关于帐篷映射周期点的探究

四川成都 成都石室中学 牛睿杰
指导老师 张伟年 李威

关于帐篷映射周期点的探究

四川成都 成都石室中学 牛睿杰
指导老师 张伟年 李威

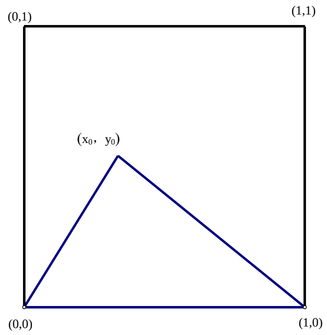
摘 要：本文基于迭代蛛网图的几何性质，研究了帐篷映射的周期点存在性问题. 主要针对帐篷映射中最复杂的一个区域，即当顶点 (x_0, y_0) 满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$ 时周期点的存在情况. 给出了帐篷映射存在三周期点的充要条件，以及存在 n 周期“阶梯型”周期点的充要条件，证明了在当顶点 (x_0, y_0) 满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$ 时四周期点恒存在，最后验证了帐篷映射中的李约克(Li-Yorke)定理.

关键词：帐篷映射，迭代映射，周期点，蛛网图

一、引言

帐篷映射是一类最简单的非线性映射，其定义如下

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{y_0\cdot x}{x_0}, & x\in[0,x_0),\\[2ex] \dfrac{y_0(x-1)}{x_0-1}, & x\in[x_0,1],\end{cases}$$



其中，$0<x_0<1$，$0<y_0\leqslant 1$，(x_0, y_0) 称为帐篷映射的顶点.

我们说映射 g 的迭代是指如下一列复合映射

$$g^0(x)=x,\ g^1(x)=g(x),\ \cdots,\ \ g^n(x)=g\left(g^{n-1}(x)\right),\ \cdots$$

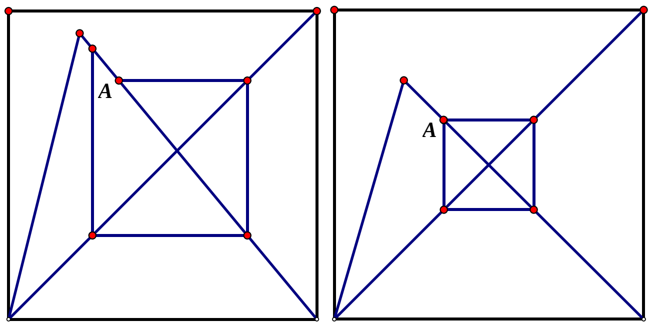
如果 $g^n(x)=x$，则称 x 为映射 g 的 n 周期点，特别地，当 $n=1$ 时，称 x 为映射 g 的不动点.

任给一个帐篷映射 f，f 迭代作用下点 x 的迭代蛛网图是指这样的过程：在直角坐标系中作出函数 f 的图像与直线 $y=x$ 的图像，过 f 的图像上一点 $\left(x, f(x)\right)$，做 x 轴的平行线交 y=x 于点 $(f(x), f(x))$，再过该点做 y 轴的平行线交 f 于 $(f(x), f^2(x))$，于是我们就得到了x 经过两次迭代后的值，按照上述步骤可以得到 x 迭代任意 n 次的值，这一过程所作出的轨迹称为点 $\left(x, f(x)\right)$ 的迭代蛛网图.

需要说明的是，迭代是一个初始值在一个函数下反复作用的过程，在蛛网图

中则是一个点的迭代过程，我们在后文中对这两者不加以区分，例如在后文中会出现“顶点的迭代”一类的表达.

若一个点是周期点，则其迭代蛛网图作出的轨迹是闭合的. 下面左图展示的就是帐篷映射中一点 A 的迭代蛛网图，而右图是点 A 为二周期点的情形.



这篇文章没有完全从动力系统的角度研究帐篷映射. 而是从另一种角度，更多的利用蛛网图的几何性质，来推演迭代的过程. 另外，本文也利用了一个特殊点，即帐篷右支与$y = x$的交点，我们在研究中发现，这个点对于一类周期点的分布有着重要的意义.

