



风筝 8 字轨迹成因的研究

参赛队员: 姜旖奇、尹泽龙、黄烁

中学: 北京市第二中学

省份: 北京

国家/地区: 中国,北京

指导教师: 廖敦利

摘要

碧落秋方静, 腾空力尚微。清风如可托, 终共白云飞。放风筝是我国古老的传统活动, 它优美的飞行姿态也带给人们无限的遐想, 激发我们去探索其飞行轨迹的物理奥秘。

我们首先对风筝建立两个模型。其一是风力模型, 并建立描述风筝的坐标系。通过球面极坐标中的结论我们得到了一个简单的解析式证明了 8 字中心的平衡点的存在条件。然而在研究并发现风力模型的缺陷后, 我们独立自主构建偏转力模型。通过保守力场模型和球面轨迹坐标系, 我们对风筝两种常见轨迹, 及圆周轨迹和 8 字轨迹的成因给出了合理理论分析加以解释, 并得到了可以预测风筝轨迹的解析式。

为和理论推导进行拟合, 我们进行实验测定。为达到测定 8 字轨迹中风筝位置和绳子拉力的目的我们搭建了一套完整的实验装置并对一些部件进行改装以准确测量切达到实验目的。利用改装过游戏手柄上的摇杆电位器完成位置测量, 拉力计进行拉力测定, 一个蓝牙姿态传感器实时测定风筝的姿态, 并对不同种类、尺寸的风筝进行实验。实验设计方案共有两套, 其一是在室内用遥控汽车拉风筝, 其二是在自然环境中进行数据测量。经过实验发现我们只能在自然环境下得到准确数据。

最终通过数据分析处理, 实验结果和理论吻合, 指导了部分理论分析, 并证明并风力理论模型和偏转力模型的可行性。

关键字: 风筝轨迹, 8 字, 风力模型

目录

- 1 项目简介 5
 - 1.1 项目源起 5
 - 1.2 风筝介绍 6
 - 1.2.1 风筝的历史 6
 - 1.2.2 风筝的研究 7
- 2 合成速度理论模型 8
 - 2.1 导言 8
 - 2.2 理论模型 8
 - 2.2.1 风筝轨迹基本介绍 8
 - 2.2.2 风力模型 10
- 3 风筝 8 字运动的偏转力模型 15
 - 3.1 理论模型简介 16
 - 3.2 风筝的平衡与平衡点的扰动 19
 - 3.3 风力的保守力场模型与风筝的球面圆周运动 22
 - 3.4 风筝八字运动成因的分析 27
 - 3.5 风筝八字运动的偏转力模型 31
- 4 实验部分 37
 - 4.1 实验方法 37
 - 4.2 实验装备 39
 - 4.2.1 风速的测量 39

4.2.2	测定拉力	40
4.2.3	测定风筝的位置角	41
4.2.4	测定风筝的空间姿态.....	44
4.2.5	数据采集	45
4.3	实验结果及分析	46
5	总结	52

1 项目简介

1.1 项目源起



图 1-1 间隔 1s 的风筝轨迹照片

草长莺飞二月天，拂堤杨柳醉春烟。

儿童放学归来早，忙趁东风放纸鸢。

放风筝是春天里最受欢迎的户外活动之一。通过牵在手里的细细的风筝线，控制风筝在空中做出各种姿势。如果你仔细观察就会发现，当风筝不总是稳定的漂在空中的时候，它有时会以特定的轨道运动。就像蜜蜂会跳 8 字舞一样，风筝在空中也会以 8 字运行（图 1-1）。

为什么风筝会以 8 字轨迹运行呢？难道它也要传递什么信息吗？这个信息千百年来一直都没有人破解，万物皆物理，本文就试图对风筝飞行时的受力分析出发，对风筝的飞行轨迹的进行研究。

1.2 风筝介绍

1.2.1 风筝的历史

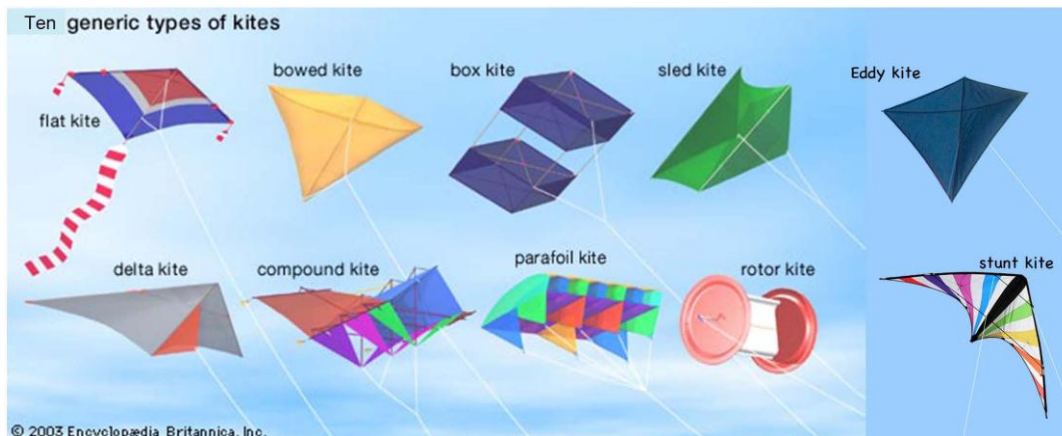


图 1-2 西方风筝种类

Chinese Traditional Kites



Centipede Kite



Rigid Winged Kite



Soft Winged Kite



Flat Kite

图 1-3 传统中国风筝

当今世界公认：最早的风筝出自中国。

在《韩非子·外储说左上》说一中提到：“墨子为木鸢，三年而成，蜚一日而败。”意思是说：墨子制造木鸢，花了三年时间制成，但在天上只飞了一日就坠了下来。可以说是最早的风筝了。

风筝后来发展出很多种类型，并与中国传统文化相融合，产生各种寓意的图

案,比如神话故事、花鸟瑞兽、吉祥如意等等。人们通过放风筝,表达对美好生活的向往。

图 1-2 是西方特色的风筝,图 1-3 是中国传统风筝。本论文中实验的风筝为形状结构最为简单的三角形风筝。

1.2.2 风筝的研究

近代对于风筝的研究,是源于风力发电[1],或者利用风筝的牵引力,达到托运货物或者船只的目的[2][3]。他们更多的是从实验数据出发,分析结果,而不是分析风筝运动的成因。即使引入了动力学模型,也是为了解决控制领域的问题。最近的研究已经应用了全景演示系统下的测量数据,也是为了分析风筝的转向动力学,以便得到飞行控制算法。也有研究风力发电,以便推动船只前行。毕竟,在大海上,这种可再生能源是取之不竭的。

这些研究都忽视风筝自身的轨道模型,假定风筝为零质量,零体积。将风筝的 8 字轨道认为常识,并不去给以任何解释。

本文尝试对风筝的 8 字形状轨道从物理学上给以解释,并建立一个合适的物理和数学模型以解释风筝 8 字轨迹的成因。

随着电子产品的兴起,放风筝也越来越成了老年人的运动,很多年轻人已经不再放风筝了,甚至不知道风筝要如何放了。本文希望通过分析放风筝中的物理学含义,吸引更多的年轻人走进大自然,体会这一历经 2000 多年历史的传统活动。

2 合成速度理论模型

2.1 引言

一般在我们放风筝的过程中, 风筝受恒定气流中上升并保持稳定平衡, 而风筝的平衡位置往往无法逾越某个高度。此时如果风筝收到气流扰动, 将会产生各种模式的运动模式, 其中实验观察到的最常见的两种模式为风筝的圆周运动与八字运动。在本章中, 我们将使用几何模型和纯理论解析的方法分析风筝的各种运动模式, 包括一种新颖的初态几何分析模型和一种全新的对于风筝八字运动的解析模型。

2.2 理论模型

通过研究 8 字轨迹中心的受力平衡点, 我们可以得到关于风筝位置和风筝速度的复杂表达式。我们通过简化此方程式, 得到了风筝方位角、风筝速度及速度之间夹角的关系方程。进而得到出了平衡点的性质、中心的平衡点的存在条件、并对后续的实验进行指导。

2.2.1 风筝轨迹基本介绍

根据实践中对风筝轨迹的观察, 以及对风筝受力的物理模型分析, 我们做了如下合理假设和近似:

1. 假定风筝缆线中无弹性、风筝缆线一直处于伸直状态, 尽管由于重力的原因, 风筝缆线会在一定程度上弯曲。

2. 假定空气动力学中的参量在风筝运动过程中保持不变。
3. 假定空气中的参量不变。
4. 假定风筝的质量，风筝线质量为零。(在实验中可以证明此假设合理)

在空气动力学中,升力矢量 L 和阻力矢量 D 是气动力 F 的正交分解的力, 分别和和风速 v_a 垂直和平行。

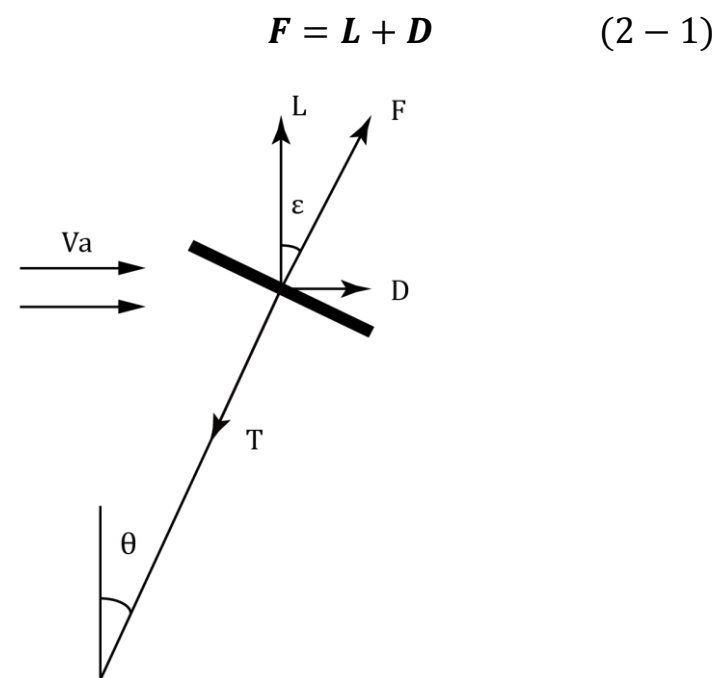


图 2-1 零质量假设下风筝的受力分析

L 和 D 的数值是由空气密度 ρ ，风筝表面积 S 和风速 v_a 决定的，表达式为

$$L = \frac{1}{2} \rho S v_a^2 C_L \quad (2-2)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho S v_a^2 C_D \quad (2-3)$$

尽管在变换的风筝速度 v_a 下，雷诺数会影响 C_L 和 C_D ，这些影响都不在风

力模型中进行讨论。

我们知道在静态和运动状态下, 风筝的升力系数和阻力系数是相同的, 并且都可以在稳态的实验下测定。升力系数和阻力系数的数值大小可以通过实验测量得到, 因此空气动力学中的升力和阻力可以通过公式 (2-2)

$$L = \frac{1}{2} \rho s v_a^2 C_L \quad \text{和 (2-3) 以及风速大小计算得出。}$$

2.2.2 风力模型

分析之前我们先建立 XYZ 空间几何坐标系。以风筝缆线手持的一端尽头为坐标原点 O, 以风速的矢量方向为 X 轴, Z 轴垂直向上, Y 轴垂直于 XZ 平面。然后用球面极坐标系来描述风筝的位置 $K(r, \theta, \varphi)$, 如图 2-22 所示。风筝的位置由球的半径 r , 位置角 θ 和方位角 φ 描述。用角度 χ 来描述风筝所在的球的切面 τ 。

