

参赛队员姓名: 陈兆君

中学: 华南师范大学附属中学国际部

省份: 广东

国家/地区: 中国

指导教师姓名: 郝保国

论文题目: 广义 Petersen 图的泛圈性和圈长分布

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知,除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处,本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员: 陈兆君 指导老师: 郝保国

2018 年 8 月 22 日

论文题目：广义 *Petersen* 图的泛圈性与圈长分布

作者：陈兆君

论文摘要：本文研究了广义 *Petersen* 图 $GP(n, k)$ 的泛圈性和圈长分布，并且彻底解决了 k 为奇数和 $k = 2$ 时 $GP(n, k)$ 的圈长分布。证明了广义 *Petersen* 图是具有大范围连续圈长的图类，具有很大的应用价值。

关键词：广义 *Petersen* 图 哈密尔顿性 泛圈性

目录

一、前言	4
二、 $GP(n, k)$ 的围长和周长	8
三、构件及其它相关概念	8
四、 $GP(n, 2)$ 的圈长分布	16
五、 k 为奇数， $GP(n, k)$ 的圈长分布	19
六、总结和展望	27

广义 Petersen 图的泛圈性与圈长分布

摘要

泛圈性由 Bondy([1])提出, 是指一个图具有长度从 3 到顶点数的所有圈。泛圈性问题是哈密尔顿性(存在不重复地遍历其所有顶点的圈, 即哈密尔顿圈)问题的自然延伸, 在通讯网络中具有重要的应用意义, 是图论中一个重要问题, 也称为圈的嵌入问题。现实中的网络图很难也不需要达到严格的泛圈性, 只需要具有大范围连续长度的圈即可(Hsu, L. H. [2])。工程师们不仅希望一个网络图具有丰富的圈长, 而且从成本角度考虑希望它是稀疏(顶点平均度数较小)、对称同时具有一定容错性的, 即任意删除若干顶点(设备故障)或若干条边(线路故障)后仍具有极丰富的圈长, 甚至保留泛圈性。

广义 Petersen 图正是满足上述要求的重要图类。它们是具有极强对称性的 3-正则图。因此, 我们着手研究该图类是否具有泛圈性, 如果没有则分析出其准确的圈长分布。该问题难度很大。解决广义 Petersen 图的哈密尔顿性问题就已历时十余年, 显然圈长分布问题比哈密尔顿性问题更复杂。所以, 我们只解决了大部分具有代表性的广义 Petersen 图的圈长分布问题。从我们的成果可见, 虽然部分广义 Petersen 图有少量圈长缺失, 没有泛圈性, 但它们的圈长分布具有明显的规律: 它们具有大部分可能的圈长, 且圈长在较大范围内连续分布。这说明广义 Petersen 图应用价值很大。

本文的主要贡献是提供了一系列分析广义 Petersen 图的新工具——构件及其输入/输出、收缩/扩张、扩张方程, 将圈长分布问题代数化, 转化为若干整数不定方程可解性问题。运用构件概念和相应的分析方法, 所有广义 Petersen 图的圈长分布问题极有可能在日后被彻底解决。

关键字: 广义 Petersen 图, 哈密尔顿性, 泛圈性

一、前言

1.1 图的圈长分布

如摘要中所述, 泛圈性是指一个 n 顶点的图 G 具有长度从 3 到 n 的圈。特别地, 当 G 是一个二部图时, G 的圈长一定是偶数, 所以只要 G 具有长度为 $[4, n]$ 内的所有偶数的圈, 就称 G 具有偶泛圈性。这两种泛圈性只是圈长分布的极端情况。为了研究圈长分布的一般情况, 我们首先要弄清一个图中最大的圈长(又称周长, 记为 $c(G)$)和最小的圈长(又称围长, 记为 $g(G)$)。如果 $[g(G), c(G)]$ 中的任一个整数 m , G 中都存在一个圈的长度等于 m , 则称 G 具有弱泛圈性。当 G 为二部图, 只要 $[g(G), c(G)]$ 中的任一个偶数 m , G 中都存在一个圈的长度等于 m , 就称 G 具有弱偶泛圈性。显然, 泛圈性和偶泛圈性分别是弱泛圈性和弱偶泛圈性的特例。

在边比较稠密时, 具有泛圈性是比较容易的。Bondy([3])在 70 年代就已经证明了当 G 的边数不小于 $\frac{n^2}{4}$, G 就具有泛圈性。所以一个很自然的问题就是如何用稀疏的图产生泛圈性。这个问题有很重要的现实意义, 因为稀疏意味着将这个图物理实现时低成本。一个稀疏图具有泛圈性的例子就是轮状图, 如图 1 所示。然而此图度数分布过分集中于 A 点, 导致此图无容错性: 一旦删去 A, 此图退化为一个圈, 仅有一种圈长。所以我们追求的是度数分布均匀, 高度对称, 且具有(弱)泛圈性, 或者退而求其次,

具有大范围连续圈长的稀疏图。本文的成果说明广义 *Petersen* 图正是这样的一个图类。

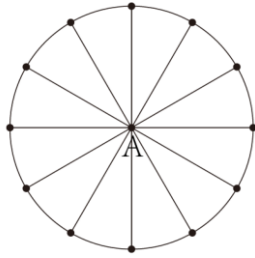


图1 轮状图

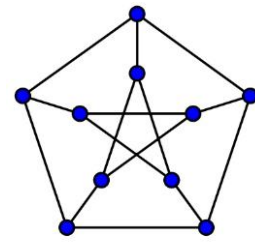


图2 标准的 *Petersen* 图

1.2 广义 *Petersen* 图及其圈结构

标准的 *Petersen* 图(定义见 West 的教材[4]), 如图2所示, 是只有 10 个顶点的 3-正则图, 对称性很强。*Petersen* 图在图论中非常调皮, 在很多研究成果中, 它扮演唯一的或最小的反例; 例如, Bondy([7])指出它是最小的超哈密尔顿图(hypo-Hamiltonian graph, 超哈密尔顿图: 本身无哈密尔顿圈, 但去掉任一顶点所得的图都有哈密尔顿圈)。

1969 年, 在研究 3-正则图的染色问题时, Watkins[5]引入了广义 *Petersen* 图。

一个广义 *Petersen* 图 G 有两个整数参数 n 和 k , 通常记为 $GP(n, k)$, 其中 $0 < k < \frac{n}{2}$ 且 $n > 4$, 其顶点集合 $V(G) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, 边集合 $E(G) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+k}, u_i v_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$, 其中所有下标值对 n 取模。我们常记 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ 和 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ 。图 3 左侧是 $GP(n, 2)$ 的示意图。依定义, $GP(5, 2)$ 就是标准的 *Petersen* 图。

圈 $u_0 - u_1 - \dots - u_{n-1} - u_0$ 称为 $GP(n, k)$ 的外圈。当 n, k 互质, $v_0 - v_k - v_{2k} \dots - v_{(n-1)k} - v_0$ 构成 1 个圈; 当 $(n, k) = d > 1$, 下标值模 d 同余的 v_i 分别组成 1 个圈, 合共 d 个圈。无论是 1 个圈还是 d 个圈, 都统称为内圈。可将广义 *Petersen* 图比作一有内外圈的车轮, $u_i v_i (0 \leq i \leq n-1)$ 称为轮辐边。图 3 右侧是 $GP(n, 2)$ 的 2 个例子。

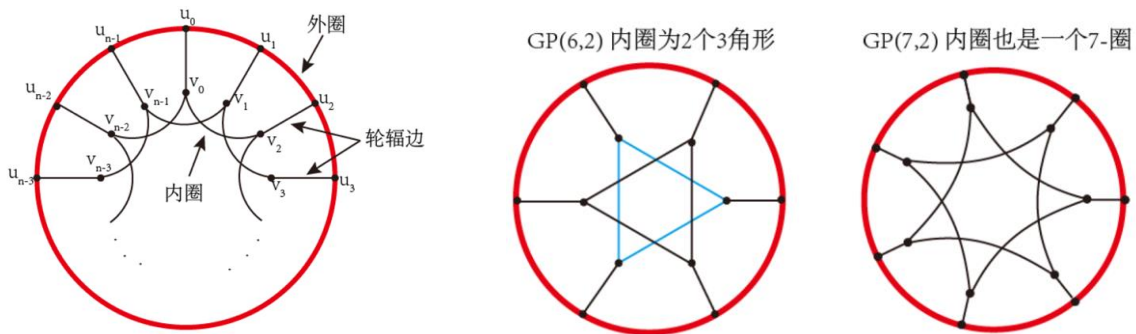


图3 广义 *Petersen* 图 $GP(n, 2)$

广义 *Petersen* 图是高度对称的 3-正则图。一经提出, 其哈密尔顿性就受到广泛的关注。从 1969 年 Robertson([6])对 $GP(n, 2)$ 的哈密尔顿性的研究开始, 历经 Bondy([7])、Bannai([8])、Alspach[9]等数学家的工作, 广义 *Petersen* 图的哈密尔顿性问题终于在 1983 年被彻底解决。最终结论如下:

引理 1. $GP(n, k)$ 是哈密尔顿的, 除非 $GP(n, k) \cong GP(6t + 5, 2)$, $t \geq 0$ 。

对于广义 *Petersen* 图等高度对称的图类, 在理论和实际应用中, 人们往往既期望

它们有哈密尔顿圈, 也期望它们有丰富的圈结构。因此除了哈密尔顿性, 泛圈性也是广受关注的性质。在本文中, 我们研究了广义 *Petersen* 图的泛圈性和圈长的分布。我们引入了一个新概念——构件, 发展了运用构件构建圈的方法, 并彻底解决了 k 为奇数和 $k = 2$ 情况下 $GP(n, k)$ 的圈长分布。

为了初步估计广义 *Petersen* 图的圈长范围, 我们首先理清它们的围长和周长。由前述哈密尔顿性的成果以及我们自己的分析, 对于围长和周长, 我们证明了如下的结果(本节列出所有定理, 其证明在后续章节之中):

定理 1. 若 $G = GP(n, k)$ 不同构于任意 $GP(n, k')$, $k' < k$, 则 $g(G) = \min(\frac{n}{(n, k)}, k + 3, 8)$ 。当 $GP(n, k) \cong GP(6t + 5, 2)$, $c(G) = 2n - 1$, 否则 $c(G) = 2n$ 。

理清广义 *Petersen* 图的围长和周长后, 本文解决了 k 为奇数和 $k = 2$ 时广义 *Petersen* 图的圈长分布。得到以下结论:

定理 2. 若 k 为奇数, $GP(n, k)$ 的圈长分布如下:

- 1) 偶数长度的圈: $GP(n, k)$ 有长度为 $4k$ 到 $2n + 2 - k$ 之间的所有偶数的圈。进一步, 当 $n \geq k^2 + \frac{7}{2}k - 4$, $GP(n, k)$ 有长度为 $g(G)=6$ or 8 到 $c(G) = 2n$ 之间的所有偶数的圈。特别地, 当 n 为偶数, $GP(n, k)$ 是二部图, 具有弱偶泛圈性;
- 2) 奇数长度的圈: 只有 n 为奇数, 才有奇圈。设 r' 是 n 除以 k 的余数, $GP(n, k)$ 有长度为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + \Delta(r')$ 到 $2n + 2 - k$ 之间的所有奇数的圈。当 $r' > 1$, $GP(n, k)$ 还有长度为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + \Delta(r') - 4$ 的圈; 当 $r' = 0$, $GP(n, k)$ 还有长度 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ 的圈。其中

$$\Delta(r') = \begin{cases} 6 & (r' = 0) \\ 3 & (r' = 1) \\ 6 + r' & (2 \leq r' < \frac{k+1}{2}) \\ k + 7 - r' & (r' \geq \frac{k+1}{2}) \end{cases}$$

定理 3. $GP(n, 2)$ 圈长分布如下:

- 1) 当且仅当 $n \not\equiv 5 \pmod{6}$, $GP(n, 2)$ 有哈密尔顿圈;
 - 2) 当且仅当 $n \not\equiv 4 \pmod{6}$, $GP(n, 2)$ 有长 $2n - 1$ 的圈;
 - 3) 所有的 $GP(n, 2)$ 都有圈长为 5 以及 $8 \sim 2n - 2$ 的圈;
 - 4) 当且仅当 $n = 6, 7, 8, 9, 14$, $GP(n, 2)$ 有长为 7 的圈;
 - 5) 当且仅当 $n = 5, 6, 7, 9, 12$, $GP(n, 2)$ 有长为 6 的圈;
 - 6) 当且仅当 $n = 8$, $GP(n, 2)$ 有长为 4 的圈;
 - 7) 当且仅当 $n = 6$, $GP(n, 2)$ 有长为 3 的圈。
- 推论: 只有 $GP(7, 2)$ 和 $GP(9, 2)$ 具有弱泛圈性。

$k = 1, 3$ 的时候有一定特殊性, 其圈长分布达到了 k 为奇数时的理论最大可能, 作为定理 2 的特例, 我们有

定理 4. $k = 1, 3$ 时, $G = GP(n, k)$ 的圈长分布如下:

- 1) $k = 1$ 或 3 时, 当 n 为偶数, $GP(n, k)$ 是二部图, 且具有(弱)偶泛圈性, 即从 $g(G)$ 到 $c(G)$ 的圈长的偶圈都存在;
- 2) $k = 1$ 或 3 时, 当 n 为奇数, $GP(n, k)$ 的圈长从 $g(G)$ 到 $c(G)$ 的偶圈都存在; 而圈长为

属于 $\{\frac{n}{k}, [\frac{n-1}{k}] + 3 \sim 2n - 1\}$ 的奇数的圈也都有, 除此之外不存在其它奇数长度的圈。

奇圈的分布研究难度较大, 我们也得到一些研究成果, 包括一个奇圈长的下界:

定理 5: 当 k 是奇数, $GP(n, k)$ 不会出现圈长小于 $\frac{n}{k}$ 的奇圈。

从我们的成果可见, 广义 *Petersen* 图虽然稀疏, 但是却具有大部分可能的圈长, 且它们的圈长在较大的范围内连续分布。

本文研究圈长分布的思路首先是将圈长分布转换为偏差度的分布的研究。所谓偏差度, 就是 $GP(n, k)$ 中一个圈 C 与其哈密尔顿圈的长度差, 偏差度为 r , 圈长就是 $2n - r$ 。显然偏差度分布分析清楚了, 圈长分布自然也就清楚了。

研究偏差度的主要好处在于它可以进行分解。圈 C 的偏差度, 就是 $GP(n, k)$ 顶点中不在 C 上的总个数。这些顶点显然是分布在圈 C 包含的两条轮辐边之间的。所以很自然地, 我们把夹在圈 C 包含的相邻两条轮辐边之间的部分称为构件, 夹在两条轮辐边之间不属于圈 C 的顶点数就作为构件的偏差度。圈 C 可以视为由这些构件拼接而成, 其偏差度就是这些构件的偏差度之和。

第一步要做的工作是把构件参数化描述, 第一个参数就是两条轮辐边夹着外圈的部分是否全部属于 C , 是就称为“凸”, 否则称为“凹”。第二个参数就是两条轮辐边的距离, 即两条轮辐边夹着外圈的部分的长度。第三个参数用于描述两条轮辐边夹着内圈的部分与 C 的关系。因为两条相邻轮辐边夹着(包括相交)内圈部分的所有边是否属于 C , 完全由(沿下标增加的方向)首次进入构件的 k 条边决定, 所以我们将首次进入构件的 k 条边作为第三个参数, 也是最重要的一个参数。这些边中属于 C 的边记为 1, 不属于 C 的边记为 0, 构成 1 个 k 元 0-1 向量, 称为构件的输入。为了方便分析可拼接性, 我们将最后离开构件的 k 条边是否属于 C 构成的 k 元 0-1 向量称为构件的输出。

第二步, 我们要确定什么样的构件才可以拼接起来, 很容易就分析得到, 两个相邻构件能够拼接在一起, 必须凹凸交替, 并且满足前驱构件的输出与后续构件的输入成首位分量取反再轮换这样的代数关系, 这样才可以保证轮辐边夹着的点, 在 C 中都是 2 度或者 0 度(不属于 C)。

第三步, 我们发现一个重要的规律, 就是在一个圈 C 中, 构件长度增加 k , 不会改变其凹凸性、输入输出, 也就是不会改变它和前驱、后继的可拼接性, 同时也不会让 C 增加连通分支数, 即依然保持是一个圈。构件长度每增加 k , 其偏差度也同时增加, 并且增量是一个由其前驱构件的输出决定的常量。有些特殊的构件, 甚至可以长度增加 1 而保持凹凸性、输入输出、连通分支数不变, 其偏差度的增量也是常量。

第四步, 在第三步的基础上, 任意一个圈 C 都可以进行第三步的逆过程, 即构件长度收缩, 直至不能再收缩, 任意构件的长度都不大于 k , 我们把这样不能再收缩的圈, 称为原生圈。我们的核心想法是找出一些极小的具有多种不同输入输出的构件的原生圈, 并且它是哈密尔顿圈, 其初始偏差度为 0。然后对每个构件进行若干次扩张, 因为输入输出种类丰富, 所以扩张的偏差度增量也很丰富, 进而很有可能扩张(增量的线性组合)出大范围连续的偏差度。再辅以一些理论分析, 确定偏差度的上下界, 我们就可以得到偏差度的分布, 进而知道圈长的分布, 有无(弱)(偶)泛圈性等。

对于 k 为奇数时, 我们的确找到了这样的哈密尔顿型的原生圈, 能完全确定 $GP(n, k)$ 的圈长分布, 得到定理 2。在 $k = 2$ 时, 原生圈很有限, 可以穷尽, 我们也能完全确定 $GP(n, 2)$ 的圈长分布。当 $k \geq 4$ 为偶数, 原生圈结构较为复杂, 但我们猜想 k 越大, $GP(n, k)$ 具有弱泛圈性的可能性越大。限于时间和篇幅, 我们把对于 $k \geq 4$ 为偶

数的情况的分析作为下一步的工作, 并在文末提出我们可能运用的一些思路和方法。

本文的组织如下: 在前言之后, 第二部分我们确定 $GP(n, k)$ 的围长、周长(定理 1)。在第三部分, 我们定义构件和其它相关的概念, 并介绍如何运用构件分析圈结构。在第四部分我们运用构件求出 $GP(n, 2)$ 的所有可能圈长分布(定理 3)。在第五部分我们运用构件求出 $GP(n, k)$ 且 k 为奇数的所有可能圈长分布(定理 2)。第六部分是总结和展望。

二、 $GP(n, k)$ 的围长、周长

定理 1. 若 $G = GP(n, k)$ 不同构于任意 $GP(n, k'), k' < k$, 则 $g(G) = \min(\frac{n}{(n, k)}, k + 3, 8)$ 。
当 $G \neq GP(6t + 5, 2)$, $c(G) = 2n$, 否则 $c(G) = 2n - 1$;

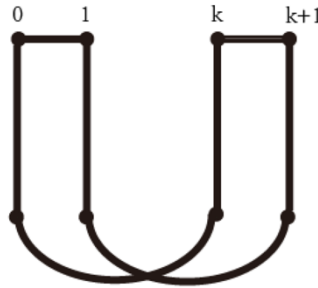


图4 $GP(n, k)$ 的8-圈

证明: G 的圈 C 分为三种情况。第一、不含有任何轮辐边, 即为内圈或外圈, 这时圈长较小的是内圈, 长度为 $\frac{n}{(n, k)}$; 第二、刚好包含 2 条轮辐边, 圈 C 包含内外圈的边数等于 $1:k$, 圈长最小为 $k + 3$; 第三、包含 4 条或以上轮辐边, 此时圈长至少为 8, 而图 4 就是一个长度为 8 的圈。综合就有 $g(G) = \min(\frac{n}{(n, k)}, k + 3, 8)$ 。至于周长, 根据引理 1 知道当 $G \neq GP(6t + 5, 2)$, $c(G) = 2n$, 否则 $c(G) = 2n - 1$ 。■

引理 2: n 为偶数, k 为奇数, 则 $GP(n, k)$ 是二部图, 包含的圈的长度都是偶数。

证明: n 为偶数, 可用 2 种颜色给外圈的顶点交替染色, 而内圈的点 v_i 染成和 u_i 不同颜色。这时, 内圈一条边的 2 个端点的颜色是否相异等价于外圈 2 个距离为 k 的顶点颜色是否相异, 而外圈距离为奇数的 2 个顶点肯定是异色的。所以 $GP(n, k)$ 可 2-染色, 是二部图。而二部图的圈都是偶数长度的。■

三、构件和其它相关的概念

在[7]中, Bondy 为了研究具有超哈密顿性的 n 顶点图最少要有多少条边, 他研究了 $GP(n, 2)$ 的超哈密顿性, 并证明了当 n 为奇数时 $GP(n, 2)$ 就具有超哈密顿性。他的方法非常简洁且富有启发性, 本文基于 Bondy 的思路和方法, 发展出“构件”这个重要概念, 运用代数方法分析“构件”如何环形排列拼接出不同长度的圈, 从而更全面地研究广义 Petersen 图的圈长分布。“构件”可作为研究广义 Petersen 图的圈和路结构的一个强有力的工具。特别地, 我们利用构件这个分析工具, 完全解决了 $GP(n, 2)$ 和 $GP(n, 2t + 1)$ 的圈长分布问题。

3.1 定义

$GP(n, k)$ 的外圈和内圈都称为普通圈, 其它圈称为非普通圈。显然, 非普通圈一定

包含大于 0 的偶数条轮辐边。

$GP(n, k)$ 的子图 C 是一个非普通圈(以下除非特别声明, 默认 C 为非普通圈), 则 C 与外圈的交集是若干条互不相交的路, 如图 5。不妨假设 C 上按圆周顺序相邻的 2 条轮辐边为 $u_i v_i, u_j v_j \in E(C), i < j$, 记 $U = \{u_i, u_{i+1}, \dots, u_j\}$ 和 $V = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$ 。这时定义 C 中所有和 U 或 V 中的点关联的边组成的图 G 为构件。即 $E(G) = \{uv | \{u, v\} \cap (U \cup V) \neq \emptyset\}, V(G) = \{x | \exists y xy \in E(G)\}$ 。 U 中的点称为构件 G 的“外点”, V 中的点称为构件 G 的“内点”。路 $u_i - u_{i+1} - \dots - u_{j-1} - u_j$, 要么所有边都在 C 上, 要么所有都不在 C 上, 前一情况构件称为“凸构件”, 后一情况构件称为“凹构件”。

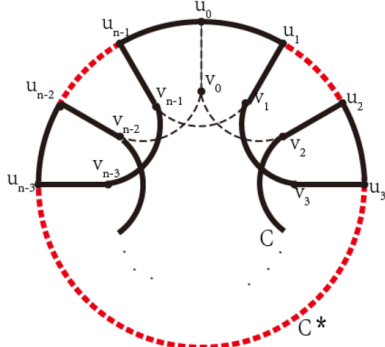


图 5 $GP(n, 2)$ 的圈 C 和外圈相交

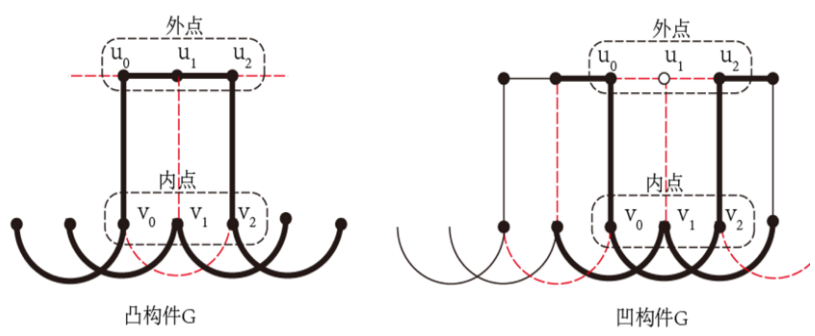


图 6 凸、凹构件组成示例

一个圈 C 由多个构件通过凹凸交替拼接而成。图 6 就是 2 个 $GP(n, 2)$ 的构件的例子, 粗线部分为构件 G , 红色虚线是辅助性的, 表示此边不属于 $E(C)$ 。

注意, 外点和内点未必是 G 的顶点, 而是由 G 的结构决定的外圈和内圈上的两组点。

3.2 构件的关键属性

我们定义 $GP(n, k)$ 的一个非普通圈 C 生成的构件 G 的以下属性:

设 G 的外点为 $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j$, 内点为 $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j$, 其中 $0 \leq i < j$ 。

- 1) 长度: 路 $u_i - u_{i+1} - \dots - u_{j-1} - u_j$ 的长度称为 G 的长度, 记作 $L(G)$, 显然 $L(G) = j - i$, 而 $L(G) + 1$ 就是外点总数, 也是内点总数。
- 2) 输入和输出: 如图 7 所示, 把沿坐标增大方向首次进入构件的 k 条边是否属于 $E(C)$, 作为其输入 $I(G) = (\varphi(i - k), \varphi(i - k + 1), \dots, \varphi(i - 1))$ 。把最后离开构件的 k 条边是否属于 $E(C)$, 作为其输出 $O(G) = (\varphi(j + 1 - k), \varphi(j + 2 - k), \dots, \varphi(j))$, 其中, 函数

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & v_s v_{s+k} \in E(C) \\ 0 & v_s v_{s+k} \notin E(C) \end{cases}$$

“输入”、“输出”对研究构件之间如何拼接成一个圈, 非常重要。

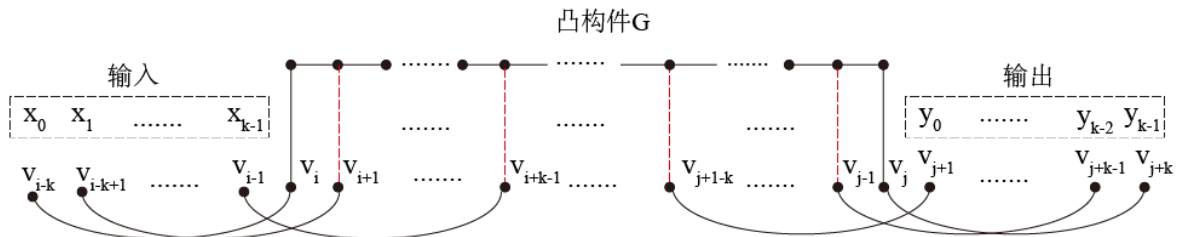


图 7 构件输入、输出的定义

- 3) 偏差度: 如图 8 所示, G 的内点和外点中不属于 $V(C)$ 的个数, 称为 G 的偏差度, 记为 $Q(G)$ 。偏差度对于计算由多个构件拼接而成的圈的长度非常重要。

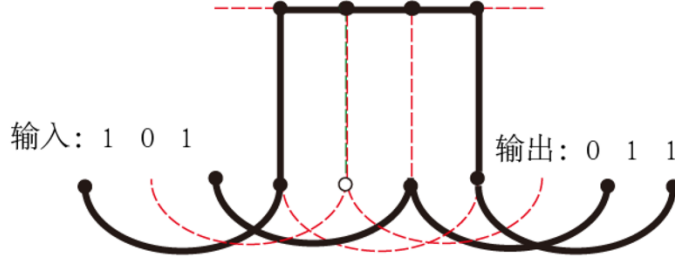


图8 $GP(n, 3)$ 中一个偏差度为 1 的凸构件

3.3 构件各属性之间的关系

3.3.1 构件的输出由输入和长度决定

引理 3: $u_i v_i$ 是轮辐边, 若 $u_i v_i \in E(C)$, 则 $\varphi(i - k) = 1 - \varphi(i)$; 若 $u_i v_i \notin E(C)$, 则 $\varphi(i - k) = \varphi(i)$ 。

证明:

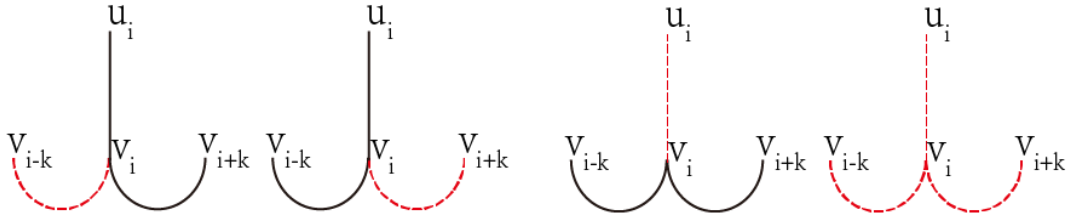


图 9 引理 3 的四种情况

如图 9, 实线代表边属于 $E(C)$, 虚线代表边不属于 $E(C)$, 根据 v_i 只能在 C 上 2 度或不在 C 上, 共 4 种情况。逐一验证就可证明引理 3。■

接着我们定义 3 类 k 元 0-1 向量之间的函数变换:

1) $E(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ 恒等变换

2) $f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_0)$ 循环左移; f 的逆 $f^{-1}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = (x_{k-1}, x_0, \dots, x_{k-3}, x_{k-2})$ 循环右移

3) $h_i(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{k-1}) = (x_0, \dots, 1 - x_i, \dots, x_{k-1})$, h_i 为第 i 位取反 ($0 \leq i \leq k - 1$), 而对任意整数 s , 定义 $h_s = h_{s \bmod k}$ 。

容易验证: $f^k = f^{-k} = h_i^2 = E, h_i h_j = h_j h_i$ 。

引理 4: s 为任意整数, 则 $h_s f = f h_{s+1}$ 。

证明: 循环左移后的第 s 位, 是左移前的 $s + 1$ 位, 对其取反, 相当于先对原来的第 $s + 1$ 位取反, 再进行循环左移。■

P1: G 为构件, 则 $O(G) = f^{L(G)+1} h_{L(G)} h_0 (I(G)) = h_{-1} f^{L(G)+1} h_0 (I(G))$ 。

证明: 根据定义, $I(G) = (\varphi(i - k), \varphi(i - k + 1), \dots, \varphi(i - 1))$, $O(G) = (\varphi(j + 1 - k), \varphi(j + 2 - k), \dots, \varphi(j))$ 。对于任意 s , 向量 $(\varphi(s), \varphi(s + 1), \dots, \varphi(s + k - 2), \varphi(s +$

$k-1)$ 到 $(\varphi(s+1), \dots, \varphi(s+k-2), \varphi(s+k-1), \varphi(s+k))$ 的变换相当于前者的 $\varphi(s)$ 变为 $\varphi(s+k)$, 再循环左移一次。根据引理 3, 如果 $u_{s+k}v_{s+k}$ 在圈 C 上, $\varphi(s+k) = 1 - \varphi(s)$, 变换为 fh_0 ; 否则 $\varphi(s+k) = \varphi(s)$, 变换为 f 。

s 依次取值从 $i-k$ 到 $j-k$, 这 $j-i+1$ 个变换复合为从 $I(G)$ 到 $O(G)$ 的变换。因为只有 u_iv_i, u_jv_j 在 G 上, 所以第 1 次变换为 fh_0 , 最后 1 次也是 fh_0 , 中间经过 $j-i-1 = L(G) - 1$ 次变换为 f 。

$$O(G) = fh_0 \cdot f^{L(G)-1} \cdot fh_0(I(G)) = fh_0 \cdot f^{L(G)}h_0(I(G))$$

由引理 4, 我们马上有

$$O(G) = f^{L(G)+1}h_{L(G)}h_0(I(G)) = h_{-1}f^{L(G)+1}h_0(I(G))$$

命题得证。■

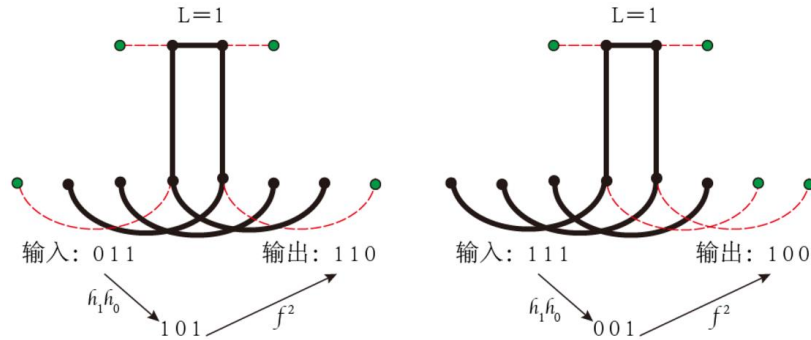


图 10 $GP(n, 3)$ 中 2 个长度为 1 的构件的输入和输出的关系

当给定凹凸性、输入 $I(G)$ 和长度 $L(G)$, 不仅可以确定输出 $O(G)$, 事实上, 整个构件 G 都可以确定, 因为外圈情况又凹凸性和长度决定, 而内圈情况则由 $\varphi(i-k)$ 到 $\varphi(j)$ 决定, 而它们由输入决定。图 10 是 $GP(n, 3)$ 中 2 个长度为 1 的构件的输入和输出的关系, 可以验证它们都满足P1。

3.3.2 构件之间的拼接关系

从 3.3.1 可以知道, 一个构件完全由其凹凸性、长度和输入 3 者决定, 多个构件相当于多块积木, 它们拼接起来围成一圈, 进而构成一个圈 C , 我们要研究的就是哪些积木可以互相拼接。

定义: 构件之间的拼接关系。

2 个凹凸性相反的构件 G_1, G_2 , 如果满足 $fh_0(I(G_2)) = O(G_1)$, 就称 G_1, G_2 是可拼接的, G_1 为 G_2 的前驱构件(简称前驱), 称 G_2 为 G_1 的后续构件(简称后续)。注意, 这里定义的拼接关系是有序的。同一个圈 C 产生的 2 个相邻的构件肯定是可拼接的, 但是可以依次拼接的构件拼成一个环, 得到的是 2-正则图, 但不一定是一个圈。

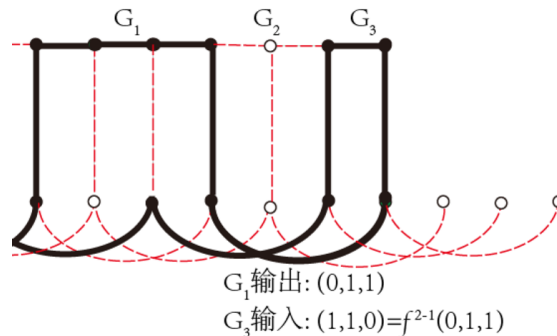


图 11: $GP(n, 3)$ 中 3 个可拼接的构件

P2: 构件 G_1, G_2, G_3 是可拼接的, 那么 $I(G_3) = f^{L(G_2)-1}(O(G_1))$ 。

证明: 用类似 **P1** 的证明方法, G_1 的 k 条输出边, 变换到 G_3 的 k 条输入边, 中间没有碰到过属于 $V(C)$ 的轮辐边, 所以是 $L(G_2) - 1$ 次循环左移。■ **P2** 说明了, G_1 的输出和 G_3 的输入是轮换关系, 而且它们的凹凸性也是一样的, 如图 11。

3.3.3 偏差度的计算

P3: G_1, G_2 是可拼接的, G_2 为凸构件, 偏差度 $Q(G_2) = \sum_{s=0}^{L(G_2)-2} \bar{o}_s$, 其中 $O(G_1) = (o_0, o_1, o_2, \dots, o_{k-1})$, 其中 $\bar{o}_s = 1 - o_s, o_s = o_{s-k} (s > k)$, 下同。

证明: 因为 G_2 为凸构件, 只有除两轮辐边端点外的 $L(G_2) - 2$ 个内点有可能不属于 $V(C)$ 。而这些内点是否属于 $V(C)$ 取决于 $O(G_1)$ 中 0 的个数并且以 k 个点为周期重复。合起来有偏差度 $Q(G_2) = \sum_{s=0}^{L(G_2)-2} \bar{o}_s$ 。■

P4: G_1, G_2 是可拼接的, G_2 为凹构件, 偏差度 $Q(G_2) = L(G_2) - 1 + \sum_{s=0}^{L(G_2)-2} \bar{o}_s$, 其中 $O(G_1) = (o_0, o_1, o_2, \dots, o_{k-1})$ 。

证明: 证明方法完全类似 **P3**, 只不过因为 G_2 为凹构件, 外点必定有 $L(G_2) - 1$ 个不属于 $V(C)$, 所以偏差度 $Q(G_2) = L(G_2) - 1 + \sum_{s=0}^{L(G_2)-2} \bar{o}_s$ 。■

从可拼接的定义知道前驱构件的输出和本构件的输入可以互相转换, 所以一个构件的偏差度也是由凹凸性、输入和长度完全确定的。

3.3.4 构件凸凹交替拼接成圈

假设 $2m (m > 0)$ 个构件 $G_0, G_1, \dots, G_{2m-1}$ 环接成为 $GP(n, k)$ 的一个圈 C , 圈长 $|V(C)| = 2n - r$ ($0 \leq r \leq 2n - 3$)。定义 r 为圈 C 的偏差度。不失一般性地设 G_0 为凸构件, 同时为了方便表述, 我们定义对于任意整数 i , $G_i = G_{i \bmod 2m}$ 。

以下所有命题, 都基于以上记号和假设。

P5: $r = \sum_{i=0}^{2m-1} Q(G_i)$ 。

证明: 根据圈和构件偏差度的定义马上得证。■

P6: $I(G_i)$ 中 1 的总个数和 $O(G_i)$ 中 1 的总个数的奇偶性一样。

证明: 因为 2 次取反和轮换都不会改变 1 的总个数的奇偶性, 根据 **P1**, 命题成立。■

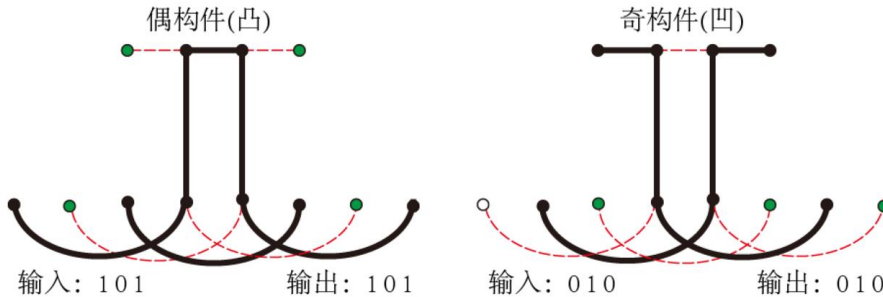


图 12 $GP(n, 3)$ 中的奇构件和偶构件例子

定义: 这时我们可以定义构件的奇偶性, 若 $I(G_i)$ 中 1 的总个数为偶数, 则称为偶构件,

否则称为奇构件。图 12 是奇偶构件的样例。

P7: 构件 G_1, G_2 是可拼接的, 那么 G_1, G_2 的奇偶性相反。

证明: 因为 1 次取反改变向量中 1 的总个数的奇偶性, 而轮换不会改变向量中 1 的总个数的奇偶性, 再根据可拼接的定义 $fh_0(I(G_2)) = O(G_1)$, 可知命题成立。■

P7说明了构件拼接不仅是凹凸交替的, 而且是奇偶交替的。这样所有凸构件的奇偶性一样, 同理, 所有凹构件的奇偶性一样。这种奇偶性的限制, 对我们分析构件之间的环接很重要, 可以大大减少组合的可能性。接下来, 我们将会证明当 k 为奇数, 而所有凸构件都为偶的时候, 环接产生的圈长都是偶数; 而当所有凸构件都为奇的时候, 环接产生的圈长有下界为 $\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 3$ 。

P8: 若所有凸构件输入均不为全 0, 即不存在 $0 \leq i < m$, 满足 $I(G_{2i}) = (0, 0, \dots, 0)$, 则非普通圈 C 圈长不小于 $\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 3$ 。

证明: 因为所有凸构件输入均不为全 0, 根据**P2**, 所有凸构件输出也均不为全 0。所以凹构件 G_{2i+1} 至少有 $\left\lceil \frac{L(G_{2i+1})-1}{k} \right\rceil + 4$ 个点属于 $V(C)$, 故 $Q(G_{2i+1}) \leq 2L(G_{2i+1}) + 2 - \left\lceil \frac{L(G_{2i+1})-1}{k} \right\rceil - 4 = 2L(G_{2i+1}) - \left\lceil \frac{L(G_{2i+1})-1}{k} \right\rceil - 2$ 。另一方面, 凸构件最多有 $L(G_{2i}) - 1$ 个内点不属于 $V(C)$, 故 $Q(G_{2i}) \leq L(G_{2i}) - 1$ 。根据**P5**, $r = \sum_{i=0}^{2m-1} Q(G_i) \leq \sum_{i=0}^{m-1} (L(G_{2i}) - 1) + \sum_{i=0}^{m-1} (2L(G_{2i+1}) - \left\lceil \frac{L(G_{2i+1})-1}{k} \right\rceil - 2) = n - 3m + \sum_{i=0}^{m-1} (L(G_{2i+1}) - \left\lceil \frac{L(G_{2i+1})-1}{k} \right\rceil)$ 。又因为 $\left\lceil \frac{L(G_{2i+1})-1}{k} \right\rceil \geq \frac{L(G_{2i+1})-1}{k} - \frac{k-1}{k} = \frac{L(G_{2i+1})}{k} - 1$, 所以 $r \leq n - 3m + \sum_{i=0}^{m-1} (L(G_{2i+1}) - \frac{L(G_{2i+1})}{k} + 1) = n - 2m + \frac{k-1}{k} \sum_{i=0}^{m-1} L(G_{2i+1})$ 。又 $m \geq 1, \sum_{i=0}^{m-1} L(G_{2i+1}) \leq n - m$, 所以 $r \leq n - 2m + \frac{k-1}{k} (n - m) = \frac{(2k-1)n - 3km + m}{k} \leq \frac{(2k-1)n - 3k + 1}{k}$ 。圈长 $2n - r \geq \left\lceil \frac{n+3k-1}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 3$ 。■ **P8**为我们分析所有凸构件输入均不为全 0 时, $GP(n, k)$ 的偏差度分布提供了一个有用的上界 $2n - 3 - \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$ 。