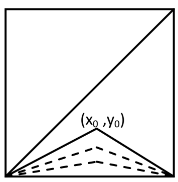
二、主要内容

设 f：$[0, 1] \to [0, 1]$ 为一个帐篷映射，定义如下：

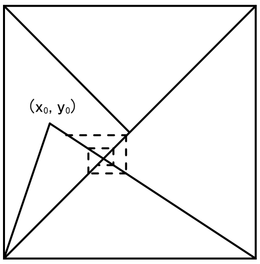
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{y_0 \cdot x}{x_0}, & x \in [0, x_0), \\[2ex] \dfrac{y_0(x-1)}{x_0-1}, & x \in [x_0, 1], \end{cases}$$

其中，$0<x_0<1$，$0<y_0\leq 1$，(x_0, y_0)称为帐篷映射的顶点. 我们有如下已知的结论：

(1) 当顶点 (x_0, y_0) 满足 $x_0>y_0$时，帐篷映射 f 有一个平凡不动点$(0, 0)$，不存在其他周期点，同时系统存在一个稳定的吸引子$(0, 0)$，即对 $\forall x \in (0,1)$，$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$.

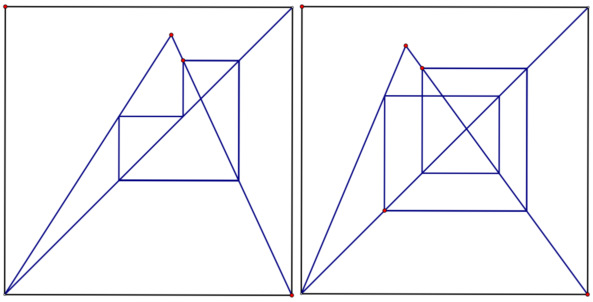


(2) 当顶点 (x_0, y_0) 满足 $x_0<y_0$ 且 $y_0+x_0<1$ 时，帐篷映射 f 有一个平凡不动点$(0, 0)$，同时系统存在一个稳定的吸引子$\left(\frac{y_0}{y_0-x_0+1}, \frac{y_0}{y_0-x_0+1}\right)$，即对 $\forall x \in (0,1)$，$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{y_0}{y_0-x_0+1}$. 此时，$\left(\frac{y_0}{y_0-x_0+1}, \frac{y_0}{y_0-x_0+1}\right)$是 f 的一个非平凡不动点.

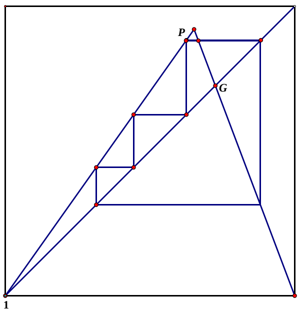


上述两种情况都是帐篷映射中比较简单的情况，存在稳定的吸引子，我们在下文中将不再讨论，而只有当顶点(x_0, y_0) 满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$ 时，帐篷映射才会出现非平凡周期点，此时情况也会变得更为复杂，这也是本文主要研究的区域.

定义 2.1：帐篷映射的周期点称为阶梯型周期点，若它在蛛网图中的周期轨没有自相交（下图左）；称为非阶梯型周期点，若它在蛛网图中的周期轨自相交（下图右）.



注：我们之所以把不自相交的情况称为阶梯型周期点，是因为不自相交的情况下其周期轨一定是像阶梯一样先增大，再一步减小到原来的值上，如下图



阶梯型周期点拥有比较好的性质，且方便研究，它的周期轨总是单调的增加，然后在某一步迭代到最小值

特别地，三周期点的蛛网图由六段直线围成，容易看出这样的图形无法自相交(即非阶梯型周期点)，于是，非阶梯型周期点至少为四周期点.