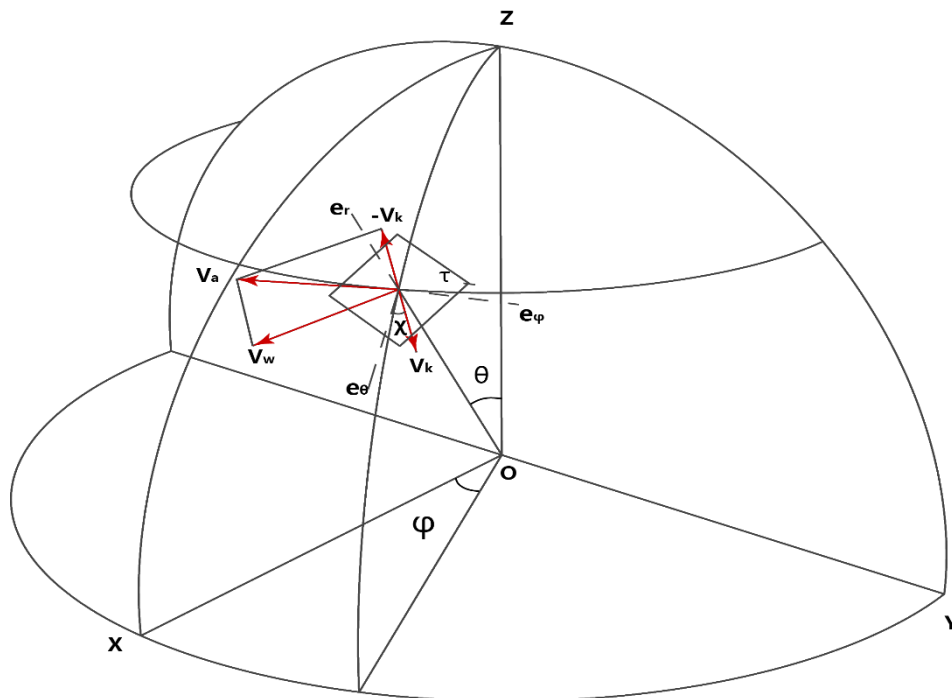


图 2-2 V_w 沿 x 轴方向。航向角 χ 是描述切面 τ 的。球面极坐标 (r, θ, φ) 描述风力的空间直角坐标 X, Y, Z , 这里 X 表示风速的矢量方向。 V_k 和球相切, 在平面 τ 上。

描述风力的空间直角坐标 X, Y, Z 。这里 X 表示风速的矢量方向。 v_k 和球相切，在平面 τ 上。

风筝感受到的速度是风速和风筝自身速度的矢量差记为合速度，即

$$v_a = v_w - v_k \quad (2-4)$$

这个矢量可以用球面极坐标系表示为

$$v_a = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} v_w - \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \chi \\ \sin \chi \end{bmatrix} v_k \quad (2-5)$$

设风筝速度和风速的比例系数

$$\lambda = \frac{v_k}{v_w} \quad (2-6)$$

将 (2-6) 带入 (2-5)，则 v_a 可以表示为

$$v_a = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi - \cos \chi \\ -\sin \varphi - \sin \chi \end{bmatrix} v_w \quad (2-7)$$

为了保持受力平衡，气动力 F 和风筝缆线的拉力 T 在同一条直线上。受力分析如图 2-所示。

由此得到

$$L/D = \cot \varepsilon \quad (2-8)$$

对于忽略质量的模型，风的合速度的径向和切向的分量与升力和阻力的关系如下

$$\frac{v_{a,\tau}}{v_{a,r}} = \frac{L}{D} \quad (2-9)$$

如图 2-1 所示， D 的方向与 v_a 共线， $v_{a,\tau}$ 和 $v_{a,r}$ 正交， D 和 L 正交。将

(2-7) 和 (2-9) 联立消去切向的参数 , 得到以下无量纲的风速和风筝感受到的速度

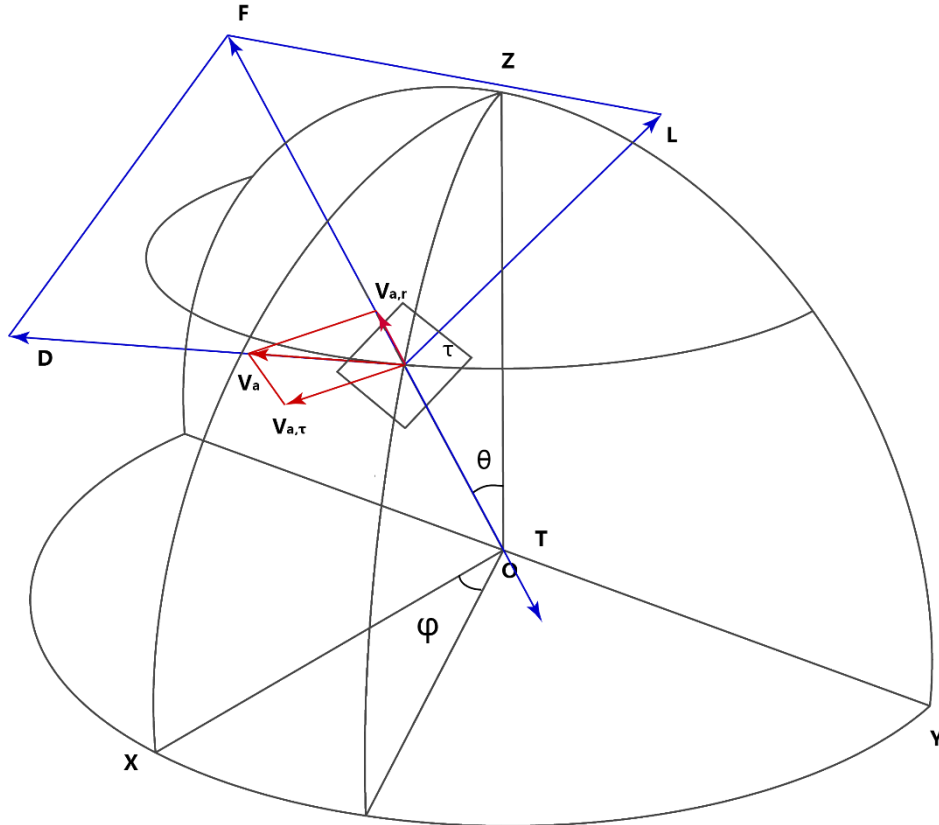


图 2-1 力和速度的几何模型。将 v_a 和 F_a 正交分解。由定义已知 D 和 v_a 在同一条直线上。当假设绳子拉直且忽略质量的影响 $v_{a,r}$ 和 F_a 在同一直线上。

$$\frac{v_a}{v_w} = (\sin \theta \cos \varphi) \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} \quad (2-10)$$

另一方面将 (2-7) 中的切向速度带入 (2-9) 中 , 得到切向速度系数 λ

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 + b^2 - 1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2 b^2} \quad (2-11)$$

其中 :

$$a = \cos \theta \cos \varphi \cos \chi - \sin \varphi \sin \chi \quad (2-12)$$

$$b = \sin \theta \cos \varphi \quad (2-13)$$

将 (2-8) 和 (2-13) 带入(2-10) 消去 b 和 L/D, 得到

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 - \sin^2 \varphi} \quad (2-14)$$

v_w 和 v_k 点积得到风速和风筝速度的夹角 A 的余弦：

$$\cos A = v_w \cdot v_k = \cos \theta \cos \varphi \cos \chi - \sin \varphi \sin \chi = a \quad (2-15)$$

将 (2-11) 化简，去掉根号，得

$$\lambda^2 - 2a\lambda + \sin^2 \varphi = 0 \quad (2-16)$$

通过 (2-16)和 (2-17) 联立得到

$$\cos A = \frac{\lambda^2 + \sin^2 \varphi}{2\lambda} \quad (2-17)$$

至此 ,我们得到了忽略重力的情况下 ,风筝在球面上任一点受力平衡的条件。

从实践中观察到的 8 字轨迹的特点我们可以发现，风筝在 8 字轨迹上的运动速度基本不变，为匀速运动，即 λ 为常数（参见图 1-1）。在 8 字轨迹的中间交点处的曲率半径为无穷大，风筝受力平衡。当风筝偏离 $\varphi = 0$ 点时，风筝所受合力不再为零而是偏向风筝速度的方向的一侧，提供转向的向心力。根据式 (2-17) 我们可以得到如下一些结论：

- 1 风筝的受力平衡条件与 θ 无关。可以在任意高度角受力平衡，即在任意高度都可以出现 8 字轨迹。
- 2 将 $\varphi=0$ 带入 (2-17) ,我们的到 $\cos A = \lambda/2$ ，所受气动力 F 和风筝揽绳的张力 T 在 8 字轨迹的中心点 $\varphi = 0$ 的位置时受力平衡的条件是此时风筝的速

度 v_k 与风速 v_w 的夹角 A 的余弦值为两者之间比值 λ 的 $1/2$ 。

本章我们从分析忽略风筝重力的情况下, 风筝受力平衡的条件入手, 得到风筝出现 8 字轨迹的条件。当风筝偏离 8 字中心的平衡点以后, 风筝的受力将不再平衡, 下一章我们将分析风筝偏离平衡点之后的受力, 进而得到风筝出现 8 字轨迹的原因。

3 风筝 8 字运动的偏转力模型



图 3-1 风筝的各种运动模式(图片来源于网络)

在分析类似风筝轨迹的问题时,如果仅仅从风筝受力的角度分析,将难免出现轨迹预测不尽如人意的结果,这也是我们的研究工作在很长一段时间陷入瓶颈的原因。在本章中,我们将使用风力的保守立场作为引导风筝运动的主线,从而对风筝受力的整体情况有更加准确的把握,进而较为准确的解释风筝轨迹的成因。

3.1 理论模型简介

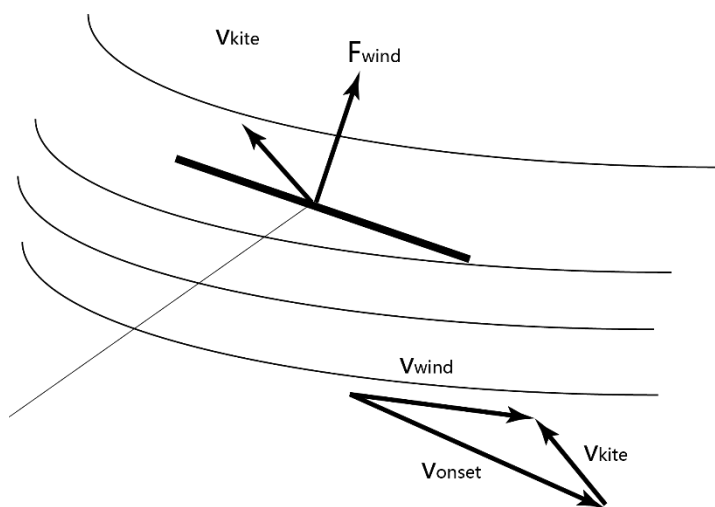


图 3-2 风筝在流场中所受风力示意图

在我们的理论模型中，风筝被视作面积为 A ，质量为 m 的二维轻薄平面，且形状规则。与飞机机翼的升力原理不同，风筝并不能依靠流线型的设计产生压强差，其所受风力可视作仅由垂直风筝面的气流压缩而引起的压差力。因此，风力的表达将不再采用升力 L 与拉力 D 表示，而是简化为：

$$\vec{F}_{wind} = \frac{\rho_a v_{\perp}^2}{2} A C_R \hat{n} \quad (3-1)$$

其中， ρ_a 为空气密度， A 为风筝面积， C_R 为无量纲参数，可由实验进行测定， $\hat{n}$ 为风筝平面的法向量。 $v_{\perp}$ 为垂直风筝面的风速：

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= \vec{v}_{onset} \cdot \hat{n} \\ \vec{v}_{onset} &= \vec{v}_{wind} - \vec{v}_{kite} \end{aligned} \quad (3-2)$$



图 3-3 风筝结构示意图

式中, $\vec{v}_{wind}$ 为风速, 可视为大小、方向恒定的矢量; $\vec{v}_{kite}$ 为风筝速度。 $\vec{v}_{onset}$ 被定义为风筝的迎风速度。其物理意义为: 风筝在运动过程中, 由于自身的具有速度, 其实际感受到的气流会因此受到影响, 此时瞬间应以风筝本身的惯性参考系来分析实际风速方向。

如图 3-3 所示, 风筝平面上的系绳点实际上并不与质心重合, 其到质心的距离为 d 。风力垂直作用于风筝表面的等效点称作风心, 风心为风筝表面上的定点, 且与系绳点、质心三点共线。风心到质心的距离记作 h 。在风筝的平衡过程中, 细绳拉力与风力所产生的力矩相互抵消, 从而使风筝维持在一个相对稳定的倾角。

连接风筝的绳子为轻质细绳, 这意味着: 1、由细绳对气流带来的扰动忽略不计; 2、由于细绳重力忽略不计, 绳将处于伸直状态。在风筝的运动模型中, 不考虑收放线的情况, 因此细绳长度保持固定, 且仅对风筝产生约束力的作用。