P9: 凸构件 $\{G_{2i}\}$ 中最多有一个的输入为全 0。最多有一个的输出为全 0。并且这 2 个构件要么是同一个, 要么是连续的。

证明: 因为输入为全 0 或者输出为全 0 都会在其前驱或者后继的凹构件形成一个圈 C 无法通过的隔离带, 2 个以上的隔离带将形成 ≥ 2 个连通分支, 这和 C 是一个圈矛盾。又根据**P2**, 这 2 个凸构件要么时同一个, 要么是连续的(中间只隔着一个凹构件)。■

从**P8**可见, 只有当存在凸构件的输入为全 0 时, 才会环接成圈长 $< \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 3$ 的圈 C 。若 $GP(n, k)$ 具有弱(偶)泛圈性, 那么较小的圈长, 必由一组包含有 2 个输入、输出分别为全 0 的凸构件作为第一和最后一个凸构件环接而成, 又或者 C 就是一个有自圈的凸构件。

3.3.5 构件的扩张和收缩

定义: 构件 G_i 长度增加 ΔL 之后, 输入输出保持不变, 并且令 C 依然只有一个连通分支, 则称为 G_i 的 ΔL -扩张, 又称 G_i 为 ΔL -可扩的; 若 $\Delta L < 0$, 称为 G_i 的 ΔL -收缩, 又称 G_i 为 ΔL -可缩的。如果这种扩张/收缩可以反复迭代, 那么我们称 G_i 是可连续 ΔL -扩张/收缩的。

P10: 任何构件都可连续 k -扩张, 任何长度大于 k 的构件都可连续 k -收缩。

证明: 不妨设构件的头 2 个外点为 u_0, u_1 , 在它们之间插入 k 个点, 然后引出 k 条轮辐边, 轮辐边另一个端点, 取其与前驱构件的 k 条输出边的交点, 这样构件复制了一份前驱构件的输出, 所以输入不变, 因为长度增加了 k , 根据P1, 输出也不变。另外, 从扩张方式可以知道, 原来的内圈的 k 条边一分为二, 外圈的 u_0u_1 一分为 $k+1$, 都是在一条边增加若干内点, 所以不改变原有的连通分支数, 构件是 k -可扩的; 反之, 类似推理, 可知任何长度大于 k 的构件都是 k -可缩的。而这种扩张/收缩显然是可以重复的。所以任何构件都可连续 k -扩张, 任何长度大于 k 的构件都可连续 k -收缩。■

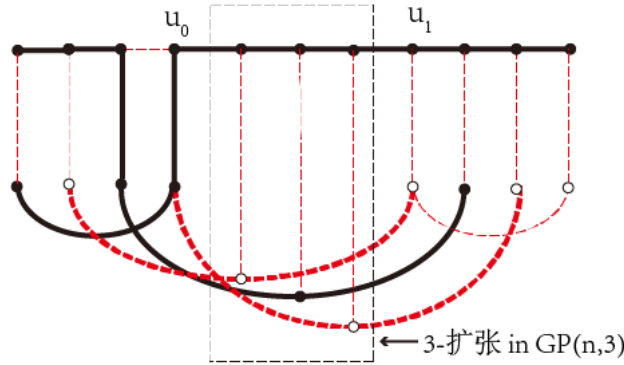


图 13 $GP(n, 3)$ 的构件的 3-扩张

P11: 任何构件 k -扩张后, 偏差度增量为常量。

证明: 设构件的前驱构件的输出为 $(o_0, o_1, o_2, \dots, o_{k-1})$, 若构件 G_i 为凸, 偏差度 $Q(G_i) = \sum_{s=0}^{L(G_i)-2} \bar{o}_s$, k -扩张后, 偏差度增量为 $\sum_{s=0}^{k-1} \bar{o}_s$; 若构件 G_i 为凹, 偏差度 $Q(G_i) = L(G_i) - 1 + \sum_{s=0}^{L(G_i)-2} \bar{o}_s$, k -扩张后, 偏差度增量为 $k + \sum_{s=0}^{k-1} \bar{o}_s$ 。两者都仅取决于前驱构件的输出, 而前驱构件的输出又可以由构件自己的输入确定, k -扩张后输入不变, 所以偏差度增量为常量。■

定理 6: 若 k 是奇数并且所有环接的凸构件都是偶的, 则圈 C 的长度一定是偶数。

证明: 由P11知道 k -扩张对凸构件的偏差度的增量为 $\Delta r = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{o}_i = k - \sum_{i=0}^{k-1} o_i$, 对凹构件的增量为 $\Delta r = k + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{o}_i = 2k - \sum_{i=0}^{k-1} o_i$ 。其中 $(o_0, o_1, o_2, \dots, o_{k-1})$ 为其前驱构件输出, 对于凸构件而言, 其前驱为奇构件, $\sum_{i=0}^{k-1} o_i$ 为奇数, 所以 $\Delta r = k - \sum_{i=0}^{k-1} o_i$ 为偶数; 对于凹构件而言, 其前驱为偶构件, $\sum_{i=0}^{k-1} o_i$ 为偶数, 所以增量 $\Delta r = 2k - \sum_{i=0}^{k-1} o_i$ 为偶数, 即无论凹凸构件, 偏差度增量 Δr 都是偶数, 而 $2n - r \equiv r \pmod{2}$, 圈 C 长度的奇偶性和其偏差度 r 的奇偶性一致, 也就是说 k 是奇数并且所有凸构件都是偶的时候, k -扩张保持圈长的奇偶性。又因为 n 和 $n+k$ 之中必定有一个是偶数, 由引理 2 可知圈 C 的长度必然也是偶数。■

之前P8已经证明: 若所有凸构件输入均不为全 0, 则 C 的圈长 $\geq \frac{n}{k} + 3 - \frac{1}{k} > \frac{n}{k}$ 。而包含全 0 输入的凸构件一定是偶的, 当 k 是奇数, 根据定理 6, 不会产生奇圈。再之即使是普通圈圈长也 $\geq \frac{n}{(n,k)} \geq \frac{n}{k}$, 综合有以下推论:

定理 5: 当 k 是奇数, $GP(n, k)$ 不会出现圈长小于 $\frac{n}{k}$ 的奇圈。

P12: 如果前驱构件输出为全 0, 则构件是连续 1-可扩和连续 1-可缩的(构件长度 >1)。
 证明: 前驱构件输出为全 0, 根据可拼接的定义, 构件 G 的输入为 $h_0 f^{-1}(0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0)$, $O(G) = h_{-1} f^{L(G)} h_0(I(G)) = h_{-1} f^{L(G)}(0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 1)$ 和 $L(G)$ 无关。并且 G 如果凹的, 增减外点仅延长或缩短完全与 C 不相交的区域; G 如果凸的, 增减外点仅会延长或缩短其唯一的分支, 都不会改变 C 的连通分支数。所以构件是连续 1-可扩和连续 1-可缩的(构件长度 >1)。■

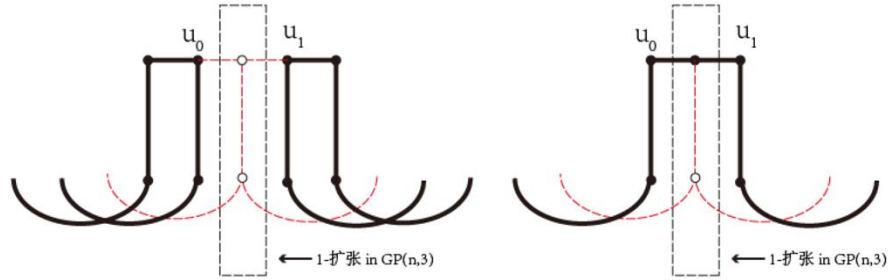


图 14 $GP(n, 3)$ 的构件的 1-扩张

1-扩张给扩张提供了比较大的灵活性, 因为 k -扩张保持 n 模 k 的余数, 而 1-扩张则可以逐步改变此余数, 又 k 次 1-扩张等于 k -扩张, 所以如果构件可以 1-扩张, 我们只需要考虑 1-扩张。另外从偏差度公式可以计算出, 凸构件 1-扩张的偏差度增量为 $\Delta r = 1$, 凹构件扩张的偏差度增量为 $\Delta r = 2$ 。

从前面的分析看到, 如果仅仅关心圈长变化, 对构件的扩张, 与扩张顺序无关, 而且只要是输入相同的构件, 可以将扩张集中在其中一个构件上, 这是因为基本扩张对 n, r 的影响仅和构件的输入有关。这种扩张的集中效应对我们分析圈长分布极为便利。对一个圈的扩张, 只需要对每种不同的输入选择一个构件作为代表进行扩张即可。

定义: 原生圈

不可能再进行收缩的圈 C , 称为“原生圈”。

因为任何构件都可以连续 k -收缩, 所以原生圈的构件长度都小于等于 k 。 $GP(n, k)$ 所有长度为 $2n - r$ 的圈都可由原生圈扩张而来。而扩张又可以集中在有限个不同输入的构件, 每种构件的扩张导致的偏差度增量都是固定的常数。所以我们只需要把原生圈的结构研究清楚, 列举出所有原生圈的圈型的初始外圈长度和偏差度。然后将不同输入的构件的扩张次数作为变量, 列出扩张后外圈长度 $= n$, 偏差度 $= r$ 两个整数不定方程。就可以通过不定方程可解性的分析, 得出 $GP(n, k)$ 所有圈长分布。

对于特定的 k , 原生圈中包含前置构件输出为全 1 的构件的哈密尔顿圈尤其重要, 它们扩张产生了所有其它的哈密尔顿圈。

定义: 构件状态转换图

构件状态转换图是对“原生圈”的进一步抽象, 用于表达构件的拼接关系。如下图 15, 列举了 $GP(n, 2)$ 原生圈中所有构件的状态转换图。方框代表凸构件(A~F), 有向边代表凹构件。虚线的有向边代表一种特殊的凹构件, 其前驱凸构件输出为全 0 而后续凸构件的输入也为全 0, 在前面的论述(P9)里面我们知道, 这样的凹构件仅能出现 1 次, 同时它是连续 1-可扩的。

方框内数字代表凸构件长度, 方框左上角和右上角数字分别代表凸构件的输入和输出。凹构件默认长度为 1, 若有标注则长度以标注为准。因为凹构件的输入输出完

全由前驱、后续的凸构件决定，所以在状态转换图中就不再特别标出。

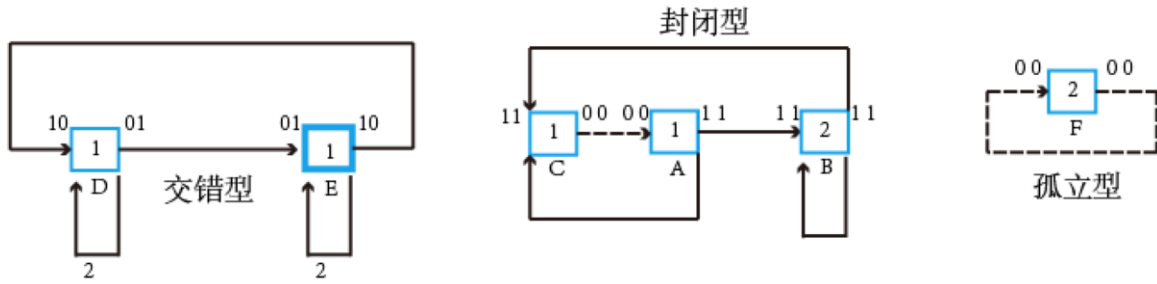


图 15 $GP(n, 2)$ 的原生圈的构成

定义：扩张方程组

对于一个原生圈，从中选取不同输入的凸构件和不同输入的凹构件作为代表，进行扩张，将扩张次数作为变量，那么我们可以列出 1) 各构件的每次扩张的偏差度增量和扩张次数的线性组合等于目标偏差度和初始偏差度的差；2) 各个构件的扩张系数和扩张次数的先行组合等于目标的外圈长度和初始外圈长度之差。这 2 个方程组成的方程组，称为这个原生圈对应的扩张方程组，它有没有非负整数解，就决定了目标的偏差度能否达到。

四、 $GP(n, 2)$ 的圈长分布

4.1 $GP(n, 2)$ 的原生圈

图 15 已穷尽了 $GP(n, 2)$ 原生圈中所有构件的连接关系，分为“封闭型”、“交错型”和“孤立型”三大类。

4.2 总体圈长分布

在 4.3 节中我们将广义 Petersen 图 $G = GP(n, 2)$ 的原生圈分类讨论，逐一分析偏差度 r 和 n 的关系。我们先列出最终的结果是：

定理 3. $GP(n, 2)$ 具体圈长分布如下：

- 1) 当且仅当 $n \not\equiv 5 \pmod{6}$ ， $GP(n, 2)$ 有哈密尔顿圈；
- 2) 当且仅当 $n \not\equiv 4 \pmod{6}$ ， $GP(n, 2)$ 有 $2n - 1$ 圈；
- 3) 所有的 $GP(n, 2)$ 都有圈长为 5 以及 $8 \sim 2n - 2$ 的圈；
- 4) 当且仅当 $n = 6, 7, 8, 9, 14$ ， $GP(n, 2)$ 有 7-圈；
- 5) 当且仅当 $n = 5, 6, 7, 9, 12$ ， $GP(n, 2)$ 有 6-圈；
- 6) 当且仅当 $n = 8$ ， $GP(n, 2)$ 有 4-圈；
- 7) 当且仅当 $n = 6$ ， $GP(n, 2)$ 有 3-圈。