定理 2.2：设 f：$[0，1] \rightarrow [0，1]$上的为一个帐篷映射，其定义如下：

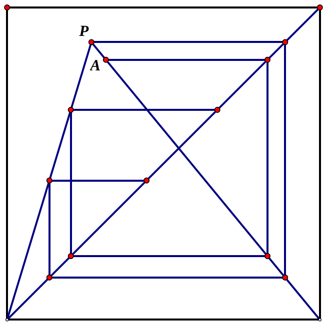
$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{\mathbf{y_0\cdot x}}{\mathbf{x_0}}, & \mathbf{x\in[0,x_0)},\\[2ex] \dfrac{\mathbf{y_0(x-1)}}{\mathbf{x_0-1}}, & \mathbf{x\in[x_0,1]},\end{cases}$$

其中,顶点(x_0, y_0)满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$. 则 f 存在三周期点当且仅当顶点(x_0, y_0)满足

$$x_0^2+x_0y_0+y_0^2-x_0-y_0\geq 0.$$

特别地，当 $x_0^2+x_0y_0+y_0^2-x_0-y_0=0$ 时，顶点(x_0, y_0)为三周期点.

证明：设 f 和直线 y=x 的交点为 $G(x_G, y_G)$，易知 x_0 迭代三次后的值为 $f^3(x_0)=\frac{y_0^3-y_0^2}{(x_0-1)x_0}$.



(1)若 $f^3(x_0)>x_0$，则 x_0 不是三周期点，考虑顶点右侧的点 A(a，f(a))，

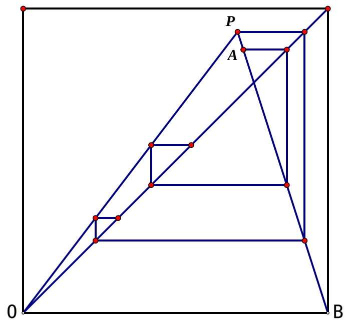
$a\in(x_0,x_G)$，其迭代三次后为

$$f(a)=\frac{y_1^3-y_1^2}{(a-1)a}.$$

由于直线 PO，PA 的斜率 k_{OP}，k_{PA} 绝对值都比 1 大，则

$$\left(f^3(a)-f^3(x_0)\right)=|k_{AP}|^2\cdot|k_{OP}|\cdot(a-x_0)>(a-x_0),$$

故 $f^3(a)>a$，于是 A 不是三周期点. 同理可证线段 PO 和 GB 上的点也不是三周期点.



(2)若 $f^3(x_0)\leq x_0$，定义函数

$$h(x)=f^3(x)-x_G,\quad x\in[x_0,x_G],$$

易知 h(x) 为连续函数. 首先，$h(x_0)=f^3(x_0)-x_G<0$，而当 x 靠近 x_G 时，存

在 $h(x)>0$，由介值定理知存在 $x_1\in[x_0,x_G]$ 使得 $h(x_1)=0$. 定义函数

$$g(x)=f^3(x)-x\,,\quad x\in[x_0,x_1],$$

则 $g(x_0)\le 0$, $g(x_1)>0$, 故存在 $x_2\in[x_0,x_1]$ 使得 $g(x_2)=0$, 于是 $(x_2, f(x_2))$ 为三周期点.

综上，三周期点存在当且仅当顶点满足 $f^3(x_0)\le x_0$，即

$$\frac{{y_0}^3-{y_0}^2}{(x_0-1)x_0}\le x_0,$$

化简得

$$x_0^2+x_0y_0+y_0^2-x_0-y_0\ge 0.$$

定理 2.3：设 f：$[0,1]\to[0,1]$上的为一个帐篷映射，其定义如下：

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{\mathbf{y_0\cdot x}}{\mathbf{x_0}}, & \mathbf{x\in[0,x_0)},\\[2ex] \dfrac{\mathbf{y_0(x-1)}}{\mathbf{x_0-1}}, & \mathbf{x\in[x_0,1]},\end{cases}$$

其中，顶点(x_0, y_0)满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$. 则 f 存在阶梯型 n 周期点当且仅当顶点(x_0, y_0)满足

$$\mathbf{x_0^n-y_0^n\ge x_0^{n-1}-y_0^{n-1}}\ .$$

特别地，当

$$\mathbf{x_0^n-y_0^n=x_0^{n-1}-y_0^{n-1}}$$

时，顶点(x_0, y_0) 为 n 周期点.