在细绳约束下，风筝的运动被限制在了以绳长 l 为半径的球面上：

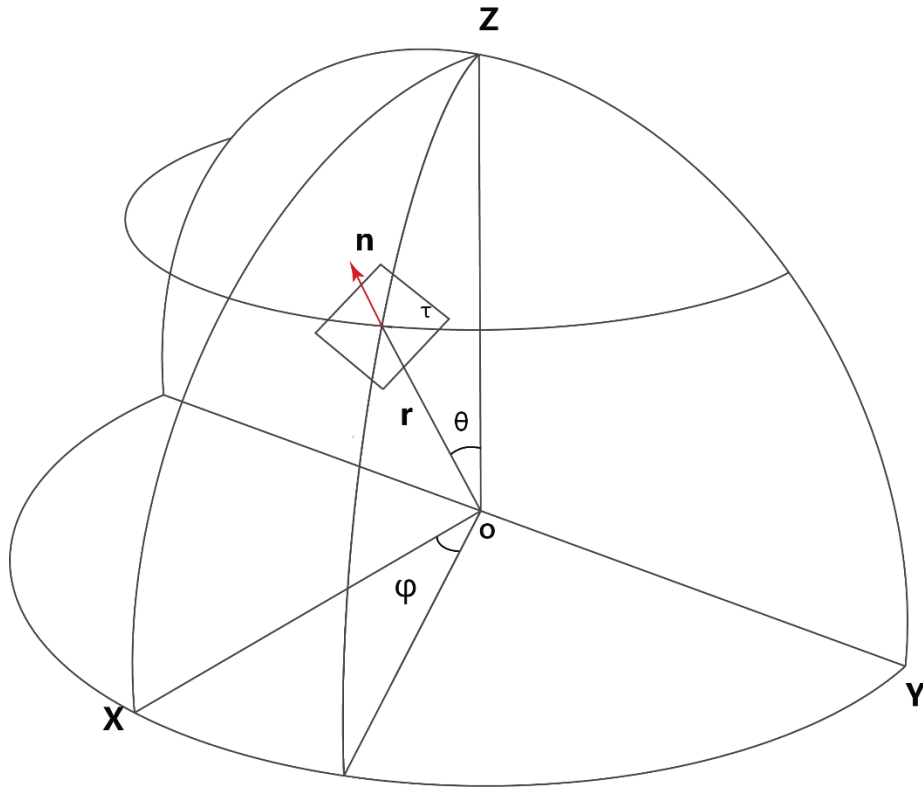


图 3-4 风筝的球面坐标表示

如图 3-4 定义风筝的球面坐标为：

$$\vec{r} = l \hat{r} \quad (3-3)$$

其中， $\hat{r}$ 为风筝的方位向量 $\hat{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$

定义风筝的法向坐标为：

$$\hat{n} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha) \quad (3-4)$$

风的方向设为 x 轴正方向：

$$\vec{v}_{wind} = v_{wind} \hat{x} \quad (3-5)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)$ 表示坐标轴的单位坐标, v_w 为风速的绝对值。

风筝所受到的风力为：

$$\vec{\mathbf{F}}_{wind} = \frac{\left[\left(v_{wind} \hat{\mathbf{x}} - l \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right]^2}{2} \rho_a A C_R \hat{\mathbf{n}} \quad (3-6)$$

3.2 风筝的平衡与平衡点的扰动

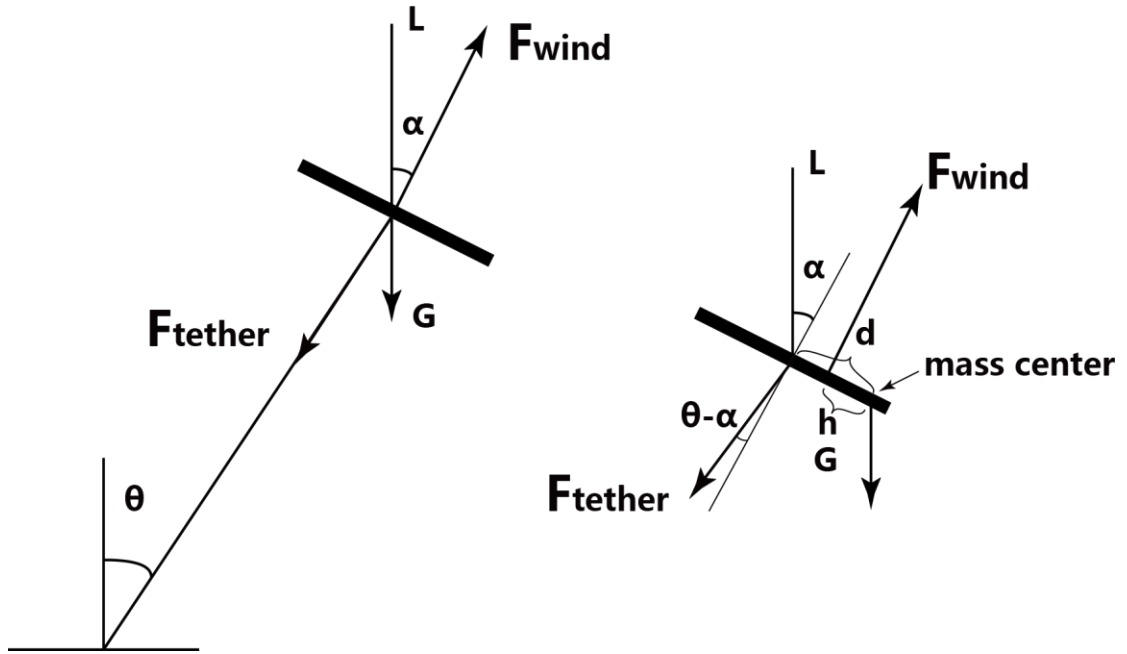


图 3-5 风筝的受力平衡

风筝在空中平衡时，所受风力，拉力与重力三力平衡：

$$\vec{F}_{wind} + \vec{G} + \vec{F}_{tether} = 0 \quad (3-7)$$

$\vec{G} = m\vec{g}$ 为重力， $\vec{F}_{tether}$ 为细绳拉力。

平衡时，风筝的位置处于 $x-z$ 平面内，即 $\beta = \varphi = 0$ 。且此时风筝的轴线与细绳、风筝的法向量共面，因此有风筝所受的力矩平衡：

$$F_{wind}h = F_{tether}d \cos(\alpha - \theta) \quad (3-8)$$

如果可以忽略风筝的重力，则由 (3-7) 和 (3-8) 给出： $\alpha = \theta$ 。由力矩平衡的作用，风筝将处于 $\theta = 0$ 的竖直位置，其所受风力将降至 0。由于风筝重力的缘故，风筝往往不能处于竖直平衡，此时风筝会处于一定倾角 θ 状态且 $\alpha \neq \theta$ 。

求解方程组，有：

$$\begin{cases} \cos(\theta - \alpha) = \sqrt{\frac{h}{d}} \\ \frac{\sin \theta}{\sin^2 \alpha} = \frac{\rho_a v_{wind}^2 A C_R}{2G} \sqrt{1 - \frac{h}{d}} \end{cases} \quad (3-9)$$

方程组解的表达式过于复杂，在此不再给出。

风筝平衡时，若给予小角度的扰动，风筝的法向量来不及改变。由于 $v_{wind} \gg v_{kite}$ ，风筝速度所带来的影响忽略不计，风筝受到恒定风力。此时，风筝和线组成的系统可类比为单摆，其中风力项即为单摆中的“重力”，可以预见，风筝将做简谐振动。

由风力产生的等效重力加速度（沿细绳方向）为：

$$\tilde{g} = \frac{\rho_a v_{wind}^2 \sin^2 \alpha A C_R}{2m} \sqrt{\frac{h}{d}} \quad (3-10)$$

定义 $F_0 = \frac{\rho_a v_{wind}^2 A C_R}{2}$ 为正对着风的静止风筝所受到的风力，则以可得风筝做简谐振动的周期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\tilde{g}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F_0 \sin^2 \alpha} \sqrt{\frac{d}{h}}}$$

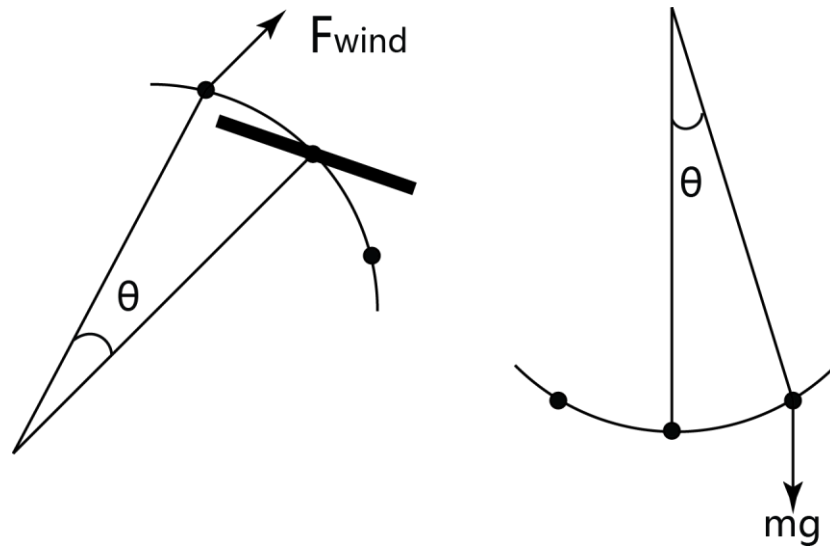


图 3-6 风筝小范围简谐振动示意图

3.3 风力的保守力场模型与风筝的球面圆周运动

一般的，当风筝的法向改变幅度较小，且风筝速度对风力影响较小时，我们可以将风力视作恒力。此时，风力便可视作保守力，从而产生保守力场。其势能为：

$$E_{wind} = -F_{wind} \cdot x_{force} \quad (3-11)$$

其中， $F_{wind} = F_0(\hat{x} \cdot \hat{n})^2$ 为风筝受到的风力， $x_{force} = \vec{r} \cdot \hat{n}$ 为风筝在沿风力方向的轴上行进的距离。

$$E_{wind} = -F_0 l (\hat{x} \cdot \hat{n})^2 \hat{r} \cdot \hat{n} \quad (3-12)$$

其等势线为垂直于风力方向，沿风力方向相互等距的一组同心圆。

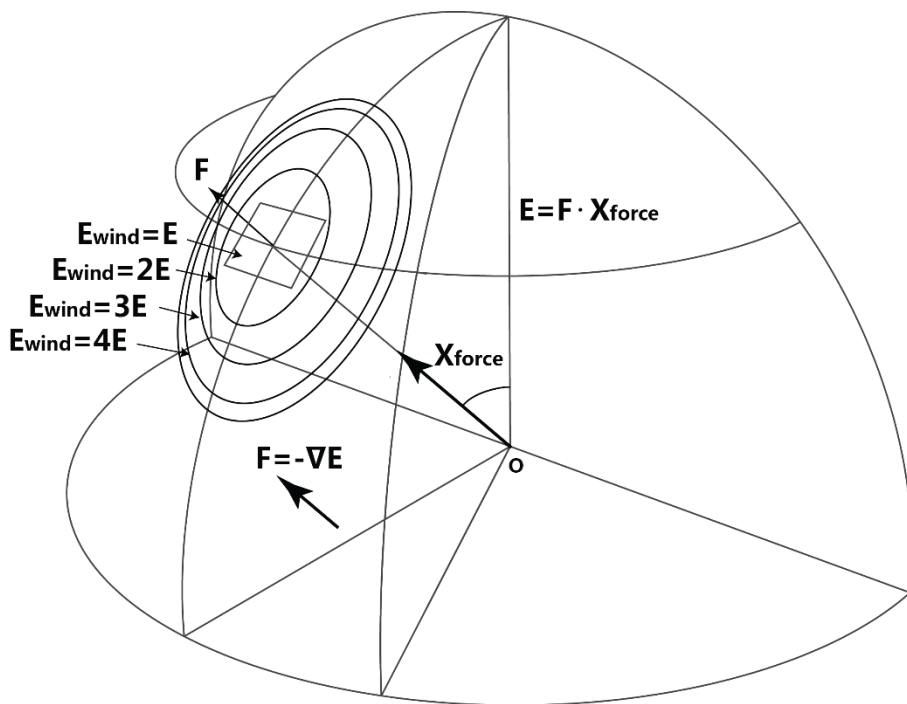


图 3-7 风势的等势线

风筝收到的风力，可以视为由于风力势能的涨落而引起。风力势能在一定范围内变化越剧烈，风筝所受风力越大。因此风筝所受的风力在保守势场中可以写为：

$$\vec{F}_{wind} = -\nabla E_{wind} \quad (3-13)$$

$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ 为拉格朗日算符，代表风力势能的梯度。

需要注意的是，风力势能的适用有以下条件：

1、风筝的法向改变较小。当风筝的运动跨越较大的范围、经过较长时间时，风筝的法向会随时间而改变。此时应以新的风筝法向作为依据重新计算风力势能的表达式。

2、风筝的速度对风力影响较小。当风筝的速度较大时，会产生相应的阻力，此时的风力不仅由保守力构成，还应有阻力的成分。

在某些特殊条件下，风筝会围绕球面上某一点做圆周运动，采用保守力场模

型, 我们接下来对风筝的圆周运动进行解释与计算。

我们首先将球面半径设为 1, 使用单位球来代表风筝在球面上的位置。风筝的实际位置可由式(3-11)得到。

假定风筝的法向量给定：

$$\hat{n}_0 = (\sin \alpha_0 \cos \beta_0, \sin \alpha_0 \sin \beta_0, \cos \alpha_0) \quad (3-14)$$