P13: $GP(n, 2)$ 中只有少数有限个 n 值，有 3, 4, 6 和 7-圈。

证明：设圈为 C ，圈长 $L (= 3, 4, 6, 7)$ ，如果 C 是普通圈，则 $n = L$ 或者 $2L$ ，即 $n = 6, 7, 8, 12, 14$ ；如果 C 是非普通圈则包含偶数条轮辐边。 C 只能包含 2 条轮辐边，否则 4 条轮辐边已经有 8 个不同顶点， $L \geq 8$ ，矛盾。又因为 $GP(n, 2) \neq GP(n, 1)$ ，所以 C 在外圈、内圈的总边数大于 2，即 $L > 4$ ， $L = 6$ 或 7。内圈每个圈的圈长都是 $d = \frac{n}{(n, 2)}$ ，所

以设 C 包含外圈 x 条边, 内圈 y 条边, 那么 $x + y = L - 2$, 除此之外, 第 2 个方程有 4 种情况:

$$\frac{x}{y} = 2, \frac{n-x}{y} = 2, \frac{x}{d-y} = 2, \frac{n-x}{d-y} = 2$$

所有的解 (L, x, y, n) 为 $(6, 2, 2, 6)$ 、 $(6, 1, 3, 7)$ 、 $(6, 3, 1, 5)$ 、 $(7, 4, 1, 6)$ 、 $(7, 3, 2, 7)$ 、 $(7, 2, 3, 8)$ 、 $(7, 1, 4, 9)$ 。所以, 所有可能取值为 $n = 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14$ 。综合有, $n \geq 15$ 时 $GP(n, 2)$ 都没有 3, 4, 6 和 7-圈。■ 至此, 我们证明了定理 3 的 4)~7)。

4.3 封闭型圈

含 2 个不同凸构件, 一个输入为全 0, 一个输出为全 0, 这样的原生圈, 称为封闭型圈。前面的讨论知道, 这样的凸构件仅有一对, 并且通过 1 个凹构件连接。

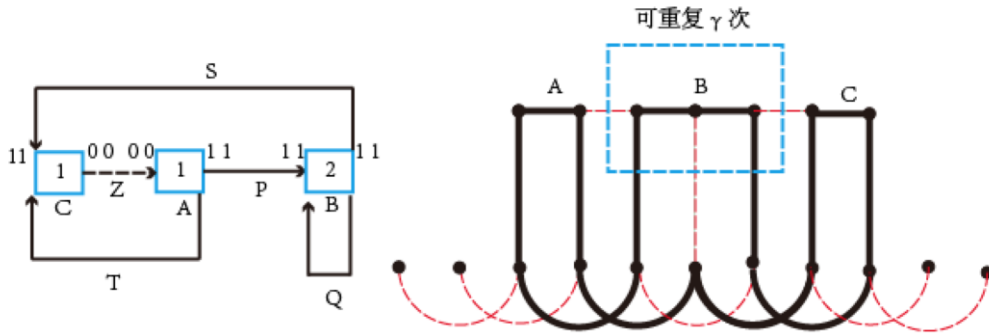


图16 $GP(n, 2)$ 的封闭型圈

上图 16 的原生圈为 $A - [B-]^r C - A$, $\gamma \geq 0$ 。

因为所有 B 最终都会跟 A 、 C 连通, 而凹构件的前驱构件输出为全 0 或者全 1, 所以在这种封闭型圈中, 所有凹构件都是 1-可扩的。

设凸构件 A 进行 2-扩张 α 次 ($\Delta r = 1$), 而凹构件 P 进行 1-扩张 β 次 ($\Delta r = 1$), 凹构件 Z 进行 1-扩张 δ 次 ($\Delta r = 2$)。最后得到长 $2n - r$ 的圈。我们可以列出扩张方程组:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\delta = r & \text{--- (I}_1\text{)} \\ 2\alpha + \beta + \delta + 4 + 3\gamma = n & \text{--- (I}_2\text{)} \end{cases}$$

$2(I_2) - (I_1)$ 整理得: $3\alpha + \beta = 2n - 8 - r - 6\gamma$ --- (I_3)。取 $3\alpha + \beta = (2n - 8 - r) \bmod 6$, $\gamma = \left\lfloor \frac{2n-8-r}{6} \right\rfloor$, $\delta = \frac{r-(\alpha+\beta)}{2}$, 因为 $(\alpha, \beta) = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)$, $3\alpha + \beta$ 分别取 0, 1, 2, 3, 4, 5, 所以 $3\alpha + \beta = (2n - 8 - r) \bmod 6$ 一定可解, 这时 $\alpha + \beta$ 的最大值为 3。又满足 (I_3) 则 $\alpha + \beta$ 的奇偶性和 r 一致, 所以 δ 为整数。只需要 $3 \leq r \leq 2n - 8$, 方程 (I_1), (I_2) 就有非负整数解。

令 $r = 2$ 代入 (I_1), 解得 $(\alpha, \beta, \delta) = (0, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0)$, 分别代入 (I_2) 解得 $n = 3\gamma + 5, 3\gamma + 7, 3\gamma + 8, 3\gamma + 6$, 即所有 $n \geq 5, r = 2$ 方程 (I_1), (I_2) 都有非负整数解。

我们有第一个结论 (C_1):

当 $2 \leq r \leq 2n - 8$ 时, $GP(n, 2)$ 有长 $2n - r$ 的圈。

前人已经证明了当且仅当 $n \not\equiv 5 \pmod{6}$, $GP(n, 2)$ 有哈密顿圈, 所以 $r = 0$ 的情况已经清楚。从定理 1 关于围长的证明中, 可以知道 $k + 3$ 圈一定存在, 所以 $r = 2n - 5$ 的情况也已经清楚。而 P13 则分析清楚了 $r = 2n - 3, 2n - 4, 2n - 6, 2n - 7$ 的有限种可能性。我们接下来仅需要讨论 $r = 1$ 的情况。

令 $r = 1$ 代入 (I_1), 解得 $(\alpha, \beta, \delta) = (1, 0, 0), (0, 1, 0)$, 分别代入 (I_2) 解得 $n = 3\gamma + 5$ 或 $n = 3\gamma + 6$ 。我们有第二个结论 (C_2):

当 $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$, $GP(n, 2)$ 有长 $2n - 1$ 的圈。

4.4 交错型圈

如下图 17, 交错型圈是指 $GP(n, k)$ 中不存在圈 C 不能进入的隔离带, 沿着圈 C 可以环绕 $GP(n, k)$ 1 次以上, 精确定义就是不存在输入为全 0 的凸构件的原生圈。因为孤立型的原生圈(只有 2 条轮辐边)的偏差度一定大于 1, 所以交错型原生圈是唯一需要讨论是否存在 $2n - 1$ 圈的情况。

如果圈 C 长为 $2n - 1$, 则说明有且仅有一个构件的偏差度为 1, 其余均为 0。如果这构件是凹的, 那么它必然是 W 或者 X, 不妨设存在一个 W, 那么 X 必然不能出现, 而且所有凹构件不可能扩张, 否则必然会增加偏差度, 而凸构件的长度为 1, 这时 D 不能扩张, E 可以 2-扩张, 但是无论如何扩张, 最后得到的 n 都是奇数; 如果这构件是凸的, 那么偏差度必然是由 D 的一次 2-扩张而来, 另外, W, X 不能出现, 这时 n 为奇数, 之后只能有 E 进行 2-扩张, 但是 n 的奇偶性不会改变。

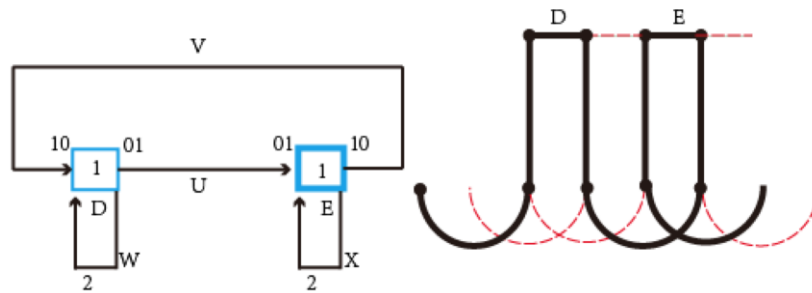


图 17 $GP(n, 2)$ 的交错型原生圈

于是我们有 (C_3) : 当 n 为奇数, $GP(n, 2)$ 存在 $2n - 1$ 圈。

综合 $(C_2), (C_3)$ 有: 当且仅当 $n \not\equiv 4 \pmod{6}$, $GP(n, 2)$ 有 $2n - 1$ 圈。

至此, 对于 $GP(n, 2)$, 全部 $0 \leq r \leq 2n - 3$ 的 $2n - r$ 圈的存在性已经彻底清楚。证明了定理 3. $GP(n, 2)$ 具体圈长分布如下:

- 1) 当且仅当 $n \not\equiv 5 \pmod{6}$, $GP(n, 2)$ 有哈密尔顿圈;
- 2) 当且仅当 $n \not\equiv 4 \pmod{6}$, $GP(n, 2)$ 有 $2n - 1$ 圈;
- 3) 所有的 $GP(n, 2)$ 都有圈长为 5 以及 $8 \sim 2n - 2$ 的圈;
- 4) 当且仅当 $n = 6, 7, 8, 9, 14$, $GP(n, 2)$ 有 7-圈;
- 5) 当且仅当 $n = 5, 6, 7, 9, 12$, $GP(n, 2)$ 有 6-圈;
- 6) 当且仅当 $n = 8$, $GP(n, 2)$ 有 4-圈;
- 7) 当且仅当 $n = 6$, $GP(n, 2)$ 有 3-圈。

下表(图 18)列举了 n 从 5-18 的所有圈长分布, 橙色表示有此长度的圈, 灰色表示没有。

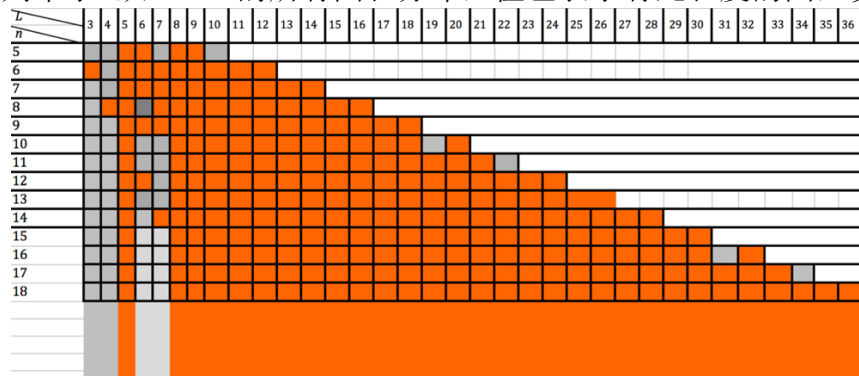


图 18 $GP(n, 2)$ 的圈长分布 $5 \leq n \leq 18$

五、 k 为奇数, $GP(n, k)$ 的圈长分布

当 k 为大于0的奇数, 我们依次分析4种原生圈, 从而得出:

定理 2. 若 k 为奇数, $GP(n, k)$ 的圈长分布如下:

1) 偶数长度的圈: $GP(n, k)$ 有长度为 $4k$ 到 $2n + 2 - k$ 之间的所有偶数的圈。进一步, 当 $n \geq k^2 + \frac{7}{2}k - 4$, $GP(n, k)$ 有长度为 $g(G)=6$ or 8 到 $c(G) = 2n$ 之间的所有偶数的圈。特别地, 当 n 为偶数, $GP(n, k)$ 是二部图, 具有弱偶泛圈性;

2) 奇数长度的圈: 只有 n 为奇数, 才有奇圈。设 r' 是 n 除以 k 的余数, $GP(n, k)$ 有长度为 $\lceil \frac{n}{k} \rceil + \Delta(r')$ 到 $2n + 2 - k$ 之间的所有奇数的圈。当 $r' > 1$, $GP(n, k)$ 还有长度为 $\lceil \frac{n}{k} \rceil + \Delta(r') - 4$ 的圈; 当 $r' = 0$, $GP(n, k)$ 还有长度 $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ 的圈。其中

$$\Delta(r') = \begin{cases} 6 & (r' = 0) \\ 3 & (r' = 1) \\ 6 + r' & (2 \leq r' < \frac{k+1}{2}) \\ k + 7 - r' & (r' \geq \frac{k+1}{2}) \end{cases}$$

5.1 封闭型原生哈密尔顿圈

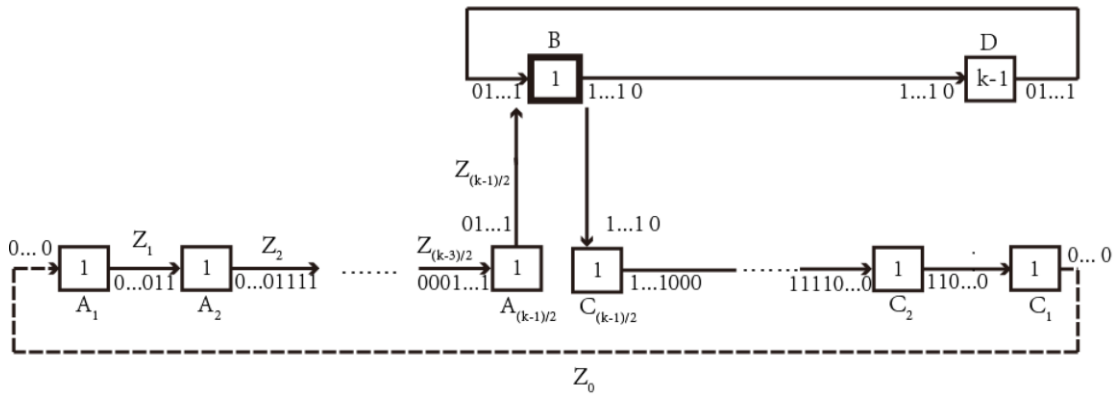


图 19 封闭型的原生哈密尔顿圈(k 为奇数)