证明：根据定义，周期点是先在帐篷左支上迭代，再迭代到顶点右侧，一步迭代到最小值. 按定理一中的方法，将迭代 n 次后的点与初始值的差用帐篷的两支函数的斜率表示出来，可以得到类似的结论，即当且仅当 $f^n(x_0)\le x_0$ 时，n 周期阶梯型周期点才会存在. 对于顶点(x_0, y_0)，有

$$f(x_0)=y_0\,,\ f^2(x_0)=\frac{{y_0}^2-y_0}{x_0-1}\,,\ f^3(x_0)=\frac{{y_0}^3-{y_0}^2}{{x_0}^2-x_0},\ \cdots,\ f^n(x_0)=\frac{(y_0-1){y_0}^{n-1}}{(x_0-1){x_0}^{n-2}},$$

于是, $f^n(x_0)\le x_0$ 等价于

$$x_0^n-y_0^n\le x_0^{n-1}-y_0^{n-1}.$$

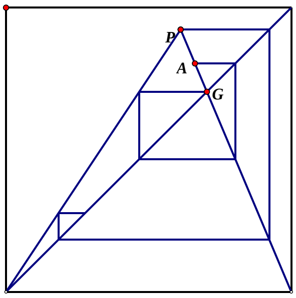
定理 2.4：设 f：$[0,1]\to[0,1]$ 上的为一个帐篷映射，其定义如下：

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{\mathbf{y_0\cdot x}}{\mathbf{x_0}}, & \mathbf{x\in[0,x_0)},\\[2ex] \dfrac{\mathbf{y_0(x-1)}}{\mathbf{x_0-1}}, & \mathbf{x\in[x_0,1]},\end{cases}$$

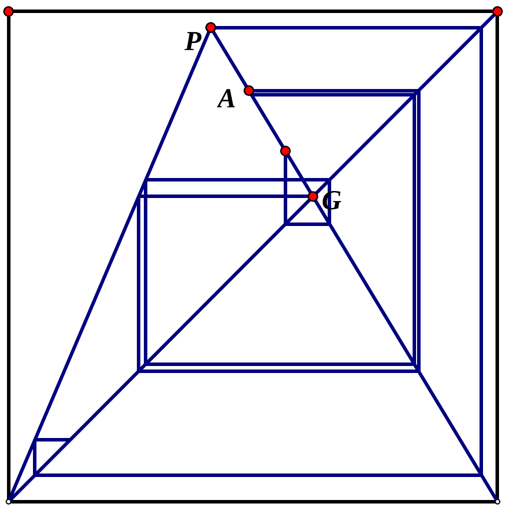
其中，顶点 (x_0, y_0) 满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$. 则 f 存在四周期点.

证明：设 f 和直线 y=x 的交点为 $G(x_G, y_G)$，我们分类讨论：

(1) 当 $f^3(x_0) < x_G$ 时，即顶点三次迭代后处于 G 点的下方，设 Q(a, f(a)) 为线段 PG 上的一个动点，



当 Q 离 G 点足够近时，其迭代三次后会到帐篷的右支， 此时 $x_G \le f^3(a)$， 由介值定理知线段 PG 上存在一点 A，其迭代三次后为 G. 我们将 A 点沿 PG 向下移动到 B，使它迭代三次后处于 G 点的上方，如图



由于 G 是一个排斥不动点， 那么 B 迭代四次后的点 C 则会沿 PG 向上移动，由介值定理可知总有一刻 B, C 两点重合，此点即为一个四周期点.
(2) 当 $f^3(x_0) > x_G$ 时, 同理可证四周期点存在.

注： 上述定理成立的一个很重要的条件就是当帐篷映射的顶点满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$ 时，顶点迭代四次后必然会在帐篷的右支上.

定理 2.5：设 f：$[0, 1] \to [0, 1]$上的为一个帐篷映射，定义如下：

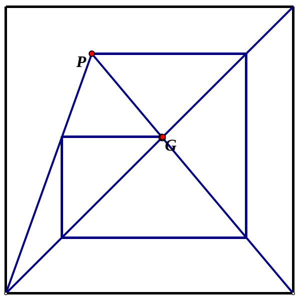
$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{y_0 \cdot x}}{\mathbf{x_0}}, & \mathbf{x \in [0, x_0)}, \\ \dfrac{\mathbf{y_0(x-1)}}{\mathbf{x_0 - 1}}, & \mathbf{x \in [x_0, 1]}, \end{cases}$$

其中，顶点 (x_0, y_0) 满足 $y_0 > x_0$ 且 $y_0 + x_0 > 1$. 若顶点 (x_0, y_0) 满足

$$\mathbf{{y_0}^2 + x_0 - 1 \geq 0},$$

则 f 存在偶数周期点.