规定沿球面切面方向上的两个单位向量：

$$\hat{\theta} = (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

$$\hat{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

在此我们建立一种球面轨迹坐标系来取代原先的球坐标系, 其在计算轨迹时, 可以省去很大的计算量。

以 $\hat{r}_0 = \hat{n}_0$, 即势能最低点作为坐标系的原点, 以 $\hat{z}_0 = \hat{n}_0$ 作为坐标系的 z 轴单位向量建立坐标系。坐标系的 $x y$ 平面为极坐标系 $\rho - \varepsilon$, 在极点处, 极轴的方向沿 $\hat{\varphi}$ 方向：

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\varphi}_0 = (-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0, 0)$$

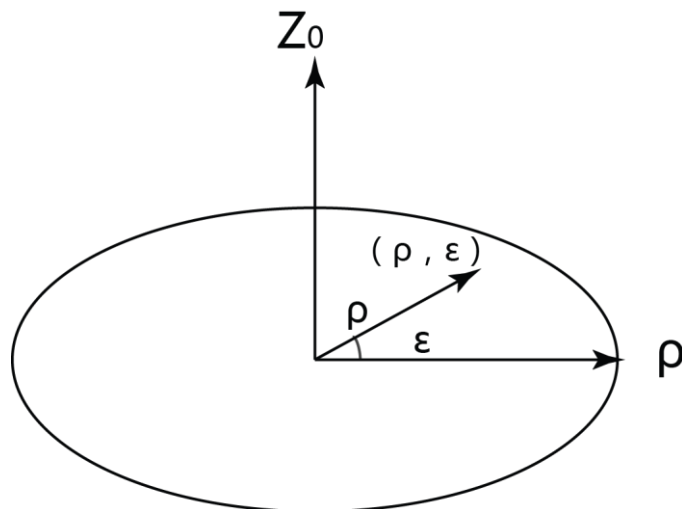


图 3-8 展开的极坐标系平面

整个极坐标平面可经过如下过程得到 :从原点开始 ,沿极角 $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ 两个方向将弯曲球面逐渐展开到二维平面上 ,注意在极轴上每一点 ,实际的极轴方向为沿着 $\varepsilon = 0$ 方向开始 ,以 l 为半径所做的大圆的切线方向 ,而不再和原点一样是 $\hat{\varphi}$ 方向。

在分析风筝运动的过程中 ,我们有如下假设 :

- 1、对于轻质风筝 ,风力与拉力远大于诸如重力 ,离心力 ,科里奥利力等其他力的作用 ,因此 ,对于风筝的受力分析也仅考虑这两个力。
- 2、细线的约束使得风筝的运动被限制在了球面上 ,风力与拉力在垂直球面的方向上抵消 ,合力的方向沿球面切面方向。

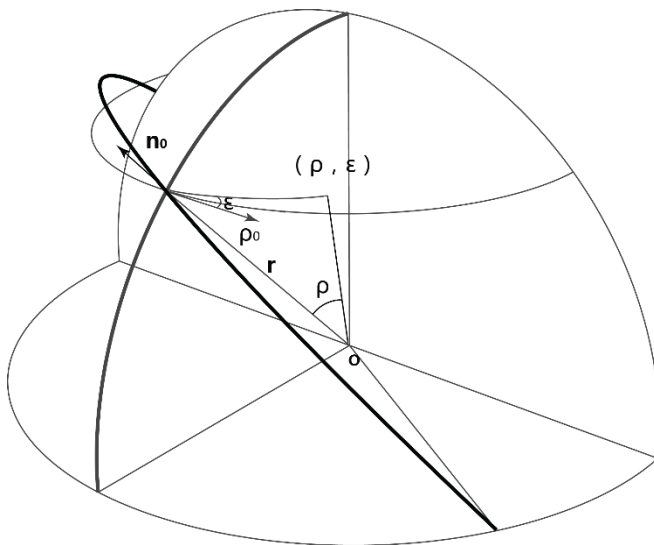


图 3-10 三维的球面上的极轴与极角

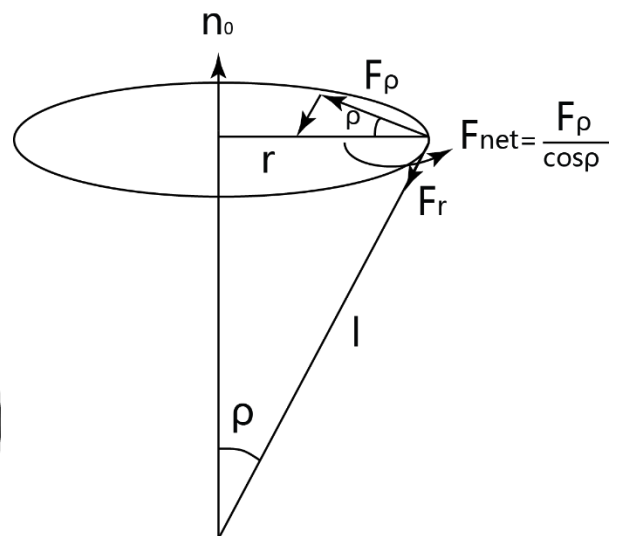


图 3-9 风筝作圆周运动的受力分析

由图 3.10 , 由于球面半径为 1 , 易得到 :

$$\hat{r} \cdot \hat{n}_0 = \cos \rho \quad (3-16)$$

令

$$F_R = F_0 (\sin \alpha_0 \cos \beta_0)^2$$

从而

$$E_{wind} = -F_R l \cos \rho \quad (3-17)$$

由于细绳将风筝的自由度限制在了 $\rho - \varepsilon$ 平面内，只需考虑 $\rho - \varepsilon$ 平面内的受力情况。由(3-13)得到：

$$F_\rho = -\frac{\partial E_{wind}}{l \partial \rho} = -F_R \sin \rho$$

$$F_\varepsilon = -\frac{\partial E_{wind}}{l \sin \rho \partial \varepsilon} = 0 \quad (3-18)$$

此式说明，在极坐标系中，风力对风筝产生指向原点的向心力，且风力相对原点是有心力，即没有切向的分量。

如果此有心力恰好满足圆周运动的方程：

$$\frac{F_\rho}{\cos \rho} = -\frac{mv_{kite}^2}{l \sin \rho} \quad (3-19)$$

风筝便会恰好做圆周运动。此时风筝的速度 v_{kite} ，极轴坐标 ρ 满足：

$$\frac{v_{kite}^2 \cos \rho}{\sin^2 \rho} = \frac{F_R l}{m} \quad (3-20)$$

在三维的实际情况下，风筝作圆周运动的半径为：

$$r = l \sin \rho \quad (3-21)$$

小半径圆周运动下，有 $\rho \approx \sin \rho$ ， $\cos \rho \approx 1$ 进而

$$\omega = \frac{v_{kite}}{l \rho} = \sqrt{\frac{F_R}{ml}} \quad (3-22)$$

此式给定了风筝作小半径圆周运动的角速度，是一个定值。

上面的步骤中，我们通过把球面展开到二维平面上，并借助极坐标来描述风

筝的运动，成功解释了风筝的圆周运动。在后续的理论分析中，同样的方法也可以很好地用来解释风筝的八字运动。

3.4 风筝八字运动成因的分析

风筝虽然存在圆周运动的运动模式，但其出现频率并不高。归根结底，是由于产生圆周运动所需要的初始条件过于严格（需要严格服从特定的比例关系）。此外，风筝的圆周运动实际上是一个不稳定的模式，由于风筝的偏转方向始终不变，偏转角随时间线性增加，经过较长时间，会使细线产生较大的扭力矩从而打破稳定运动。

实际上，实验中大部分观察到的运动模式为八字运动，由于八字运动轨迹对称，因此其偏转方向在中点两侧相反，不会出现扭转角堆积的情况。

对于八字运动轨迹的成因，已有文献中并没有非常直接而明确的说明，在本节中，我们使用完全自创的八字运动轨迹模型——偏转力模型——来解释八字运动的成因，同时给出八字运动的轨道解析式和轨迹预测。



图 3-11 风筝八字运动的频闪照片[1]

首先, 我们需要了解风筝运动中的关键性质。由已有文献中对于风筝八字运动的频闪照片, 并结合大量实验数据, 我们发现了风筝的运动具有保持匀速运动的特点。

实际上, 风筝在运动过程中如果经历加速过程, 根据风筝受力:

$$\vec{F}_{wind} = \frac{\rho_a [(\vec{v}_{wind} - \vec{v}_{kite}) \cdot \hat{n}]^2}{2} AC_R \hat{n} \quad (3-23)$$

则风筝必定会沿速度方向前倾, 从而产生加速度。其绝对值为:

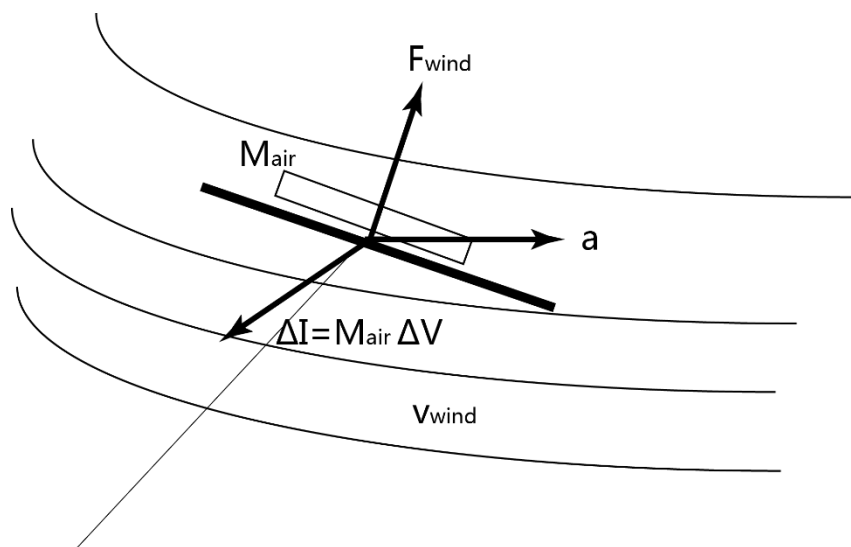


图 3-12 风筝加速过程的流场（阻力）分析

$$a = \frac{\vec{F}_{wind} \cdot \vec{v}_{kite}}{m |\vec{v}_{kite}|} > 0 \quad (3-24)$$

由于风筝前倾, 相比较于匀速运动, 在加速过程中风筝前表面会比匀速运动积累更大气流, 由于气流具有惯性, 单位时间内撞击在风筝表面上的气体分子迅速产生反冲 ΔI :

$$\Delta I = -M_{air} \Delta V \quad (3-25)$$

如果随时间累积的 $M_{air} \gg m$, 则气流能够对风筝产生很大的阻力, 从而使迅速减速。对于减速情况同样适用。

因此, 轻质风筝的加减速过程, 都会受到气流极大的阻力, 从而使风筝的速度保持稳定。

相比较而言, 风筝的偏转则是一种较为稳定的状态。对于风筝的偏转运动, 由式 (3-23) 和 (3-24) 可知 :

$$\hat{n} \cdot \vec{v}_{kite} = 0 \quad (3-26)$$

偏转时, 风筝的法向与风筝速度垂直, 风力不对风筝做功, 风筝保持匀速状态。

风筝偏转过程中的曲率半径为 :

$$R = \frac{mv_{kite}^2}{F_{dev}} \quad (3-27)$$

其中 :

$$F_{dev} = \frac{\vec{F}_{wind} \cdot (\hat{r} \times \vec{v}_{kite})}{v_{kite}} \quad (3-28)$$