可重复 γ 次

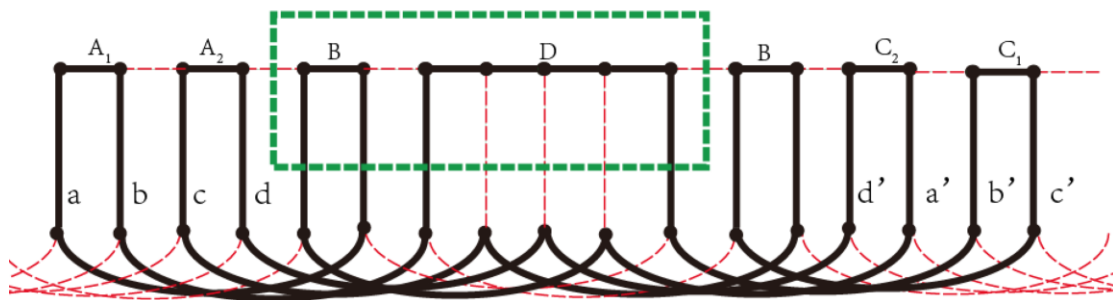


图20 $k=5$ 时的封闭型的原生哈密尔顿圈

上图 19 的原生图为: $A_1 - A_2 - \dots - A_{\frac{k-1}{2}} - [B - D -]^{\gamma} B - C_{\frac{k-1}{2}} - \dots - C_2 - C_1 - A_1$, $\gamma \geq 0$ 。图 20 的是 $k=5$ 的具体情况。凸构件 A_1 输入为全 0, 是偶构件, k 又是奇数, 根据定理 6, r 必定为偶数。

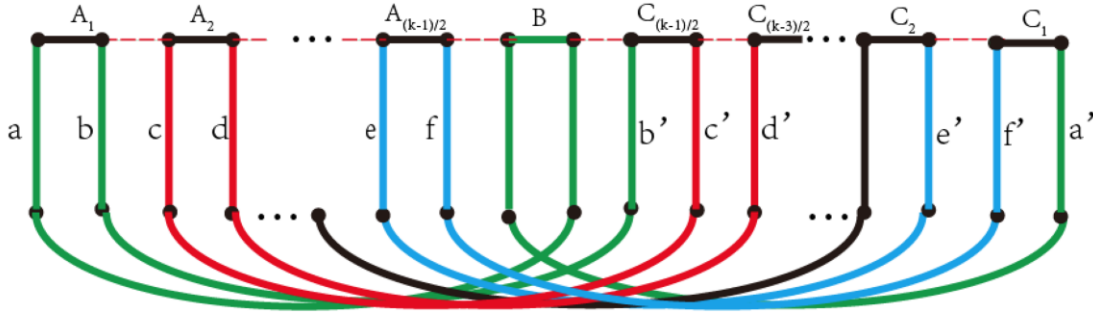


图21 Case1 $\gamma = 0$

我们先证明图 19 确实是一个圈。我们对 γ 进行数学归纳法证明。当 $\gamma = 0$, 如图 21 所示, A_1 使 $C_1, C_{\frac{k-1}{2}}$ 连通, A_2 使 $C_{\frac{k-1}{2}}, C_{\frac{k-3}{2}}$ 连通, $\dots$, $A_{\frac{k-1}{2}}$ 使 C_2, C_1 连通。所以任意 A_i 和 C_j 都是连通的, 而 B、D 必定和某些 A_i 和 C_j 连通, 所以图 21 是一个圈。当 $\gamma = N > 0$, 如图 22, 把第一个 D 改造为 $\frac{k-1}{2}$ 个凸构件 $A'_1, A'_2, \dots, A'_{\frac{k-1}{2}}$, 然后删除 $A_1, A_2, \dots, A_{\frac{k-1}{2}}$ 和第一个 B, 新图相当于 $\gamma = N - 1$ 。原图中与 A_1 连通等价于与新图中 $A'_{\frac{k-1}{2}}$ 连通, 原图中与 A_2 连通等价于与新图中 A'_1 连通, $\dots$, 原图中与 $A_{\frac{k-1}{2}}$ 连通等价于与新图中 $A'_{\frac{k-3}{2}}$ 连通。根据归纳假设任意 A'_i 和 C_j 都连通, 所以 A_i 和 C_j 也连通, 图 22 是一个圈。根据数学归纳法, 图 19 也是一个圈。■

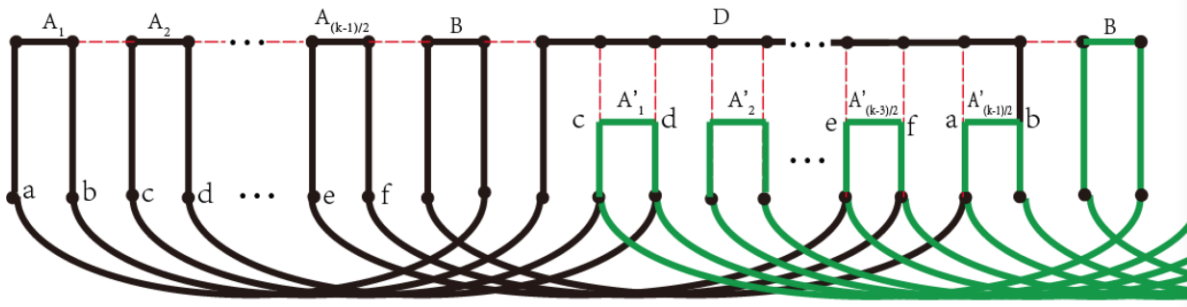


图22 $\gamma = N$ 归约为 $\gamma = N - 1$ 的情况

原生圈初始偏差度为 0, 外圈长度为 $2k + (k + 2)\gamma$ 。假设凹构件 Z_0 做 α 次 1-扩张 ($\Delta r = 2$)。凸构件 B 做 θ_0 次 k -扩张 ($\Delta r = 0$), 凸构件 $A_{\frac{k+1}{2}-i}$ 做 θ_i 次 k -扩张 ($\Delta r = 2i, i = 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2}$), 凹构件 Z_{k-i} 做 θ_i 次 k -扩张 ($\Delta r = 2i, i = \frac{k+1}{2}, \frac{k+3}{2}, \dots, k-1$)。最后得到长 $2n - r$ 的圈。那么我们可以列出扩张方程组如下:

$$\begin{cases} 2\alpha + \sum_{i=0}^{k-1} 2i\theta_i = r & \text{--- (K}_1\text{)} \\ \alpha + k \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i + 2k + (k + 2)\gamma = n & \text{--- (K}_2\text{)} \end{cases}$$

将 n, r 视为常数, 我们分析 n, r 满足何种关系时, 方程有非负整数解 $\alpha, \gamma, \theta_i (i = 0, 1, \dots, k-1)$ 。

从 $(K_1), (K_2)$ 得出等价方程组

$$\begin{cases} \alpha + \sum_{i=0}^{k-1} i\theta_i = \frac{r}{2} & \text{--- (K'_1)} \\ \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\theta_i + (k+2)\gamma = n - \frac{r}{2} - 2k & \text{--- (K'_2)} \end{cases}$$

令 $P(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\theta_i = \sum_{i=1}^k i\theta_{k-i}$, $Q(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} i\theta_i$ 。
注意到 $P(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$ 可以取值 $0 \sim k+1$ 而对应的 $Q(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$ 最大值为 $k-1$,
具体如下:

$$\begin{aligned} P(0,0,\dots,0) &= 0, Q(0,0,\dots,0) = 0 \\ P(1,0,\dots,0) &= k, Q(1,0,\dots,0) = 0 \\ P(0,0,\dots,\theta_{k-i}=1,\dots,0) &= i, Q(0,0,\dots,\theta_{k-i}=1,\dots,0) = k-i \quad (i=1,2,\dots,k-1) \\ P\left(0,0,\dots,\theta_{\frac{k-1}{2}}=2,\dots,0\right) &= k+1, Q\left(0,0,\dots,\theta_{\frac{k-1}{2}}=2,\dots,0\right) = k-1 \end{aligned}$$

若 $n - \frac{r}{2} - 2k \geq 0$ 且 $\frac{r}{2} \geq k-1$ 则 $(K'_1), (K'_2)$ 有非负整数解:

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\lfloor \frac{n - \frac{r}{2} - 2k}{k+2} \right\rfloor, P(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) = \left(n - \frac{r}{2} - 2k\right) \bmod (k+2), \alpha \\ &= \frac{r}{2} - Q(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \end{aligned}$$

所以有结论 (C_{1a}) : 当 k 为奇数, r 可以取 $[2k-2, 2n-4k]$ 中所有偶数。特别地, $k=1$ 时, r 可以取 $[0, 2n-4]$ 中所有偶数, 即 n 偶数, $GP(n, 1)$ 为偶泛圈 (定理 4)。

进一步分析 $r < 2k-2$ 的情况。 (K'_1) 中只有 θ_0 的系数为 0, 为了使 r 更小, 应该使 θ_0 尽可能大, 而 $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \gamma$ 都尽可能小。所以不妨令 $\theta_1 = \dots = \theta_{k-1} = 0$ 。此时根据 (K'_2) , $2\gamma \equiv n - \frac{r}{2} \pmod{k}$ 。 $\{0, 1, \dots, k-1\}$ 中必有一个 γ' 使得 $\frac{r}{2} \equiv n - 2\gamma' \pmod{k}$, 取 $\gamma = \gamma'$, $\theta_0 = \frac{n - \frac{r}{2} - 2k - (k+2)\gamma'}{k}$, $\alpha = \frac{r}{2}$, 只需要 $n - \frac{r}{2} - 2k - (k+2)\gamma' \geq 0$, $(K'_1), (K'_2)$ 有非负整数解。 $n - \frac{r}{2} \geq 2k + (k+2)(k-1) = k^2 + 3k - 2$ 是 $n - \frac{r}{2} \geq 2\gamma' + 2k + k\gamma'$ 的充分条件。所以当 $n - \frac{r}{2} \geq k^2 + 3k - 2$ 时, 方程 $(K'_1), (K'_2)$ 有非负整数解。

这时要求 $0 \leq r \leq 2n - 2(k^2 + 3k - 2)$, 其上界比 $2n - 4k$ 要小, 但是其下界为 0, 这对于较大的圈长的分布是一个有用的结论, 即 (C_{1b}) :

当 k 为奇数, r 可以取 $[0, 2n - 2k^2 - 6k + 4]$ 中的所有偶数。

综合有 (C_{1c}) :

当 k 为奇数, r 可以取 $[0, 2n - 2k^2 - 6k + 4] \cup [2k - 2, 2n - 4k]$ 中的所有偶数。

5.2 交错型原生哈密尔顿圈

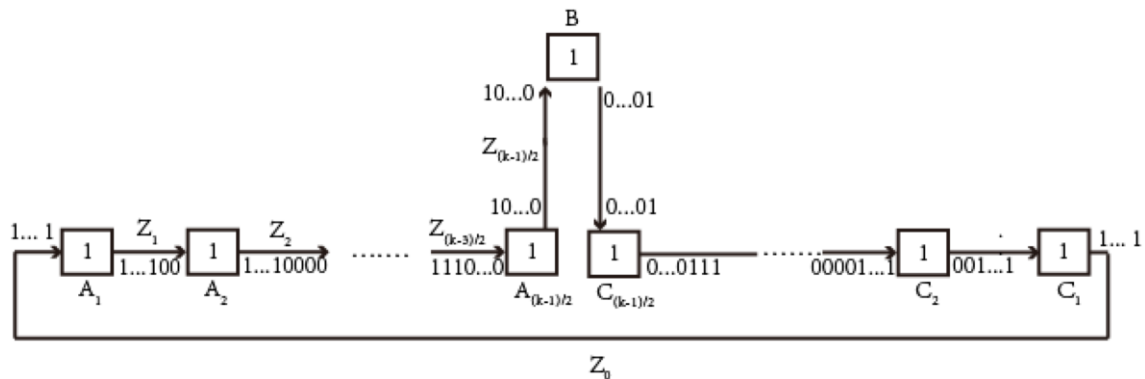


图23 交错型的原生图

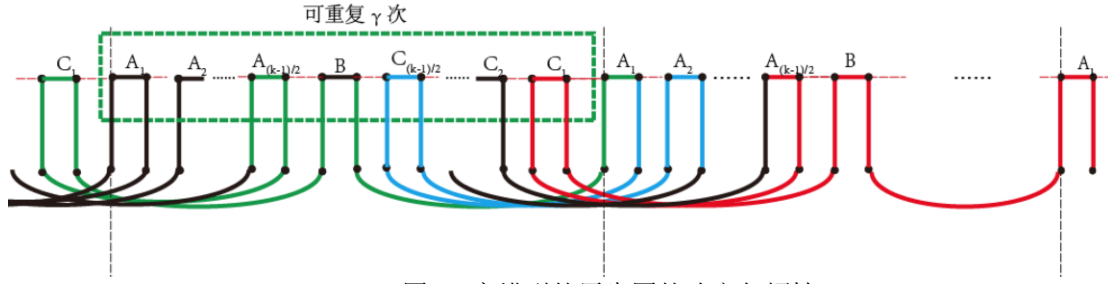


图24 交错型的原生图的哈密尔顿性

上图23的原生图为: $[A_1 - A_2 - \dots - A_{\frac{k-1}{2}} - B - C_{\frac{k-1}{2}} - \dots - C_2 - C_1 -]^{\gamma} A_1, \gamma \geq 1$ 。