证明：设 f 和直线 y=x 的交点为 $G(x_G, y_G)$，首先假设顶点迭代三次后为不动点 G，



即

$$x_G = f^3(x_0),$$

则

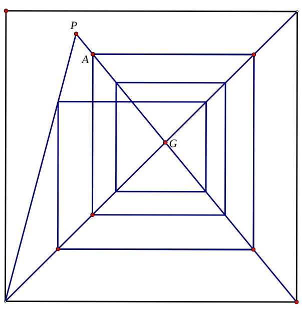
$$\frac{y_0}{y_0 - x_0 + 1} = \frac{{y_0}^3 - {y_0}^2}{(x_0 - 1)x_0},$$

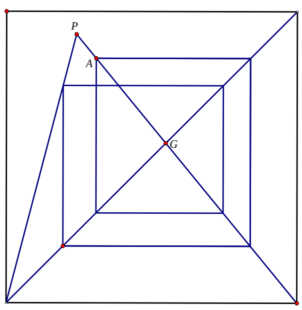
化简得

$${y_0}^2 + x_0 - 1 = 0.$$

进一步，当 ${y_0}^2 + x_0 - 1 > 0$ 时，$x_G > f^3(x_0)$；当 ${y_0}^2 + x_0 - 1 < 0$ 时，$x_G < f^3(x_0)$.

当 ${y_0}^2 + x_0 - 1 \geq 0$ 时，其顶点迭代三次后位于 G 点的下方，由定理 2.4 知线段 PG 上存在点 A，其迭代三次后为 G. 由于 G 是一个排斥不动点，一点迭代在 G 点附近后会被 G 点“排斥”，我们可以控制 A 点向下移动的距离，使得它在 G 点周围反复迭代后到帐篷的右支上，注意当 A 点往下移时，周期轨是只能是偶数阶的，这是因为蛛网图每绕 G 点一圈是迭代两次.





进一步,A 点迭代三次后越接近 G 的值,在排斥过程中就会产生更多的周期,我们控制其迭代三次后的点从四周期点开始接近于 G，就可以历遍每一个偶数周期. 因此，当顶点满足 ${y_0}^2 + x_0 - 1 \geq 0$ 时，任意偶数周期点存在.

推论 2.6（帐篷映射中的李约克定理）：设 f：$[0, 1] \to [0, 1]$ 上的为一个帐篷映射，定义如下：

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{y_0 \cdot x}}{\mathbf{x_0}}, & \mathbf{x \in [0, x_0)}, \\ \dfrac{\mathbf{y_0(x-1)}}{\mathbf{x_0 - 1}}, & \mathbf{x \in [x_0, 1]}, \end{cases}$$

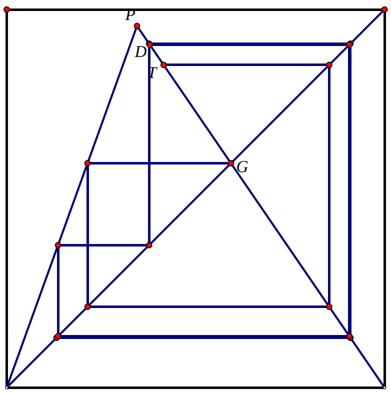
其中，顶点 (x_0, y_0) 满足 $y_0 > x_0$ 且 $y_0 + x_0 > 1$. 则当 f 存在三周期点时，其他任意周期点也存在.

证明：根据定理 2.2，当三周期点存在时，顶点 (x_0, y_0) 需满足

$${x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2 - x_0 - y_0 \geq 0.$$

而 ${x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2 - x_0 - y_0 \geq 0$ 蕴含 ${y_0}^2 + x_0 - 1 > 0$, 根据定理 2.5 知 f 存在任意偶数周期点.