为风筝所受垂直于速度方向的偏转力。

由实验图知, 风筝做八字运动过程中, 在中心点附近接近作直线运动, 在两端点处急剧转向, 即 : 曲率半径 R 随偏离中心店距离的增加而单调减少。由 (3-27) 知, 做匀速运动的风筝, 其所受偏转力 F_{dev} 随偏离中心距离的增加而单调增加。

反观我们在前一节得到的风筝做圆周运动所受风力表达式 :

$$|F_{\rho}| = F_R \sin \rho$$

我们发现 : 风力方向与运动方向垂直, 且风力大小 F_{ρ} 随极坐标 ρ 的增大而

增大。

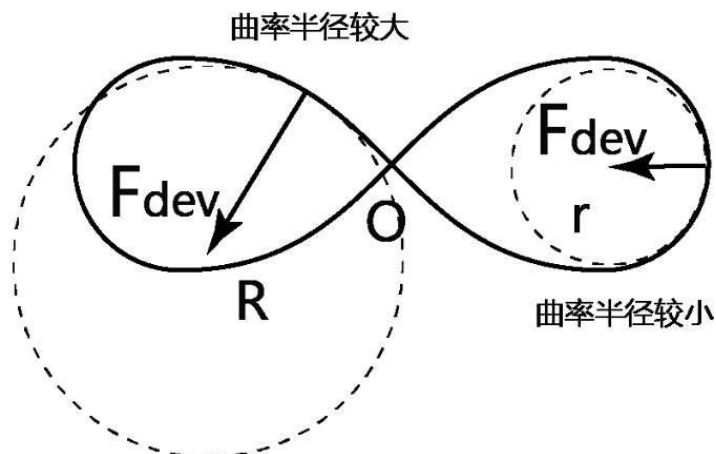


图 3-13 风筝的 8 字运动模拟轨道和曲率半径分析

经过以上分析，我们提出了以下假设：

- 1、风筝在八字运动中视作匀速运动，风力方向垂直于风筝速度。
- 2、风筝在运动过程中，法向相对于径向的倾斜角 τ 与风筝相对于平衡点的弧度 ρ 均为小量，风筝所受风力大小可视作恒力。（与平衡时所受风力相等）

有近似：

$$\sin \tau = \tau ; \sin \rho = \rho \quad (3-29)$$

风筝所受的偏转力 $F_{dev} = F_{wind} \sin \tau = F_{wind} \tau$

- 3、由风筝八字运动的频闪照片和实验数据，我们发现风筝所受的偏转力随其距离中心点的距离单调递增。如果我们将风筝的运动与单摆进行类比，在小角度下，单摆受到的回复力正比于到平衡位置的距离；而风筝法向倾斜角 τ 随平衡点的远离而不断变大，因此我们近似认为风筝法向倾斜角 τ 与弧度 ρ 成线性关系：

$$\tau = k\rho \quad (3-30)$$

其中 k 为比例系数。在接下来的推理中我们取了 $k=1$ 的特殊情况，即 $\tau = \rho$ 。

这三条假设便是我们接下来偏转角模型理论的根本前提。

3.5 风筝八字运动的偏转力模型

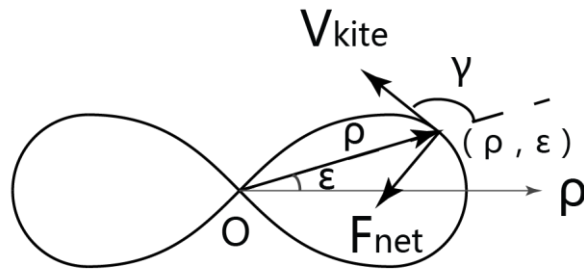


图 3-14 八字运动偏转力的受力分析

依据 3.4 中得到的结论, 我们由此提出了风筝八字运动的偏转力模型。再次采用 3.3 中的球面轨迹坐标系。

由 (3-29) (3-30):

$$F_{net} = F_{wind}\tau = F_{wind}\rho$$

由假设知: 风力大小恒定, 且等于风筝在平衡点的受力:

$$F_{wind} = F_R = F_0(\sin \alpha_0 \cos \beta_0)^2 \quad (3-31)$$

令

由此得到:

$$F_{net} = F_R \rho \quad (3-33)$$

如图 3.15, 在极坐标系中, 令 γ 表示由极径方向逆时针转动至 $\vec{v}_{kite}$ 方向的转角, 由此我们得到风筝在极坐标系中的运动方程:

$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon + \gamma)}{dt} = \frac{F_R \rho}{mv_{kite}} \end{cases} \quad (3-34)$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \frac{v_{kite}}{l} \cos \gamma \end{cases} \quad (3-35)$$

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v_{kite}}{\rho l} \sin \gamma \end{cases} \quad (3-36)$$

(3-34) 阐述了偏转力 F_{net} 使风筝的速度转向的效应, (3-35) 和 (3-36)

则阐述了风筝极径 ρ 和极角 ε 的变化过程。规定风筝的初态参数:

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \rho = 0, \gamma = 0$$

由 (3-34) 减 (3-36) 消去 $\frac{d\varepsilon}{dt}$, 再除以 (3-35) 消去 dt :

$$\frac{d \sin \gamma}{d\rho^2} = \frac{C_E}{2} - \frac{\sin \gamma}{2\rho^2} \quad (3-37)$$

其中参数

$$C_E = \frac{W_R}{2E_k} \quad (3-38)$$

其中 $E_k = \frac{mv_{kite}^2}{2}$ 代表风筝动能, $W_R = F_R l$

求解 (3-37) 的微分方程, 得到:

$$\sin \gamma = \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_E \rho^2}{3} \quad (3-39)$$

代入相应边界条件解得常数 $C_1 = 0$

$$\sin \gamma = \frac{C_E \rho^2}{3} \quad (3-40)$$

(3-40) 给出了速度相对于极径的偏角随极径的变化关系。用 (3-35) 式

除以 (3-36) 式, 整理得到:

$$\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \frac{\tan \gamma}{\rho} \quad (3-41)$$

代入 (3-40) 并求解, 得到:

$$\varepsilon + C_2 = \frac{\gamma}{2} \quad (3-42)$$

由边界条件解得常数 $C_2 = -\varepsilon_0$, 结合 (3-40), 最终求得极坐标下轨迹方程:

$$\rho = \sqrt{\frac{3 \sin[2(\varepsilon - \varepsilon_0)]}{C_E}} \quad (3-43)$$