我们现在证明图23是一个哈密尔顿圈。

从图24很容易看到虚线框内是一个基本单元，循环 $\gamma \geq 1$ 次，我们从左到右依次编号为单元 $1, 2, \dots, \gamma$ ，单元 i 内的 A_j, C_j 分别记为 $A_j^{(i)}, C_j^{(i)}$ 。 $A_{\frac{k-1}{2}}^{(i-1)}, A_1^{(i)}$ 通过 $B^{(i-1)}, C_1^{(i-2)}$ 连通， $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$ 通过 $C_{\frac{k-1}{2}}^{(i-1)}$ 连通， $A_2^{(i)}, A_3^{(i)}$ 通过 $C_{\frac{k-3}{2}}^{(i-1)}$ 连通， $\dots$ ， $A_{\frac{k-3}{2}}^{(i)}, A_{\frac{k-1}{2}}^{(i)}$ 通过 $C_2^{(i-1)}$ 连通， $A_{\frac{k-1}{2}}^{(i)}, A_1^{(i+1)}$ 通过 $C_1^{(i-1)}, B^{(i)}$ 连通。形成链 $A_{\frac{k-1}{2}}^{(i-1)} - A_1^{(i)} - A_2^{(i)} - \dots - A_{\frac{k-1}{2}}^{(i)} - A_1^{(i+1)}$ ，所以任意 $A_{j1}^{(i1)}$ 和 $A_{j2}^{(i2)}$ 都是连通的，对称地任意 $C_{j1}^{(i1)}$ 和 $C_{j2}^{(i2)}$ 都是连通的，所以图23是一个圈。而图23的所有构件的长度都是 1，偏差度为 0，所以是哈密尔顿圈。■

原生圈初始偏差度为 0，外圈长度为 $2k\gamma$ 。注意到凸构件 B 的前驱构件输出为全 0，所以 B 是连续 1-可扩的。假设凸构件 B 做 θ_0 次 1-扩张 ($\Delta r = 1$)，凸构件 A_i 做 θ_i 次 k -扩张 ($\Delta r = 2i - 1, i = 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2}$)，凹构件 $Z_{i-\frac{k-1}{2}}$ 做 θ_i 次 k -扩张 ($\Delta r = 2i + 1, i = \frac{k+1}{2}, \frac{k+3}{2}, \dots, k-1$)。最后得到长 $2n - r$ 的圈。我们可以列出方程如下：

$$\begin{cases} \theta_0 + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (2i-1)\theta_i + \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{k-1} (2i+1)\theta_i = r & \text{--- (K}_3\text{)} \\ \theta_0 + k \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i + 2k\gamma = n & \text{--- (K}_4\text{)} \end{cases}$$

(K_4) - (K_3) 再除以 2 化简得：

$$\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} i(\theta_{\frac{k+1}{2}-i} - \theta_{\frac{k-1}{2}+i}) = \frac{n-r}{2} - k\gamma \text{ --- (K}_3'\text{)}$$

令 $P(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}) = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} i(\theta_{\frac{k+1}{2}-i} - \theta_{\frac{k-1}{2}+i})$ ， $Q(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}) = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (2i-1)\theta_i + \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{k-1} (2i+1)\theta_i$ 。注意到 $P(\theta_1, \dots, \theta_{k-1})$ 可以取值 $0 \sim k-1$ 而对应的 $Q(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$ 最大值为 $k-1$ ，具体如下：

$$\begin{aligned} P(0, 0, \dots, 0) &= 0, Q(0, 0, \dots, 0) = 0 \\ P\left(0, 0, \dots, \theta_{\frac{k+1}{2}-i} = 1, \dots, 0\right) &= i, Q\left(0, 0, \dots, \theta_{\frac{k+1}{2}-i} = 1, \dots, 0\right) = k - 2i \quad (i = 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2}) \end{aligned}$$

$$P\left(1, 0, \dots, \theta_{\frac{k+1}{2}-i} = 1, \dots, 0\right) = \frac{k-1}{2} + i, Q\left(1, 0, \dots, \theta_{\frac{k+1}{2}-i} = 1, \dots, 0\right) = k+1-2i \quad (i = 1, 2, \dots, \frac{k-3}{2})$$

$$P(2, 0, \dots, 0) = k-1, Q(2, 0, \dots, 0) = 2$$

由 (K'_3) , n, r 奇偶性相同。若 $\frac{n-r}{2} \geq k$ 且 $r \geq k-1$ 则 $(K_3), (K_4)$ 有非负整数解:

$$\gamma = \left\lfloor \frac{\frac{n-r}{2}}{k} \right\rfloor \geq 1, P(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}) = \left(\frac{n-r}{2}\right) \bmod k, \theta_0 = r - Q(\theta_1, \dots, \theta_{k-1})$$

所以有结论 (C_{2a}) :

当 k 为奇数, r 可以取 $[k-1, n-2k]$ 中所有与 n 奇偶性一样的整数。

结合 (C_{1c}) :当 k 为奇数, r 可以取 $[0, 2n-2k^2-6k+4] \cup [2k-2, 2n-4k]$ 中所有偶数。若 $n-2k \geq 2k-4$ 且为偶数, 即

当 k 为奇数, $n \geq 4k-4$ 且为偶数, r 可以取 $[k-1, 2n-4k]$ 中所有偶数。

特别地, 当 $k=3, n$ 为大于等于 $4k-4=8$ 的偶数, r 可以取 $[2, 2n-12]$ 中所有偶数。 $GP(n, 3)$ ($n \geq 8$)有哈密顿圈是前人已证明的(引理 1)。而 6 圈(两条轮辐边构成的最小的圈)和 8 圈(参考 5.3)天然存在, 所以我们可以得出:

当 $n \geq 8$ 为偶数, $GP(n, 3)$ 具有弱偶泛圈性。(定理 4)

现在我们考察更小的圈, $\frac{n-r}{2} < k$ 的情况, 此时 (K'_3) 两边取反整理得

$$\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} i(\theta_{\frac{k-1}{2}+i} - \theta_{\frac{k+1}{2}-i}) = k(\gamma-1) + \frac{r-n+2k}{2} \text{ --- } (K'_4)$$

令 $k' = \frac{k-1}{2}, \alpha = \frac{r-n+2k}{2}$, 取 $\gamma = 1, \theta_{k-1} = \left\lfloor \frac{\alpha}{k'} \right\rfloor, r' = \alpha \bmod k'$, 若 $r' > 0$, 则令 $\theta_{\frac{k-1}{2}+r'} = 1$, 其余 $\theta_i = 0$ ($i \neq k-1, r'$), 可以令 (K'_4) 成立。此时

$$r - \theta_0 = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (2i-1)\theta_i + \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{k-1} (2i+1)\theta_i$$

$$= \begin{cases} (2k-1)\theta_{k-1} + (k+2r') & r' > 0 \\ (2k-1)\theta_{k-1} & r' = 0 \end{cases}$$

当 $r \geq (2k-1)\frac{\alpha}{k'} + (k+2(k'-2))$ 时, $\theta_0 \geq 0$, $(K_3), (K_4)$ 有非负整数解。将 $k = 2k' + 1$ 代入不等式有, $r \geq (4k'+1)\frac{r-n+4k'+2}{2k'} + 4k' - 3$, 整理得 $r \leq \frac{2k-1}{k}n - 6k - \frac{8}{k}$ 。

所以有 (C_{2b}) :

当 k, n, r 均为奇数, r 可以取 $[k-2, \frac{2k-1}{k}n - 6k - \frac{8}{k}]$ 中所有奇数。

由P8, k 为奇数时, 其非普通的奇圈的最小圈长为 $\frac{n+3k-1}{k}$, 偏差度最大值为 $\frac{2k-1}{k}n - 3 + \frac{1}{k}$, 而 $\frac{2k-1}{k}n - 6k - \frac{8}{k}$ 和最大值差距为 $6k - 3 + \frac{9}{k}$, 已经较为接近, 我们需要继续寻找圈长更小的奇圈(参见 5.4)。

5.3 稀疏的封闭型原生圈

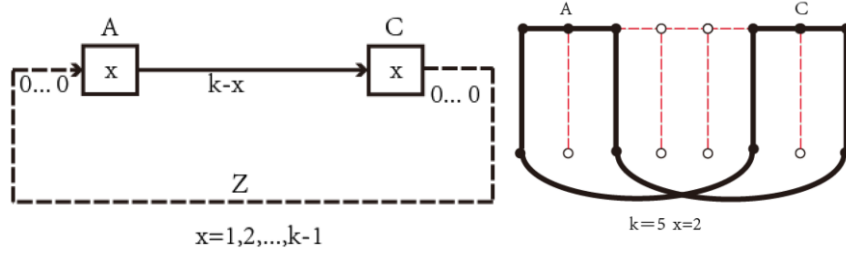


图 25 2 个凸构件组成的封闭型原生圈

上图25是 2 个凸构件组成的封闭型原生圈, x 可取值 $1, 2, \dots, k-1$, 可以直接计算出初始圈长为 $2x+6$, 初始外圈长度为 $k+x+1$, 偏差度为 $2(k+x+1)-(2x+6)=2k-4$ 。 α 次 k -扩张 $A(\Delta r = k-1)$, β 次 1-扩张 $Z(\Delta r = 2)$, 最后得到长 $2n-r$ 的圈。那么我们可以列出方程如下:

$$\begin{cases} (k-1)\alpha + 2\beta + 2k - 4 = r & \text{--- (K}_3\text{)} \\ k\alpha + \beta + k + x + 1 = n & \text{--- (K}_4\text{)} \end{cases}$$

解得: $r = 2n - 2x - 6 - (k+1)\alpha$ 。根据 (K_4) , $\beta = n - k - x - 1 - k\alpha$, 若 $\alpha \leq \frac{n}{k} - 2$, 则 $k\alpha \leq n - k - (k-1) - 1 \leq n - k - x - 1$, 可推出 $\beta \geq 0$ 。所以 α 可以取 0 到 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 2$, x 任意取 1 到 $k-1$, 方程都有非负整数解 α, β 。此时 r 取 $I_\alpha = [2n - 2k - 4 - (k+1)\alpha, 2n - 8 - (k+1)\alpha]$ 中的所有偶数 ($\alpha = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 2$)。因为 $2n - 8 - (k+1)(\alpha+1) \geq 2n - 2k - 4 - (k+1)\alpha - 2$ 等价于 $k \geq 3$, 所以这些闭区间 I_α 可以合并为 $[2n - 2k - 4 - (k+1)(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 2), 2n - 8] = [2n - 2 - (k+1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, 2n - 8]$, r 可以取得此闭区间中所有偶数。

从 Case 1 已知道 $n \geq 4k - 4$, r 可以取 $[k - 2, 2n - 4k]$ 中所有偶数。若 $2n - 4k \geq 2n - 2 - (k+1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 2$, 即 $4k \leq (k+1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - \dots - (K_5)$, 就可以合并 $[k - 2, 2n - 4k]$ 和 $[2n - 2 - (k+1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, 2n - 8]$ 为 $[k - 2, 2n - 8]$ 。又因为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \geq \frac{n}{k} - \frac{k-1}{k}$, (K_5) 的充分条件为 $\frac{k+1}{k}n - \frac{(k-1)(k+1)}{k} \geq 4k$, 化简得 $n \geq \frac{k}{k+1}(4k) + k - 1 = 5k - 5 + \frac{4}{k+1} - \dots - (K_6)$ 。 (K_6) 的充分条件为 $n \geq 5k - 4$, 所以 r 可以取得 $[k - 2, 2n - 8]$ 中所有偶数。综合有 (C_{3a}) :

当 k 为奇数且 $n \geq 5k - 4$ 时, r 可以取得 $[k - 2, 2n - 8]$ 中所有偶数。即 $GP(n, k)$ 有长度为 8 到 $2n - k + 2$ 之间的任一偶数的圈。

由 (C_{1b}) : 当 k 为奇数, r 可以取 $[0, 2n - 2k^2 - 6k + 4]$ 中的所有偶数。当 $2n - 2k^2 - 6k + 4 \geq k - 4$, 即 $n \geq k^2 + \frac{7}{2}k - 4$, 而当 $k \geq 3$, $k^2 + \frac{7}{2}k - 4 \geq 5k - 4$, 所以有 (C_{3b}) :

当 k 为奇数, $n \geq k^2 + \frac{7}{2}k - 4$, r 可以取得 $[0, 2n - 8]$ 中所有偶数。

注意到内圈长度为 $\frac{n}{(n,k)} \geq \frac{n}{k} \geq k + 3.5 - \frac{4}{k} > 4$, 所以 $GP(n, k)$ 的围长 $\min(\frac{n}{(n,k)}, k + 3, 8) \geq 6$, 而即使还有长为 6 的圈, 因为 6 和 8 是连续的偶数, 我们可以得出以下结论:

当 k 为奇数, n 为偶数且 $n \geq k^2 + \frac{7}{2}k - 4$ 时, $GP(n, k)$ 具有弱偶泛圈性。

5.1~5.3 已经搞清楚了偶数圈长的分布。以下 5.4, 我们仅研究奇圈。

5.4 稀疏的交错型原生圈

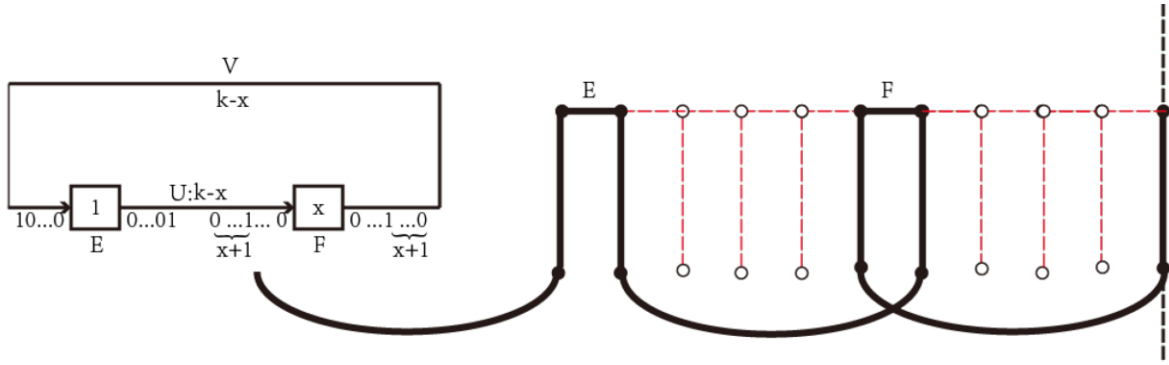


图26 几—又交替型原生圈

上图26是一个几—又交替型原生圈。初始外圈长度 $2k+1-x$ ，偏差度 $4k-3x-5$ 。注意凸构件E是1-可扩的，我们假设E连续 α 次1-扩张($\Delta r=1$)，而凹构件V连续 β 次 k -扩张($\Delta r=2k-1$)，得到方程如下：

$$\begin{cases} \alpha + (2k-1)\beta + 4k - 3x - 5 = r & \text{--- (K}_5\text{)} \\ \alpha + k\beta + 2k + 1 - x = n & \text{--- (K}_6\text{)} \end{cases}$$

