,$\sigma(y^{[3]}) \le n - k_2$. 由上面的断言可得,$\sigma y^{[2]} = 0$.

因为$y^{[1]}$是k_1维分量, 且由引理3可得,$\sigma(y^{[1]}) = k_1 - 1$当且仅当$sgn(y_j) = sgn(x_j), j = 1, 2, \cdots, k_1$.当$\sigma(y^{[1]}) = k_1 - 2$,则有$y_1 > 0, sgn(y_j) = sgn(x_j), j = 2, 3, \cdots, k_1$或者$y_{k_1} < 0, sgn(y_j) = sgn(x_j), j = 1, 2, \cdots, k_1 - 1$. 其余情形均有$\sigma(y^{[1]}) \le k_1 - 3$ 同理可得,$\sigma(y^{[3]}) = n - k_2$ 当且仅当$sgn(y_j) = sgn(x_j), j = k_2, k_2+1, \cdots, n$.当$\sigma(y^{[3]}) = n - k_2 - 1$,则有$y_{k_2} < 0, sgn(y_j) = sgn(x_j), j = k_2+1, k_2+2, \cdots, n$ 或者$y_n < 0, sgn(y_j) = sgn(x_j), j = k_2, k_2+1, \cdots, n-1$,其余情形均有$\sigma(y^{[3]}) \le n - k_2 - 2$.下面分以下五种情况进行讨论:

情形1)$\sigma(y^{[3]}) \le n - k_2 - 2$或者$\sigma(y^{[1]}) \le k_1 - 3$. 不妨设$\sigma(y^{[3]}) \le n - k_2 - 2$,当$\sigma(y^{[1]}) \le k_1 - 3$时可类似处理.进行简单计算即可得, $\sigma(y) = \sigma(Ax) \le \sigma(y^{[1]}) + \sigma(y^{[2]}) + \sigma(y^{[3]}) + 2 \le k_1 - 1 + n - k_2 - 2 + 2 = \sigma(x)$,从而命题得证.

情形2)$\sigma(y^{[1]}) = k_1 - 1$且$\sigma(y^{[3]}) = n - k_2$,则由上面的讨论可得,$sgn(x_j) = sgn(y_j), j = 1, 2, \cdots, n$, 从而$\sigma(y) = \sigma(x)$,即$\sigma(Ax) = \sigma(x)$. 命题得证.

情形3)$\sigma(y^{[1]}) = k_1 - 2$且$\sigma(y^{[3]}) = n - k_2 - 1$,则进行简单计算即可得, $\sigma(y) = \sigma(Ax) \le \sigma(y^{[1]}) + \sigma(y^{[2]}) + \sigma(y^{[3]}) + 2 \le k_1 - 2 + n - k_2 - 1 + 2 = \sigma(x)$,从而命题得证.

情形4)$\sigma(y^{[1]}) = k_1 - 2, \sigma(y^{[3]}) = n - k_2$. 由上面的讨论可得,$sgn(x_j) = sgn(y_j), j = k_1+1, k_1+2, \cdots, n$,从而$\sigma(y) = \sigma(Ax) \le \sigma(y^{[1]}) + \sigma(y^{[2]}) + \sigma(y^{[3]}) + 1 \le k_1 - 2 + n - k_2 + 1 = \sigma(x)$,从而命题得证.

情形5)$\sigma(y^{[1]}) = k_1 - 1, \sigma(y^{[3]}) = n - k_2 - 1$,$\sigma(y^{[3]}) = n - k_2 - 1$.由上面的讨论可得,$sgn(x_j) = sgn(y_j), j = 1, 2, \cdots, k_2 - 1$,从而$\sigma(y) = \sigma(Ax) \le \sigma(y^{[1]}) + \sigma(y^{[2]}) + \sigma(y^{[3]}) + 1 \le k_1 - 1 + n - k_2 - 1 + 1 = \sigma(x)$,从而命题得证.

综述所述,本文的主要定理得以证明. 证毕.

4 讨论

本文研究了一类完全非负的三对角矩阵的整值Lyapunov函数的性质,证明了完全非负的三对角矩阵作用在一个向量上,其整值Lyapunov函数不会增加.这类性

质可能为研究一类离散的非线性映射奠定了一定的预备知识.为了验证本文的结论的正确性,我们还编写了相应的程序,相应的程序见附录.仿真结果也进一步表明本文结论的正确性.

在进行更深一步的研究时,通过计算机程序的大量运算以及模拟后我们发现:

对于任意一i对角矩阵A满足任意i阶及以下主子式都大于零,$i \in Z_+$,则有$\sigma(x) > \sigma(Ax)$,其中$x \in \Lambda$.

此猜测为本文命题的加强,在以后的论文中我们将做进一步的研究.

References

[1] J. Smillie, Competitive and cooperative tridiagonal systems of differential equations, SIAM J. Math. Anal., 15 (1984), pp. 530–534.

[2] Y. Wang, Dynamics of nonautonomous tridiagonal competitive-cooperative system of differential equations, Nonlinearity, 20 (2007), pp. 831–843.

[3] G. Fusco and W. M. Oliva, Transversality between invariant manifolds of periodic orbits for a class of monotone dynamical systems, J. Dynam. Differential Equations, 2 (1990), pp. 1–17.

[4] H. L. Smith, Periodic tridiagonal competitive and cooperative systems of differential equations, SIAM J. Math. Anal., 22 (1991), pp. 1102–1109.

[5] C. Fang, M. Gyllenberg and Y. Wang, Floquet bundles for tridiagonal competitive-cooperative systems and the dynamics of time-recurrent systems, SIAM J. Math. Anal., 45 (2013), pp. 2477-2498.

[6] 顾恩国,离散动力系统的分叉与混沌,北京：科学出版社,2013.

[7] F. R. Gantmacher,The Theory of Matrices, Vol.2, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2000.

5 Appendix: Matlab code

```
clc;
clear;
trial = 0;
u = input('please enter the order of the matrix:');

while(true)
    a = unifrnd(0,1,1,u-1);
    b = unifrnd(0,1,1,u-1);
    c = unifrnd(0,1,1,u);
    e = diag(a,1);
    f = diag(b,-1);
    g = diag(c,0);
    h = e+f+g;
    x1 = unifrnd(-1,1,u,1);
    n = 1;
    sigma = 1;
    result = [];
    process = [];
    xn = x1;
    i = 1;
    while(i<=10)
        sigma = 0;

        while (n<=u-1)
            f = xn(n,1);
            s = xn(n+1,1);
            if(f*s>0)
                sigma = sigma;
            end

            if(f*s<0)
                sigma = sigma+1;
            end

            if(f*s==0)
                sigma = sigma;
            end

            n = n+1;
        end

        n = 1;
        result = [result;sigma];
        process = [process;xn];
        xn = h*xn;
        i=i+1;
    end

    k = 1;
    minor_storage = [];

    while(k<=u);
        minor = h(1:k,1:k);

        if(det(minor)<0)
```

```
            break;
        end

        if(det(minor)>0)
            minor_storage = [minor_storage;det(minor)];
            k=k+1;
        end

    end

    check = 0;

    if(length(minor_storage)==u)
        trial = trial + 1
        sigma_row = 1;

        while(sigma_row<length(result))

            if(result(sigma_row,1)<result(sigma_row+1,1))
               check = 1;
               break;
            end

            sigma_row = sigma_row + 1;
        end

    end

    if(check==1)
        result
        minor_storage
        trial
        check
        break;
    end

end
```