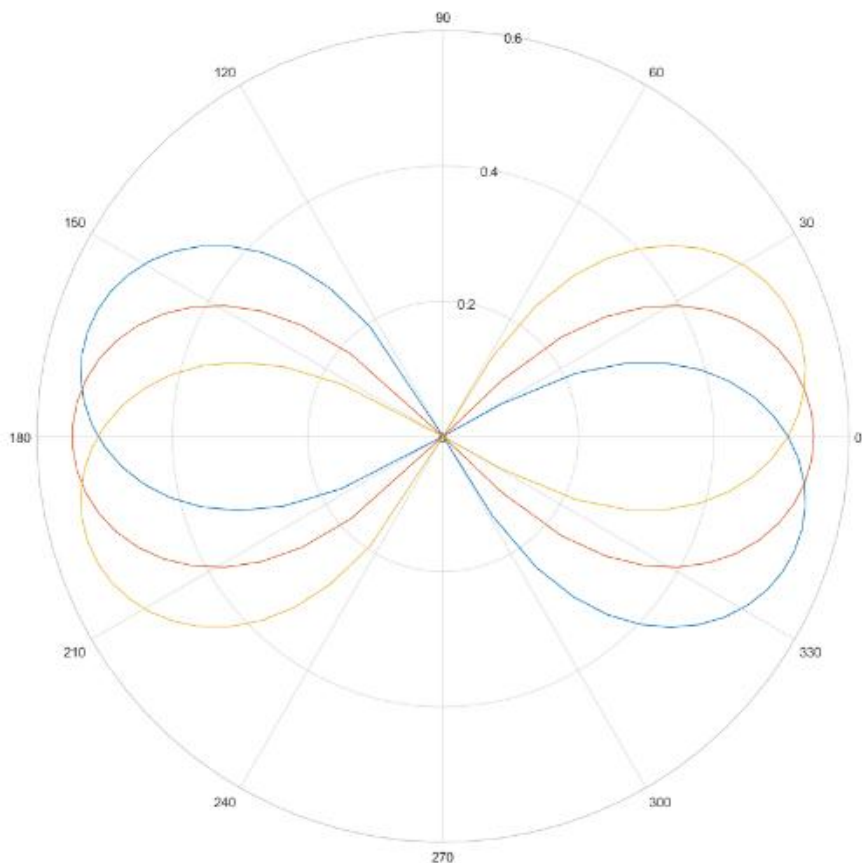


图 3-15 $CE=20$, φ 等于 $-\pi/3$, $-\pi/4$, $-\pi/6$ 的图像

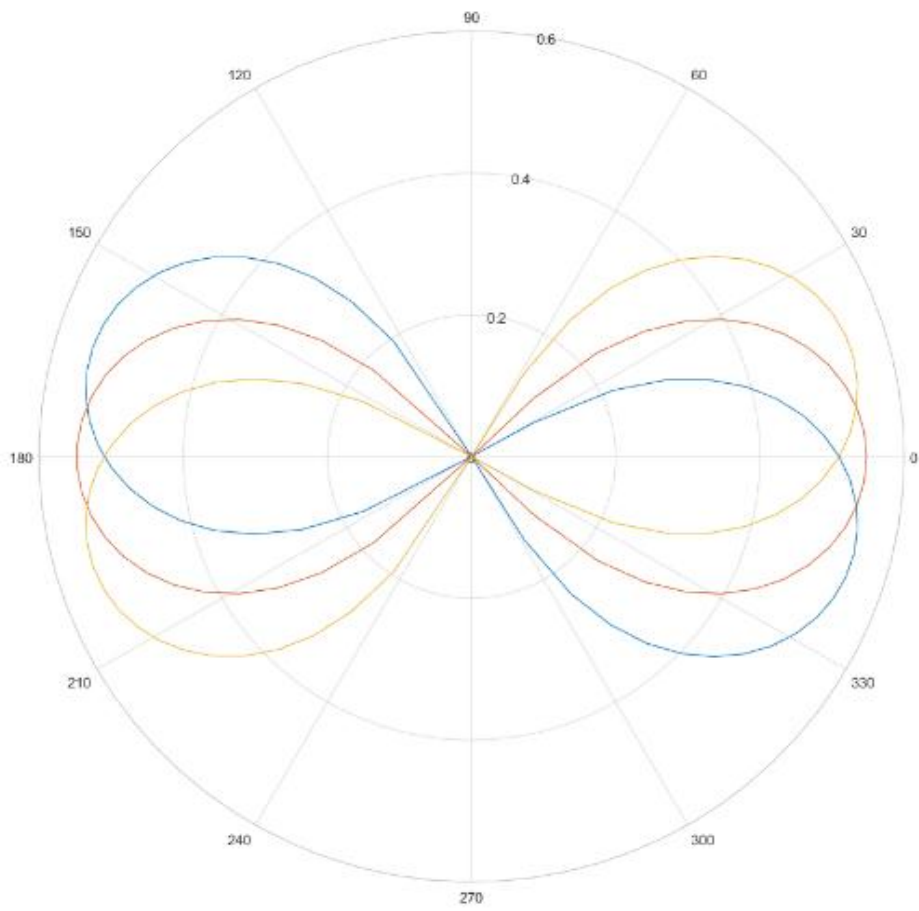


图 3-15
 $CE=20$, φ 等于 $-\pi/3, -\pi/4, -\pi/6$ 的
图像

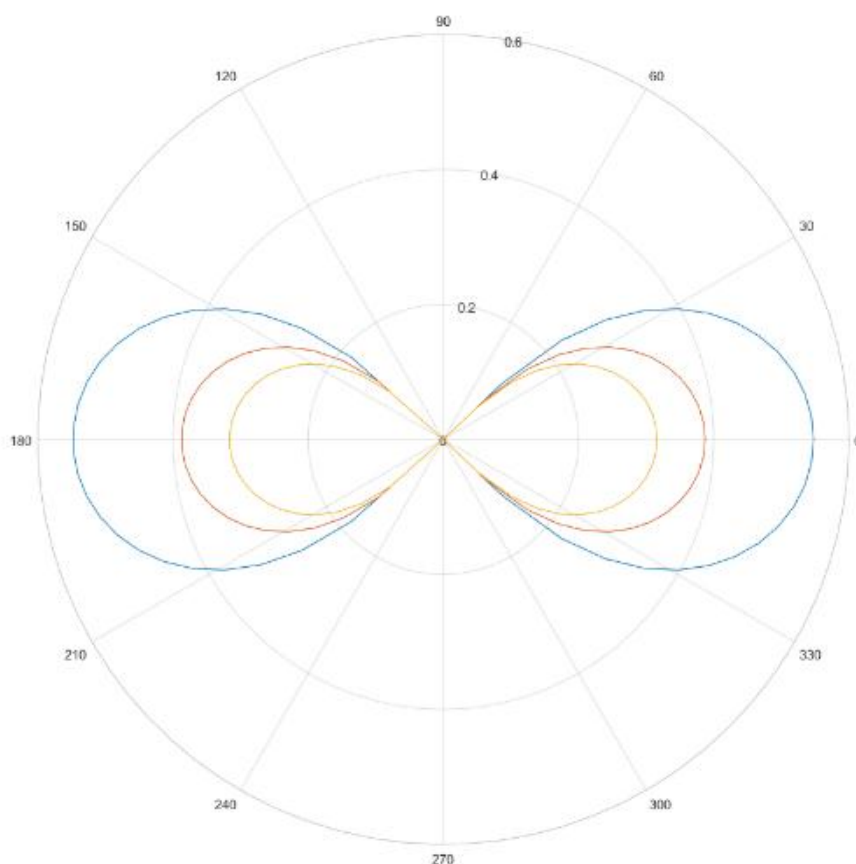


图 3-16 $CE=10, 20, 30$, φ 等于 $-\pi/4$ 的图像

这便是偏转力模型的计算结果, 它为我们提供了直接的轨迹方程的预测。经过 matlab 软件的作图分析后发现, 轨迹形状是确定的, 其大小唯一地由 C_E 决定: 风筝动能 E_k 越大, 或轨迹中心点 (即坐标原点) 的 $\hat{n}_0 \cdot \hat{x}$ 越小 (即轨迹中心的球面 x 坐标越小), 轨迹的尺寸就越大。 ε_0 大小的改变会使得轨迹扰过原点的轴线旋转。

将此轨迹方程沿过原点的轴线方向均匀铺展到球面上 (即进行球面轨迹坐标系到球坐标系的变换), 既可以得到三维的球面轨迹方程。

当风筝距离原点距离 ρ 的尺度较大时, 小角近似不再适用, 实际风力将比理论值偏小。这样, 在端点处, 轨道更具有由中心向外发散的趋势。

至此, 我们借助保守力场模型和球面轨迹坐标系成功地解释了两种最常见的

风筝运动模式，对于形状不规则的轨迹，我们同样可以用类似的方式求解轨迹，对此不再细述。实际上，借助风力势能的定义，我们成功的对风力的大小有了整体的把握，而并没有像（3-6）那样严格准确地计算风力；借助对风筝八字运动的关键特性——距中心点越远，轨迹曲率半径越小，我们成功发现了“偏转力”这一因素的重要作用。

我们因此发现，描述一个陌生系统的运动模式，我们往往无法对其运动定律给出准确的表达式。（如此问题中，可能意味着复杂的空气动力学方程）然而，借助实验现象，对运动模式的特征进行分析，进而抓住运动模式形成的根本原因，是研究这类问题最有效的方法。

4 实验部分

本篇章基于测量在风筝在进行 8 字轨迹运动时的位置分析和数据测量。所有实验目的与理论进行数据拟合，并指导理论分析。

4.1 实验方法

我们经过大量的实验发现，在通常的微风天气下放风筝，是很难出现 8 字轨迹的。原因是这种天气下风筝在几十米到几百米空中飞行时，风速较小，风筝获得升力并很大，相应的风筝线的拉力也不是很大。此时风筝基本处于稳定漂浮的状态。风筝线是明显的弯曲状态，此时没有 8 字轨迹出现。只有在大风天，风速很快，风筝受到很大的升力，进而导致风筝线内的拉力也很大的情况下，风筝才会进入 8 字轨迹的飞行模式，此时风筝线基本处于拉直状态。然而这种天气并不好找，我们通过实验发现了另外个可以很容易获得 8 字轨迹的方法。

我们在无风或者微风的环境下，采用小车拉动风筝前进的办法，人为的产生相对运动的风。用这种方法可以很容易的在低空获得 8 字轨迹。尤其是在风筝线不是很长的情况下，8 字轨迹更容易获得。此时风速等于小车的速度，更容易控制和测量。

理论分析表明，风筝要进入 8 字轨迹运动模式，需满足条件：在 $\varphi=0$ 的平衡位置， $\cos A = \lambda/2$ 。实践中，要实现 8 字的轨迹需要有合适的天气条件，和恰当的时机。风筝在球面上的速度 $V_k = \lambda V_w$ 很难直接控制。比较直接的方法是改变 V_w ，以获得合适的 λ 。通过调整拖车的速度我们即可获得不同的风速 V_w 。我们实验用的风筝如图 4-1 所示，该风筝加姿态传感器总重量为 250g。长 1.0m 宽 2.0m。



图 4-1 实验用风筝

在微风环境下，由小车拉动测试。风速仪显示微风风速小于 0.5m/s 。小车运动的速度 2m/s 。较短的风筝线会更容易获得 8 字的轨迹，实验中采用了 4 米的风筝线。试验中风筝以一个与地面有一个倾斜角的姿态出发，改变小车的速度，即可获得一个 8 字形的轨迹。这样只要在没有风或者微风的天气下，都可以较容易的获得 8 字形的轨迹。

4.2 实验装备

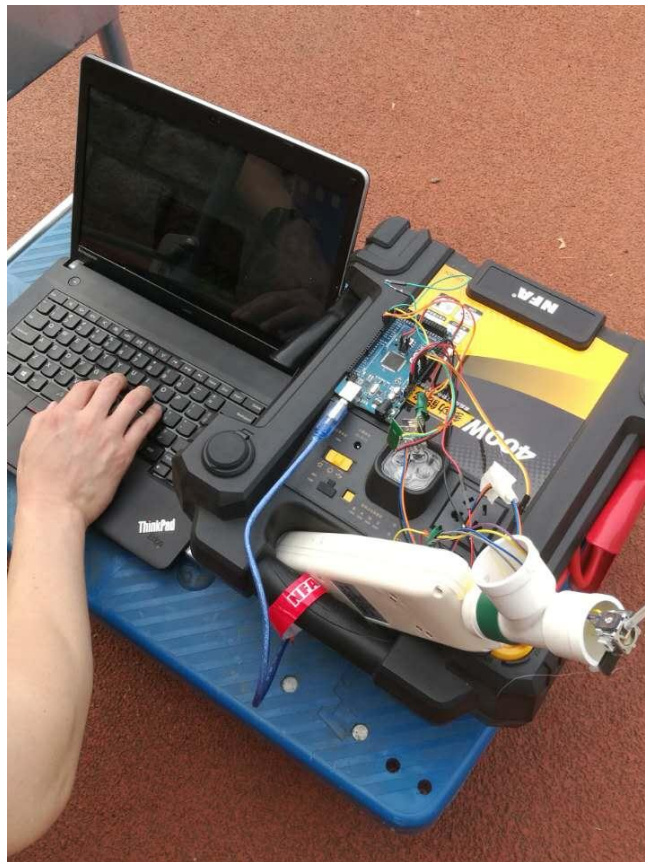


图 4-2 实验装置整体照片

搭建了如图 1 所示一套测试平台，用于同时记录风筝的位置角 (θ, φ)，姿态角，以及风筝线的张力 T 。同时采用热线风速仪记录实验中的风速。整体实验装备如图 4-2 所示。

4.2.1 风速的测量



图 4-3 热线风速仪

在自然环境中，因为风速会出现波动而不稳定，所以我们用相对速度来模拟风速，即用小车拉着风筝走。室外的风速采用如图 4 所示热线风速仪测量。其原理为气流流过一根被电流加热的铂金丝，会带走铂金丝的热量，使铂金丝的温度降低，而铂金的电阻又随温度变化，所以通过测量铂金丝的电阻变化就可以间接地获得风速的数据。

4.2.2 测定拉力

我们使用带有串口传输数据功能的拉力计测量风筝线的张力。

拉力计是测量绳子拉力的仪器。在拉力计中有电阻丝缠绕在金属薄壁一侧，当子被拉紧时，因为绳子的拉力导致金属薄壁被拉伸变形，同时附着在薄壁上的金属丝因为拉伸而使电阻丝的长度 l 变长，且电阻丝的横截面积 S 变小，由于电阻

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

于是在有拉力的同时电阻的阻值增大。通过精密的电桥电路测量电阻阻值

的改变, 即可测量拉力的大小。

在大风筝的实验中, 我们发现拉力计虽然最大量程是 10N, 但是至少在 15N 左右的时候还有准确的读数。拉力计带有串口可以实时输出数据。

4.2.3 测定风筝的位置角

为了测定位置角 θ 和方位角 φ , 我们改装了一套游戏手柄上的摇杆电位器完成测量。

电子游戏的手柄上有两个摇杆电位器, 玩家通过遥控装置操控游戏中人物的移动方向。在转动摇杆的过程中, 它会带动两个正交的电位器 (图 2), 电位器可以把角度数据转换成 0-5V 的直流电压。因两端电位器输出电压变化而有方向感知能力。电位器的基本功能是分压。电阻元件可以被看作为两个串联的电阻 (电位器电阻), 其中电刷的位置决定了两个电阻阻值的比例。利用改装的摇杆, 我们可以手机风筝在空中飞行的位置 (球面极坐标的两个角度)。



图 4-4 摇杆电位器

我们在淘宝上购买 X-Box 360 摇杆。因为游戏摇杆要有自动回中心的功能，其内部有一个弹簧，摇杆会在偏离中心位置后获得恢复力。因为弹簧会产生的力导致在测量风筝空间位置不准确，于是我们将摇杆拆开去掉其中的弹簧，以获得准确的极角 θ 和方位角 φ 。

为了角度测量的灵敏度，在电位器的摇杆上增加了一根吸管。吸管的一端和两个正交轴的交点处各放置了一个摩擦力很低的陶瓷眼(图 4.5)。这个电位器被用一个 T 形的管道三通接头固定在一台拉力计上。风筝线从两个瓷眼穿过后系在拉力计的传感器上。

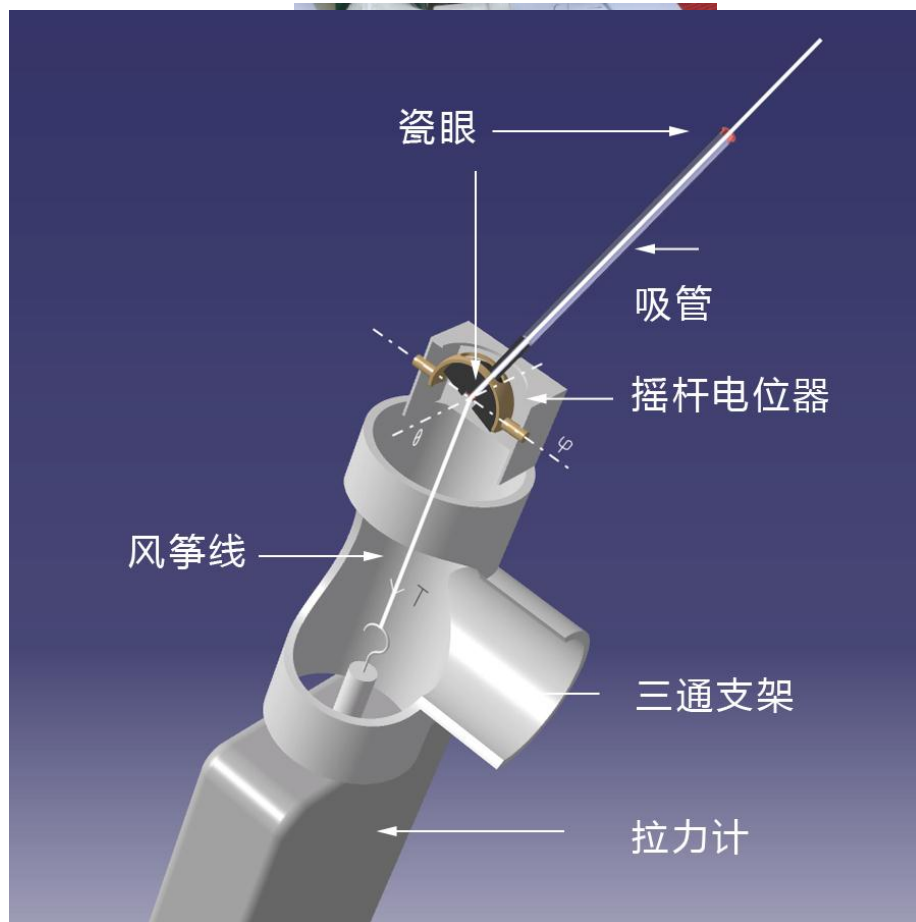


图 4-6 空间角和张力的测量原理

当测量绳子拉力时,拉力计和挂钩和绳子需要在一条直线上。但是在风筝飞行过程中,风筝的位置是在不断变化的,导致绳子的方向也在不断变化。为了和挂钩相连的一段绳子的方向不变,我们对摇杆电位器做了一些改动。我们将摇杆打通并将风筝线穿过其中。并且在摇杆的两个轴线相交的位置加入了一个瓷眼,这样在风筝运动带动上端绳子移动的过程中,底部的绳子保持静止不动。整个测量结构如图 4-6 所示。