解得： $\beta = \frac{n-1+x-\alpha-2k}{k}$, $r = (2k-1)\frac{n-1+x-\alpha}{k} - 3x - 3 + \alpha$ ，其中 $1 \leq x \leq k-1$ 。

只要选取 $\alpha+1-x \equiv n \pmod{k}$ ， r, β 即为整数。令 $r' \equiv n \pmod{k}$ ($0 \leq r' \leq k-1$)， $n = ak + r'$ ($a \geq 2$)，取 $\alpha = x + r' - 1 + a'k$ ($0 \leq a' \leq a-2$)即可满足 $\alpha+1-x \equiv n \pmod{k}$ ，并且 $k\beta = n-1+x-\alpha-2k = n-r'-a'k-2k = (a-a'-2)k \geq 0$ ，又 $x \geq 1, \alpha \geq 1+(-1)=0$ ，此时我们只需要保证 $r \geq 0$ 即可使得 $(K_5), (K_6)$ 又非负整数解。

$$r = (2k-1)\frac{n-r'-a'k}{k} - 2x - 4 + r' + a'k = (k-1)(a-a') + n - 4 - 2x$$

r 可以取 $[(k-1)(a-a') + n - 2k - 2, (k-1)(a-a') + n - 6]$ 中的所有奇数，而因为 $(k-1)(a-a') + n - 2k - 2 - 2 \leq (k-1)(a-(a'-1)) + n - 6$ 所以 $a' = 0, 1, \dots, a-2$ 的区间可以合并为 $[n-4k-4, (k-1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n - 6]$ 。

我们对 $n = ak + r'$ ($a \geq 2$)稍微调整为 $n = a^*k + r^*$ ($a^* \geq 1, r^* = 2, 3, \dots, k, k+1$)

令 $x = k - r^* + 1 + \alpha$ ，此时 $\beta = \frac{n-1+x-\alpha-2k}{k} = a^* - 1 \geq 0$ ， $r = \alpha + (2k-1)\beta + 4k - 3x - 5 = (k-1)a^* + n + k - 5 - 2x$ 。 $k - r^* + 1 \leq x \leq k-1$ ， $(k-1)a^* + n - k - 3 \leq r \leq (k-1)a^* + n + 2r^* - k - 7$ 。又当 $r' > 1, a^* = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor, r' = r^*, (k-1)a^* + n + 2r^* - k - 7 = (k-1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + 2r' - k - 7 =$ ；当 $r' \leq 1, a^* = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1, r^* = r' + k$ ， $(k-1)a^* + n + 2r^* - k - 7 = (k-1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n - 2k - 6 + 2(r' + k) = (k-1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + 2r' - 6$ 。又 $(k-1)a^* + n - k - 3 - 2 \leq (k-1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n - 6$ ，所以 $[n-4k-4, (k-1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n - 6]$ 可以扩展为 $[n-4k-4, (k-1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + \phi(r')]$ ，其中

$$\phi(r') = \begin{cases} 2r' - 6 & (r' \leq 1) \\ -6 & (2 \leq r' < \frac{k+1}{2}) \\ 2r' - k - 7 & (r' \geq \frac{k+1}{2}) \end{cases}$$

结合 (C_{2b}) ：当 k, n, r 均为奇数， r 可以取 $[k-2, \frac{2k-1}{k}n - 6k - \frac{8}{k}]$ 中所有奇数。因为 $\frac{2k-1}{k}n - 6k - \frac{8}{k} \geq n - 4k - 4 - 2 \Leftrightarrow \frac{k-1}{k}n \geq 2k - 6 + \frac{8}{k} \Leftrightarrow n \geq \frac{2k^2-6k+8}{k-1} = 2k - 4 + \frac{4}{k-1}$ ，当 $k \geq 3$ ，其充分条件为 $n \geq 2k - 2$ ，又 $n \geq 2k + 1$ ，所以必然成立。 $[k-2, \frac{2k-1}{k}n - 6k - \frac{8}{k}]$

$6k - \frac{8}{k}$ 和 $[n - 4k - 4, (k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + \phi(r')]$ 可以合并:

当 n, k 均为奇数, r 可以取 $[k - 2, (k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + \phi(r')]$ 中所有奇数。

由P8, k 为奇数时, 偏差度最大值为 $\frac{2k-1}{k}n - 3 + \frac{1}{k}$, 其与 $(k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + \phi(r')$ 的差为 $(k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - \phi(r') - 3 + \frac{1}{k} < \frac{k}{2} + 4$ ($r' = \frac{k+1}{2}$ 时左侧最大)。已经非常接近。现在我们继续找最小的奇圈。

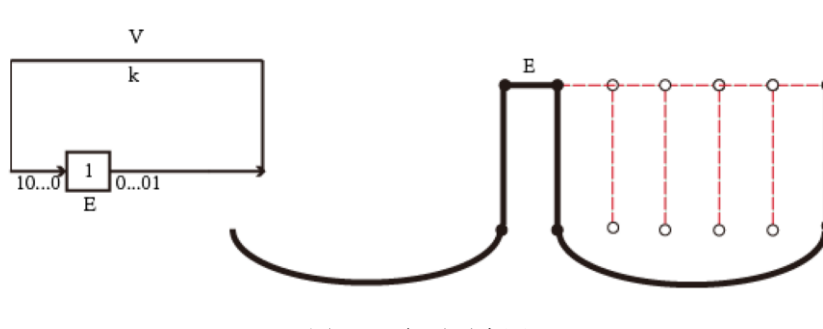


图27 几字型原生圈

上图27是一个几字型原生圈, 凸构件 E 仅有 1 个。初始外圈长度 $k + 1$, 偏差度 $2k - 2$ 。注意凸构件 E 是 1-可扩的, 我们假设 F 连续 α 次 1-扩张($\Delta r = 1$), 而凹构件 V 连续 β 次 k -扩张($\Delta r = 2k - 1$), 得到方程如下:

$$\begin{cases} \alpha + (2k - 1)\beta + 2k - 2 = r & \text{--- (K}_7\text{)} \\ \alpha + k\beta + k + 1 = n & \text{--- (K}_8\text{)} \end{cases}$$

这种其况下当 $r' > 0$, $\alpha = r' - 1$ 时, r 最得最大值 $(k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n - 2$, 而次大值小于等于 $(k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + 2r' - \phi(r')$ 。而 $r' = 0$ 时, 所有圈长都小于等于 $(k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + 2r' - \phi(r')$ 。当 $r' < \frac{k+1}{2}$ 时 $-2 = \phi(r') + 4$ ($r' \neq 1$)或 2 ($r' = 1$), 而除此之外, 都有 $-2 \leq \phi(r')$ 。

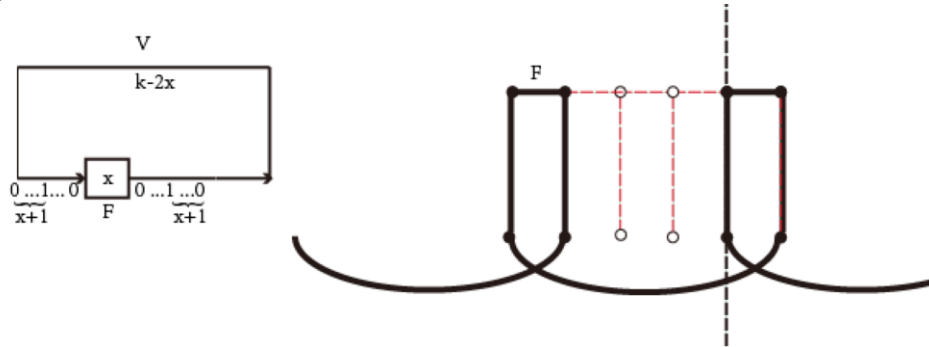


图28 又字型原生圈

上图28是一个又字型原生圈, 凸构件 F 仅有 1 个。初始外圈长度 $k - x$, 偏差度 $2k - 2x - 2$ 。我们假设凹构件 V 连续 β 次 k -扩张($\Delta r = 2k - 1$), 得到方程如下:

$$\begin{cases} (2k - 1)\beta + 2k - 2x - 2 = r & \text{--- (K}_9\text{)} \\ k\beta + k - x = n & \text{--- (K}_{10}\text{)} \end{cases}$$

这种其况下当 $r' > 0$, $x = k - r'$ 时, r 最得最大值 $(k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + 2r' - k - 3$, 而次大值小于等于 $(k - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + n + \phi(r')$ 。当 $r' \geq \frac{k+1}{2}$ 时 $2r' - k - 3 = \phi(r') + 4$, 而除此之外, 都有 $2r' - k - 3 \leq \phi(r')$ 。

最后当 $r' = 0$, n, k 均为奇数, 内圈长度 $\frac{n}{k}$ 为奇数。所以综合有(C_{4b}):

当 n, k 均为奇数, 当 $r' > 1$, r 可以取集合 $\{[k-2, (k-1)\frac{n}{k}] + n + \phi(r'), (k-1)\frac{n}{k} + n + \phi(r') + 4\}$ 中所有奇数; 当 $r' = 1$, r 可以取 $[k-2, (k-1)\frac{n}{k}] + n - 2$ 中所有奇数; 当 $r' = 0$, r 可以取 $[k-2, (k-1)\frac{n}{k}] + n - 6, (k-1)\frac{n}{k} + n$ 中所有奇数。

至此, 我们已经完全证明了**定理 2**。

$k = 1, 3$ 的时候有一定特殊性, 可以进行更细致的分析, 发现其圈长分布达到了 k 为奇数时的理论最大可能, 作为**定理 2**的特例, 我们有

定理 4. $k = 1, 3$ 时, $G = GP(n, k)$ 的圈长分布如下:

- 3) $k = 1$ 或 3 时, 当 n 为偶数, $GP(n, k)$ 是二部图, 且具有弱偶泛圈性, 即从 $g(G)$ 到 $c(G)$ 的圈长的偶圈都存在;
- 4) $k = 1$ 或 3 时, 当 n 为奇数, $GP(n, k)$ 的圈长从 $g(G)$ 到 $c(G)$ 的偶圈都存在; 而圈长为属于 $\{\frac{n}{k}, [\frac{n-1}{k} + 3] \sim 2n - 1\}$ 的奇数的圈也都有, 除此之外不存在其它奇数长度的圈。

六、总结和展望

从准备选题到这篇论文完稿, 历时将近 3 个月, 其中艰辛和乐趣都不足为外人道。非常感谢我的指导老师给我提供的帮助, 从毫无头绪到灵感突现中, 从一些直观的办法到严密的理论证明, 我切实体会到了, 找到一个合适自己的问题和参考前人的成果的重要性, 并且在不断改进本文的过程中得到了很大提高。

本文彻底解决了 $G = GP(n, k), k = 2, 2t + 1 (t \geq 0)$ 时的圈长分布, 并且发现, 当 k 为奇数, n 为偶数时, 只要 n 大于一个 k^2 量级的数, $GP(n, k)$ 就具有弱偶泛圈性, 而 $GP(n, 2)$ 也很接近于有弱泛圈性。对于 k 大于 2 的偶数, 我们尚没有研究出明确的结论。但是我们有理由猜想:

猜想 1. 当 k 大于 2 的偶数时, 只要 n 和 k 足够大并且 $GP(n, k)$ 不同构于 $GP(n, 2t + 1)$, $GP(n, k)$ 都具有弱泛圈性。

从我们定义的构件和构件的扩张生成新圈的方法看, 随着 k 的增大, 原生圈的数量也将越来越多, 构件的选择也更加多样化, 所以我们有理由相信随着 k 的增大, $GP(n, k)$ 的圈长分布越来越稠密, 甚至当 k 足够大, 就会出现弱(偶)泛圈性。

但是随着 k 的增大, 原生圈的结构复杂度急剧增大, 我们的思路是仅从其一个真子集开始扩张, 看能否产生泛圈。例如从哈密尔顿圈开始, 或者从偏差度=1 的圈开始, 如果还不能覆盖围长~周长的所有整数(偶数), 那么我们就从轮辐边下标满足特定的模 k 的余数分布的组合开始, 例如模 k 的各个余数都是偶数个的。如果仍然不能覆盖围长~周长的所有整数(偶整数), 那么我们就从数论角度分析, 尝试证明某些圈长是不可能出现的。这些都是接下来我们要做的工作。

参考文献

1. Bondy, J. A. (1973). Pancyclic graphs: recent results. *Infinite and Finite Sets*, 181-187.
2. Hsu, L. H., & Lin, C. K. (2008). 图论和互连网络. 高立出版集团(CRC).
3. Bondy, J. A. (1971). Pancyclic graphs 1*. *Journal of Combinatorial Theory* 11, 80-84.
4. West, D.B., 著. 图论导引[M]. 李建中, 骆吉洲, 译. 北京: 机械工业出版社, 2005.
5. Watkins, M. E. (1969). A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Theory* 6.2: 152-164.
6. Robertson, N. Graphs Minimal under Girth, Valency, and Connectivity Constraints. Phd Thesis, University of Waterloo, 1969.
7. Bondy, J. A. (1972). Variations on the hamiltonian theme. *Canad. Math. Bull* 15.1: 57-62.
8. Bannai, K. (1978). Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24.2: 181-188.
9. Alspach, B. (1983). The classification of hamiltonian generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 34.3: 293-312.