设 f 和直线 y=x 的交点为 $G(x_G, y_G)$，当三周期点存在时，由前文易证在 $[x_0, x_G]$ 上存在一个三周期点,记为 $D(x_1, f(x_1)), x_1 \in [x_0, x_G]$. 根据定理 2.4，线段 PG 上存在点 $T(x_2, f(x_2))$ 满足 $f^3(x_2) = x_G$. 明显有 $x_1 < x_2$.



考虑动点 $A(a, f(a)), a \in [x_0, x_2]$, 设 A 迭代 n 次后的点为 $(f^n(a), f^{n+1}(a))$, 其中令 n 为任意大于 3 的奇数. 当 A 足够靠近 T 时，A 点迭代任意大于 1 的奇数次后的点都在 G 的左侧，可以让 $(f^n(a), f^{n+1}(a))$ 足够接近 G，此时有 $a < f^n(a)$.

当 A 点移动到三周期点时，有 $a > f^2(a) = f^5(a)$, 根据连续函数的介值定理知存在 $b \in [x_0, x_2]$ 满足 $b = f^5(b)$, 于是五周期点存在. 同理，当五周期点存在时可以推出七周期点存在, 依此类推可以证明所有的奇数周期点都存在. 又有上

文得所有的偶数点存在，定理由此得证 .

三、注记

3.1 关于定理 2.3 的几何意义

在定理 2.3 中，我们证明了顶点 (x_0, y_0) 满足 $y_0>x_0$ 且 $y_0+x_0>1$. 则 f 存在阶梯型 n 周期点当且仅当顶点 (x_0, y_0) 满足

$$x_0^n-y_0^n \geq x_0^{n-1}-y_0^{n-1} .$$

特别地，当

$$x_0^n-y_0^n=x_0^{n-1}-y_0^{n-1}$$

时，顶点 (x_0, y_0) 为 n 周期点. 我们考虑其临界条件 $x_0^2+x_0y_0+y_0^2-x_0-y_0=0$ 借助绘图工具，我们可以得出，$x_0^n-y_0^n=x_0^{n-1}-y_0^{n-1}$ 这个方程在正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 定义了一组随 n 增大而逐渐逼近正方形上边与右边的曲线，进一步我们可以得到，当顶点越靠近正方形右上角时，会产生越高阶的阶梯型周期点，这也是阶梯型周期点的另一个排布上的规律.

参考文献

[1] 钟云霄 ．混沌与分形浅谈．北京：北京大学出版社， 2010.
[2] 吕林根,许子道 .解析几何 北京：高等教育出版社，1960.
[3] 同济大学数学系 . 高等数学. 上海：高等教育出版社， 2007.
[4] 张景中,杨路 . 论逐段单调连续函数的迭代根．数学学报， 1983.
[5] 佩捷 . 李天岩-约克定理 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.

致 谢

从开始写作至本论文最终定稿，花费了我近三个月以来所有的业余时间. 作为一名高三学生，在繁忙的学习之余要完成这样一篇论文的确不是一件简单的事情. 我内心深处满含着深深的感激. 首先，我要感谢我的论文指导老师，四川大学的张伟年教授、李威博士对我的教导. 从初期论文选题、中期论文的撰写与修改、后期论文格式调整到最终的定稿等各个环节，两位老师都付出大量心血，在百忙之中给予我悉心的指导和积极的帮助，才使我能顺利完成论文. 他们对工作的认真负责、对学术的钻研精神和严谨的学风，都是值得我终生学习的.

同时，感谢我的家人在此期间给予我的包容、鼓励和照顾，正是由于他们的支持，我亦能在写作论文的同时安心学习.

我的论文还不是很成熟，还有很多不足之处，但写作的过程使我受益匪浅. 期望这次的经历能在今后的学习中激励我继续进步. 最后，我要向百忙之中抽时间对本论文进行审阅的各位老师表示衷心的感谢！

学术诚信声明

本人已仔细阅读丘成桐大赛相关学术诚信要求，坚决严格执行并在此郑重声明：本人所呈交的论文，是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表的成果。对本文研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者：成都石室中学 牛睿杰

2018 年 9 月 6 日