由于摇杆电位器的量程范围有限,整个测量装置与地面有一个确定的角度,该角度被设定为大致指向八字形轨道的中间,以保证整个测量过程中电位器不会出现到达极限的情况。

4.2.4测定风筝的空间姿态

一个蓝牙姿态传感器被安装在实验用的风筝上。该传感器内部有六轴传感器芯片和蓝牙芯片，可以实时测量风筝的姿态，并且将数据通过蓝牙回传给地面。

图 4.7 蓝牙姿态传感器



图 4-7 蓝牙方位传感器

该传感器的质量为 13g，装在大风筝上做测试时，因风筝质量比较大，蓝牙方位传感器的影响可以被忽略。

4.2.5 数据采集

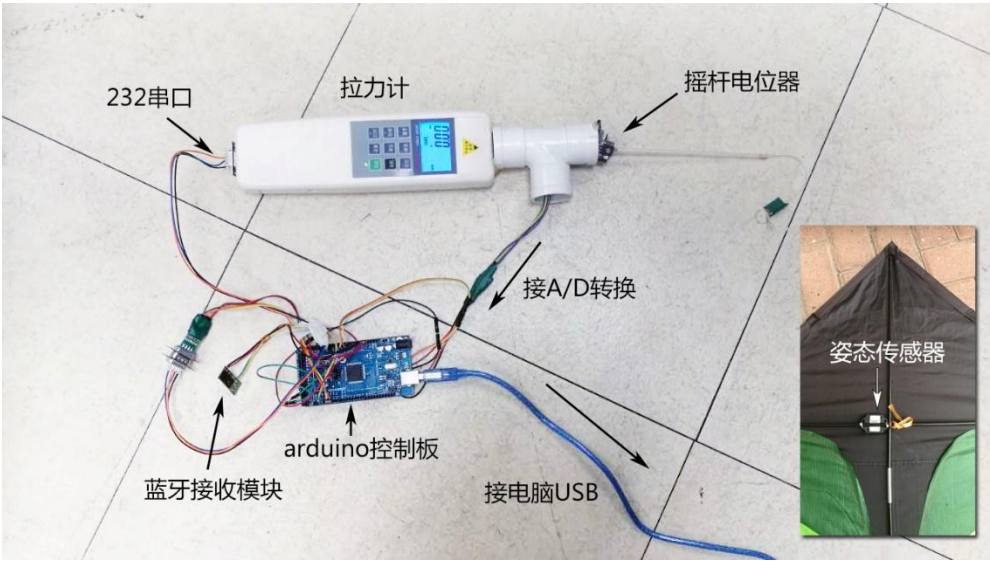


图 4-10 数据采集系统

```
test_multiserial | Arduino 1.8.3
文件 编辑 项目 工具 帮助

test_multiserial

Serial1.begin(115200);
Serial2.begin(2400);
delay(2000);
Serial2.write(0x65);
}

float roll = 0, pitch = 0, yaw = 0;

const int X_Pin = A1;
const int Y_Pin = A2;

int sensorValueX = 0; // value read from the pot
int sensorValueY = 0; // value read from the pot

int cnt=0;

byte buf[11];
int buf_cnt = 0;

byte weight_status = 3;
byte weight_sign = 0;
int weight_temp = 0;
int weight = 0;

void loop() {
  int inByte = 0;
  if (Serial1.available()) {
    inByte = Serial1.read();

    if (buf_cnt == 0) {
      if (inByte == 0x55) {
        buf[0] = 0x55;
        buf_cnt++;
      }
    }
    else if (buf_cnt == 1) {
      if (inByte == 0x53) {
        buf[1] = 0x53;
        buf_cnt++;
      }
    }
  }
}
```

保存完成。

图 4-9 arduino 程序

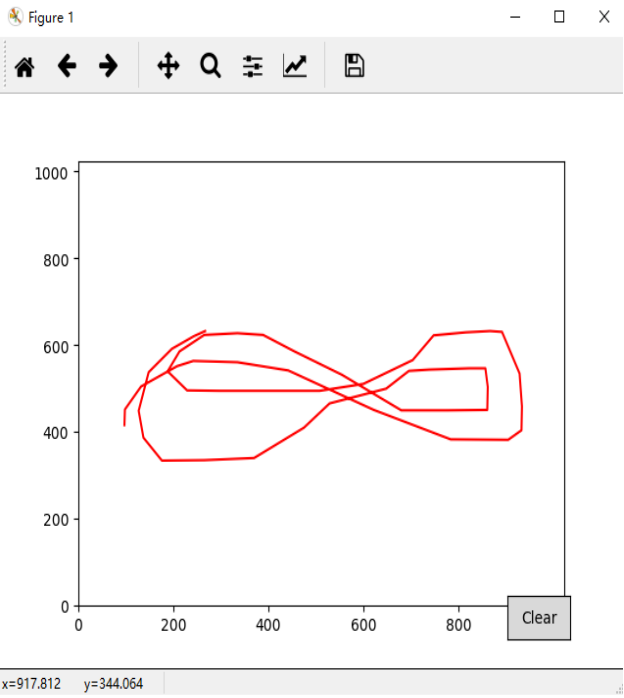


图 4-9 笔记本数据采集软件界面

如图 4-8 数据采集系统包括一个 arduino 套件和一台笔记本电脑。Arduino 是一个。Arduino 是一款便捷灵活、方便上手的开源电子原型平台。包含硬件(各种型号的 Arduino 板) 和软件 (Arduino IDE)。摇杆电位器的两路电压数据被接入 arduino 的 A/D 转换功能模块, 将 0-5V 的电压数据转换为 0-1024 的数字信号。张力计测得的实时数据通过串口输出, 接入 arduino 的串口通信接口。方位传感器的蓝牙信号也通过一个蓝牙接受模块读入 arduino 中。然后 arduino 将同一时刻获得的数据放入一个数组, 以每秒 10 组数据的速度通过串口传给笔记本电脑。电脑上有一个简单的串口通信软件, 可以将获得的数据实时显示并存储。另外还有一个热线风速仪用以监测风速。

4.3 实验结果及分析

实验中我们发现, 8 字形轨迹只出现在风速快, 风筝线拉力大的情况下。在风速较小的情况下, 风筝就会在空中漂浮, 风筝线的拉力几乎消失。在风力大, 但是风筝初始的切向速度较小的情况下, 风筝就会直接升起, 在远处到达一个平衡点, 成为我们常见的稳定的放风筝的情况。所以 8 字轨迹的形成, 需要满足风速度较快、风筝线张力较大、且风筝有一个较大的初始切向速度的条件。这与我们之前理论分析的结果也是吻合的。

实验中采集到的 8 字形轨迹如图所示。根据理论推导结果与理论曲线相对比可以发现, 实验数据与理论曲线基本吻合。

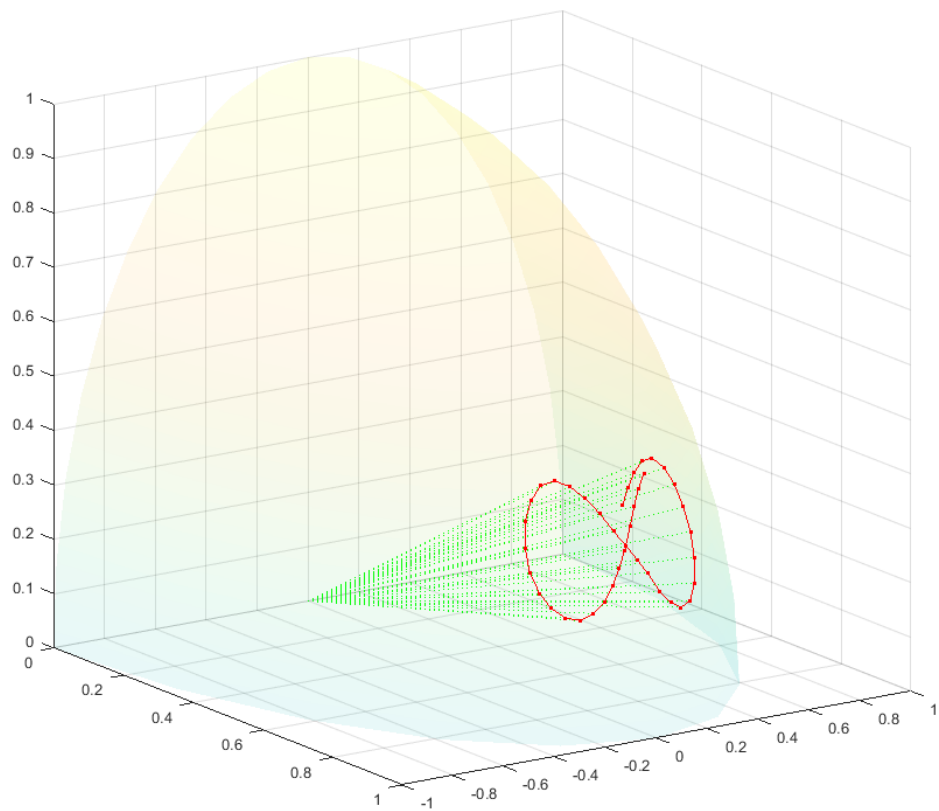


图 4-11 由实验结果绘制的风筝球面8字运动轨迹

由实验测定的风筝轨迹,我们发现风筝的八字运动在中心点呈类似直线运动,在两端点呈类似圆周运动的特点。这印证了理论中对于轨迹曲率的预测:距离中心点越远,曲率半径越小。在风筝法向量变化幅度不大的前提下,距离中心点越远,其风力投影到球面上的分量就越大,偏转力就越大,从而解释了曲率半径的

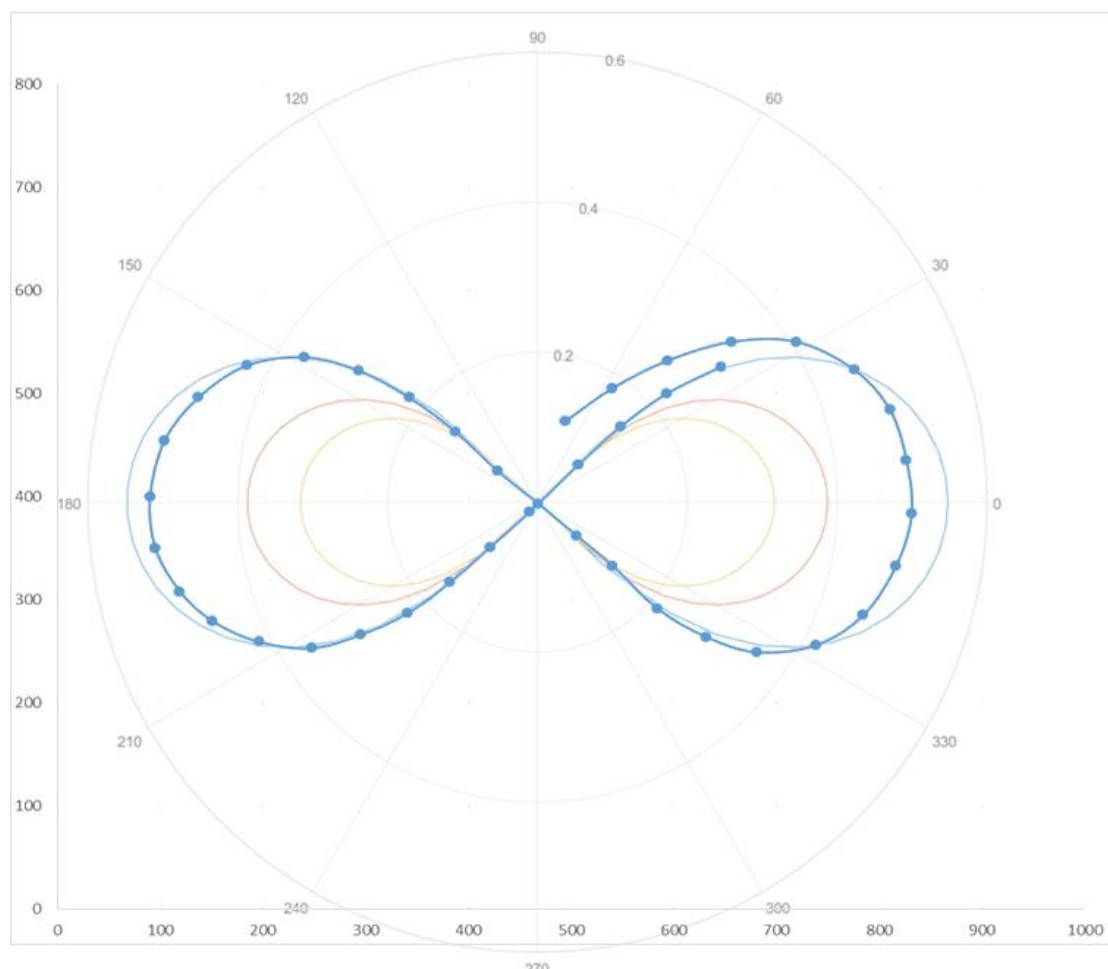


图 4-12 由实验结果绘制的风筝 8 字运动轨迹俯视图

变化关系。此外,风筝在类似直线运动的阶段总是由上至下的运动,而在两侧的曲线运动则呈由下至上的运动。

实验中采集的风筝线拉力数据如图所示。数据表明拉力明显随 8 字形轨迹周期性变化。

将实验数据放入理论中的极坐标系,我们发现实验的八字轨迹形状与理

论的预测基本吻合。风筝在原点的速度方向与极轴呈大致 45° ，这也与理论结果一致。八字的最大偏角由公式

$$\rho_m = \sqrt{\frac{3}{C_E}}$$

给出，其相当于轨迹方程中， ρ 的最大值。依据 ρ 的几何意义，该值相当于八字最远端的点的径矢与原点处径矢的夹角。

需要指出的是，经过定量计算， ρ_m 的值在理论预测和实验测定上存在较大误差，**说明理论在偏转方向上与实验是吻合的，但在偏转力的计算上理论值大于实际值**。其可能是由于如下原因造成：1、风筝具有较大质量，存在离心力，重力等因素，使得在极点处拉力不等于重力。2、描述风筝偏转力的过程中，尽管其原则上可以用能量梯度来描述，但实际上由于风筝法向的不断改变，风力势能的分布也随着时间在改变。如果认为势能场是固定的，则会出现 ρ 较大的位置上偏转力过大的现象。

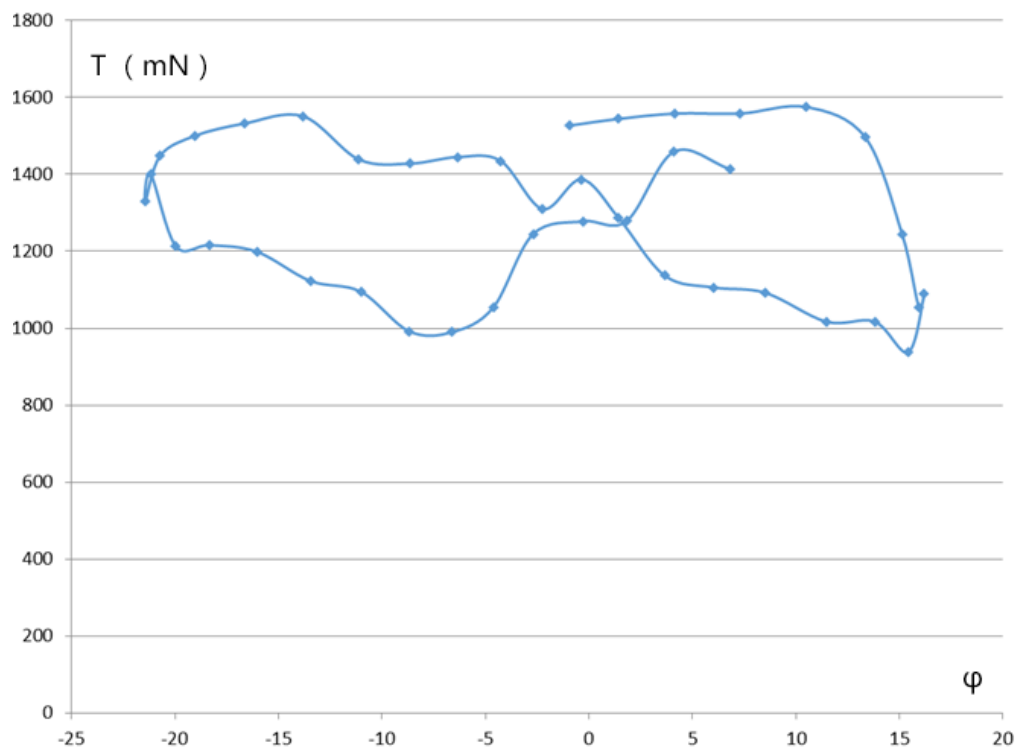


图 4-13 张力随角度 φ 的曲线

实验测定的拉力曲线如图 4-13 所示。我们发现拉力随 φ 角度的变化呈近似的八字变化。这表明：在 θ 较大的地方，拉力较大。对拉力变化的分析如下：

风筝在线方向有受力平衡：

$$F_{tether} = \vec{F}_{wind} \cdot \hat{r} + F_c - G \cos \theta$$

其中

$$F_c = \frac{m v_{kite}^2}{l}$$

表示离心力。

1、重力在线方向上有投影，在 θ 大的地方， $G \cos \theta$ 项较小，拉力因此较大。

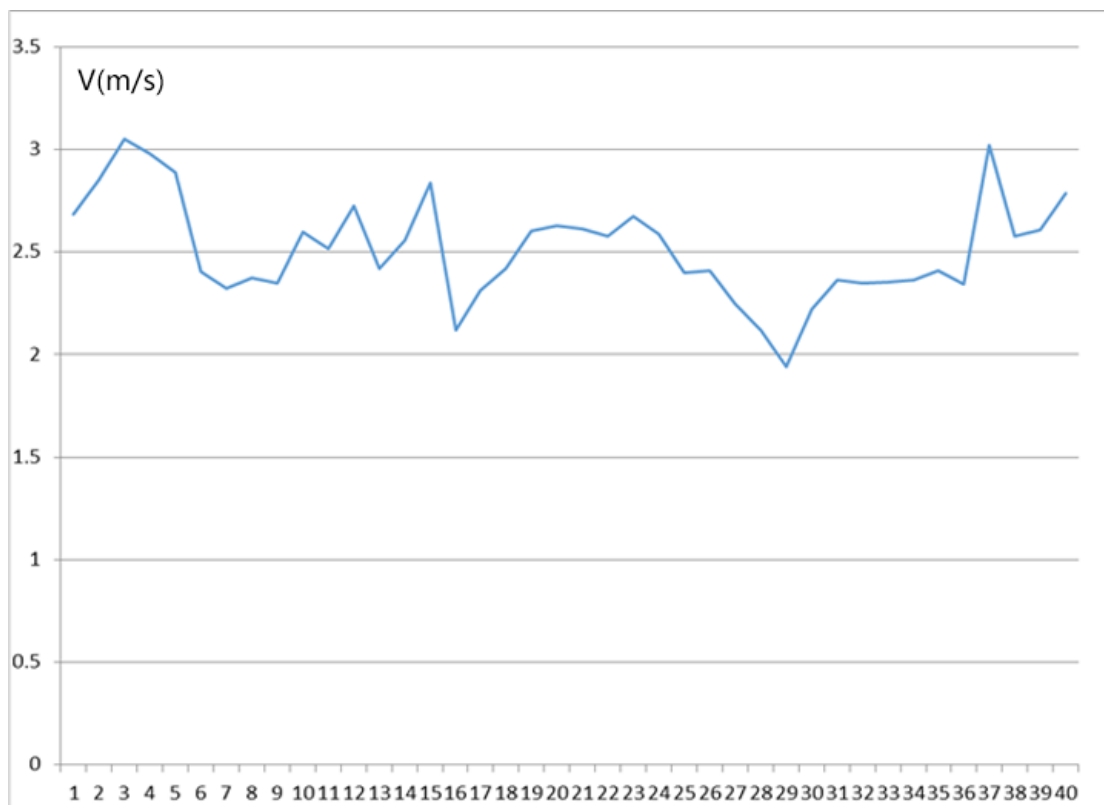
2、如果我们认为风筝的法向随时间有变化，则对于法向沿半径方向的风筝，

有：

$$F_{wind} = F_c \sin \theta \cos \varphi$$

从而对于 θ 较大的地方, $\vec{F}_{wind} \cdot \hat{r}$ 项较大, 拉力较大。

风筝切向速度 V_k 曲线如图所示。验证了 V_k 基本为匀速, 随着微风的扰动而随机涨落。



由 3.4 节对风筝八字运动成因的分析, 我们提到了风筝具有保持匀速运动的性质。事实上, 对于较轻的风筝, 气流的惯性能够对风筝速度大小的改变起到良好的反冲作用, 使风筝速度稳定在定值。对于实验中所用的风筝, 其质量为 0.25kg, 具有一定的惯性, 对于具有一定质量的风筝, 气流并不能一直维持匀速运动, 而改为使风筝的速度在一定范围内波动。实验中风筝的速度极差为 1m/s, 风筝速度在 2m/s 到 3m/s 的范围内, 且能够观察到其速度的波动情况。总体上, 风筝的运动可被认为是匀速运动。

5 总结

在风筝的研究模型中,我们研究并应用前人研究的理论模型,在分析过程成对其进行合理简化和修改得到 8 字轨迹中心平衡点的存在条件的解析解。但是,因为前人理论模型存在一定缺陷而无法解释轨道成因,我们独立构建风筝运动的偏转力理论模型,运用风力的保守力场从而对风筝受力以及风筝轨迹的成因有了更加准确合理的解释。至此,我们借助保守力场模型和球面轨迹坐标系成功地解释了两种最常见的风筝运动模式,对于形状不规则的轨迹,我们同样可以用类似的方式求解轨迹。借助风力势能的定义,我们成功的对风力的大小有了整体的把握,借助对风筝八字运动的关键特性——距中心点越远,轨迹曲率半径越小,我们成功发现了“偏转力”这一因素的重要作用。

实验搭建过程中,我们设计合理的实验装备,相对转化一些参量,并对生活中常见的遥控手柄的摇杆进行改装,以此达到简化记录、减小误差和契合限定条件的目的。

实验测量中,我们在自然环境下对不同规格的风筝的 8 字运动时的位置分析、拉力和风筝切向速度的进行数据测量。并将测量出来的实验数据和理论模型进行对比拟合。经严格分析,实验测定的数据和理论结果拟合度较好,证实了 8 字轨迹平衡点存在条件以及保守力场模型和球面轨迹坐标系描述风筝运动轨迹及预测风筝轨迹的合理性。

我们因此发现,描述一个陌生系统的运动模式,我们往往无法对其运动定律给出准确的表达式。(如此问题中,可能意味着复杂的空气动力学方程)然而,

借助实验现象 ,对运动模式的特征进行分析 ,进而抓住运动模式形成的根本原因 ,
是研究这类问题最有效的方法。

参考文献

- [1] Vlugt, Rolf van der; Bley, Anna; Noom, Michael and Schmehl, Roland (2017). *Quasi-Steady Model of a Pumping Kite Power System*
- [2] Dadd, George Michael (2012). *Kites Dynamic for Ship Propulsion*
- [3] Baayen, J. H. and Ockels, W. J. (2011). *Tracking control with adaption of kites*

致谢页

在整个研究过程中，得到了很多老师的帮助。在此对廖敦利老师、张留碗老师，檀时钠老师表示感谢。

姜旖奇负责合成速度推导及撰写、设计和操作实验并撰写

尹泽龙负责风筝 8 字运动的偏转力模型以及实验操作。

黄烁负责实验操作。

学术诚信声明

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知,除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处,本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员:姜旖奇、尹泽龙、黄烁

指导老师:廖敦利

2017 年 9 月 14 日